

# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

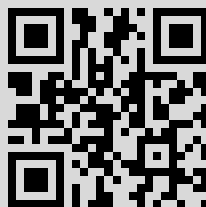
V. P. Myasnikov, A. B. Roshchin, L. M. Truskinovskii,  
The structure of an isothermic jump in a weakly  
nonlocal relaxing compressible medium, *Dokl. Akad.  
Nauk SSSR*, 1990, Volume 311, Number 6, 1347–1351

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you  
have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 193.54.89.93

June 22, 2021, 14:06:50



© Член-корреспондент АН СССР В.П. МЯСНИКОВ,  
А.Б. РОЩИН, Л.М. ТРУСКИНОВСКИЙ

**СТРУКТУРА ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО СКАЧКА  
В СЛАБО НЕЛОКАЛЬНОЙ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ**

Структура ударных волн в релаксирующих средах зависит от амплитуды волны [1, 2]. В слабых ударных волнах она определяется кинетикой релаксации; в сильных ударных волнах за узким фронтом, контролируемым сдвиговой вязкостью и теплопроводностью, располагается более широкая область, в которой явления релаксации преобладают [1, 2].

Ниже рассматриваются особенности структуры ударных волн сжатия в нелокальной релаксирующей среде. С целью упрощения задачи коэффициент теплопроводности предполагается бесконечно большим, вследствие чего среду можно считать изотермической.

1. Функция свободной энергии единицы массы задается в виде

$$(1) \quad f = f_0(T_0, v, \xi) + \epsilon v (\nabla \xi)^2 / 2,$$

где  $T \equiv T_0$  — температура среды,  $v$  — удельный объем,  $\xi$  — безразмерный скалярный параметр (внутренняя степень свободы),  $\epsilon$  — положительная константа, характеризующая масштаб нелокальности среды (см. [3]). Система уравнений, описывающая движение изотропно-вязкой жидкости с удельной энергией (1) в евклидовой эйлеровой системе координат  $x^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , представляется следующим образом (см. [3]):

$$(2) \quad d\rho/dt + \rho \nabla_i u^i = 0,$$

$$(3) \quad \rho du^i/dt = -\nabla^i p - \epsilon \nabla^i (\nabla \xi)^2 + \mu_S \Delta u^i + (\mu_V + \mu_S/3) \nabla^i \nabla_j u^j,$$

$$(4) \quad d\xi/dt = -\Gamma (f'_{0\xi}(v, \xi) - \xi v \Delta \xi),$$

$$(5) \quad p = -f'_{0v}(v, \xi) - \epsilon (\nabla \xi)^2 / 2,$$

где  $d/dt = \partial/\partial t + u^i \nabla_i$ ,  $u^i$  — компоненты вектора скорости,  $\nabla_i$  — ковариантная производная в системе координат  $x^i$ ,  $\rho = 1/v$  — плотность,  $p$  — давление,  $\Delta = \nabla_i \nabla^i$  — оператор Лапласа,  $\nabla$  — оператор градиента,  $\Gamma > 0$  — кинетический скалярный параметр,  $\mu_S$ ,  $\mu_V$  — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости среды ( $\Gamma$ ,  $\mu_S$ ,  $\mu_V$  предполагаются постоянными). В случае  $\epsilon = 0$  система (1)–(5) представляет собой уравнения вязкого двухкомпонентного газа с обратимой химической реакцией, при этом  $\xi$  играет роль массовой доли одного из компонентов в смеси [1].

В работе рассматриваются одномерные ограниченные автомодельные решения системы уравнений (1)–(5), удовлетворяющие граничным условиям

$$(6) \quad u = u_1, \quad v = v_1, \quad \xi = \xi_1 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Состояние  $v = v_1$ ,  $\xi = \xi_1$  предполагается равновесным.

Наложим следующие ограничения на функцию  $f_0(T_0, v, \xi)$ :

$$(7) \quad f''_{0\xi\xi} > 0, \quad f''''_{0vv} < 0, \quad f''_{0vv} > 0 \quad \text{для любого } \xi, \quad f'_{0v} \rightarrow -\infty \quad \text{при } v \rightarrow 0.$$

$$(8) \quad f''_{0\xi v} < 0.$$

Соотношения (7) представляют собой условия нормального газа [4, 5] для изотермической среды. Без ограничения общности можно считать, что выполняется неравенство (8) ( $\partial p/\partial \xi > 0$ ): случай  $\partial p/\partial \xi < 0$  рассматривается аналогично.

Произведем замену переменных  $z = x^1 - Dt$ ,  $x^2, x^3 = \text{const}$ ,  $D = \text{const}$  в уравнениях (1)–(6) и интегрируя их один раз, приходим к системе, описывающей структуру плоских волн со стационарным профилем в среде с энергией (1):

$$(9) \quad d\xi/dz = q,$$

$$(10) \quad dv/dz = (-f'_{0v}(v, \xi) + j^2(v - v_1) - p_1 + \epsilon q^2/2)/(j\mu),$$

$$(11) \quad dv/dz = f'_{0\xi}(v, \xi)/\epsilon v + jq/(\Gamma\epsilon),$$

где  $\mu = \mu_V + \mu_S \cdot 4/3$ ,  $j = \rho_1(u_1 - D)$  – массовый расход в системе координат  $z$ ;  $j = \text{const}$  в силу уравнения (2).

В случае невязкой среды ( $\mu = 0$ ) уравнение (10) приобретает вид

$$(12) \quad F(v, \xi, q) = 0,$$

где  $F(v, \xi, q) = -f'_{0v}(v, \xi) + j^2(v - v_1) - p_1 + \epsilon q^2/2$ . Соотношение (12) в силу (8) можно представить следующим образом:

$$(13) \quad v = V(\xi, q).$$

Функция  $V(\xi, q)$  обладает свойствами: для любого фиксированного  $q$   $V(\xi, q)$  определена на промежутке  $\xi < \xi_{\text{пр}}(q)$  и является двузначной во всей области определения; значения  $\xi_{\text{пр}}(q)$  и  $v_{\text{пр}}(q) = V(\xi_{\text{пр}}(q), q)$  находятся из условий  $F(v_{\text{пр}}, \xi_{\text{пр}}, q) = 0$  и  $F'_v(v_{\text{пр}}, \xi_{\text{пр}}, q) = 0$ . Первая ветвь  $V_1(\xi, q)$ , имеющая область значений  $v > v_{\text{пр}}(q)$ , является монотонно убывающей функцией  $\xi$ , вторая ветвь  $V_2(\xi, q)$  с областью значений  $v < v_{\text{пр}}(q)$  – монотонно возрастающая функция  $\xi$ . Для любого  $q \neq 0$   $V_1(\xi, q) < V_1(\xi, 0)$ ,  $V_2(\xi, q) > V_2(\xi, 0)$ ,  $V(\xi, q) = V(\xi, -q)$ .

Подставляя (13) в (11), находим

$$(14) \quad dq/dz = f'_{0\xi}(V(\xi, q), \xi)/(\epsilon V(\xi, q)) + jq/(\Gamma\epsilon).$$

Система (9), (14) описывает структуру ударных волн со стационарным профилем в невязкой среде с энергией (1), сводится к одному уравнению

$$d\xi/dz = -\Gamma f'_{0\xi}(V(\xi, 0), \xi)/(jV(\xi, 0))$$

в случае, когда нелокальностью среды можно пренебречь ( $\epsilon = 0$ ) [1].

2. Особые точки системы (9)–(11) находятся из условий

$$(15) \quad q = 0, \quad -f'_{0v}(v, \xi) + j^2(v - v_1) - p_1 = 0, \quad f'_{0\xi}(v, \xi) = 0.$$

Последнее из соотношений (15) в силу (7) можно представить в виде  $\xi = \xi^*(v)$ , где  $\xi^*(v)$  – однозначная функция, выражающая зависимость равновесного значения параметра  $\xi$  от удельного объема. Предположим, что  $\partial p_*/\partial v < 0$ ,  $\partial^2 p_*/\partial v^2 > 0$ , где  $p_* = -f'_{0v}(v, \xi^*(v))$ ; тогда справедливо следующее утверждение: если  $v_1 j \leq c_{*1}$ , то в области  $v \leq v_1$  существует единственное решение уравнений (15)

$$(16) \quad q = 0, \quad \xi = \xi_1, \quad v = \xi^{*-1}(\xi_1) \stackrel{\text{def}}{=} v_1;$$

если  $v_1 j > c_{*1}$ , то в области  $v \leq v_1$  уравнения (15) имеют два решения: (16) и  $q = 0$ ,

$\xi = \xi_2$  ( $v = \xi^{*-1}(\xi_2) \stackrel{\text{def}}{=} v_2, v_2 < v_1$ ). Здесь  $c_{*1} = (-v^2 \partial p/\partial v - v^2 \partial p/\partial \xi \times \partial \xi^*/\partial v)_{\xi=\xi_1, v=v_1}^{1/2}$  – равновесная скорость звука в среде до ударной волны,  $\xi^{*-1}(\xi)$  – функция, обратная  $\xi^*(v)$ .

Рассмотрим линеаризованную в окрестности особой точки (16) систему уравнений (9)–(11). Представим ее в безразмерном виде, используя следующие

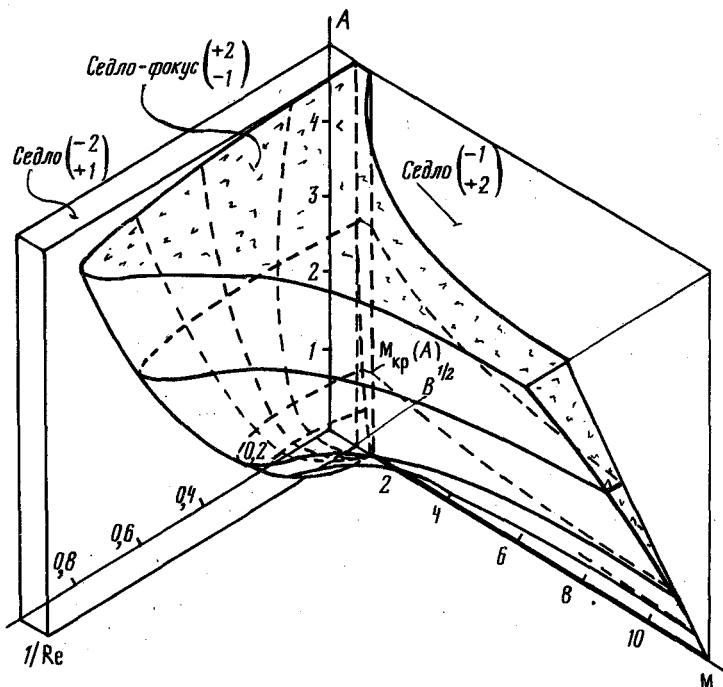


Рис. 1. Тип особой точки (16) при разных значениях параметров  $1/Re$ ,  $M$ ,  $A$ ;  $B = 0,5$ . В названии типа особой точки в скобках указано число собственных значений с положительной и отрицательной действительной частью. Кривая  $M_{кр}(A)$  определена в (18)

масштабы: времени  $\tau = (\Gamma(f''_{0\xi\xi})_1)^{-1}$  (характерное время релаксации), скорости  $c_{\infty 1} = (-v^2 (\partial p / \partial v)_1)^{1/2}$  (замороженная скорость звука до ударной волны),  $c_{\infty 1} \geq c_{*1}$  [6], длины  $l = c_{\infty 1} \tau$ , удельного объема  $v_1$ . Находим

$$(17) \quad (d\xi/dz, dv/dz, dq/dz) = Q(\xi - 1, v - 1, q),$$

где элементы  $q_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , матрицы  $Q$  имеют вид

$$\begin{aligned} q_{11} = q_{22} = q_{23} = 0, \quad q_{13} = 1, \quad q_{21} = \text{Re}(1 - B)^{1/2}/M, \\ q_{22} = \text{Re}(M^2 - 1)/M, \quad q_{31} = 1/A, \quad q_{32} = -(1 - B)^{1/2}/A, \quad q_{33} = M/A. \end{aligned}$$

Здесь  $M = v_1/c_{\infty 1}$  — число Маха,  $Re = lc_{\infty 1}/(v_1 \mu)$  — число Рейнольдса,  $A = \epsilon v_1 / ((f''_{0\xi\xi})_1 l^2)$ ,  $B = c_{*1}/c_{\infty 1}$ . По определению  $A \geq 0$ ,  $0 \leq B \leq 1$ . Безразмерный параметр  $A$  характеризует меру нелокальности среды.

Тип особой точки (16) определяется собственными числами матрицы  $Q$  системы (17); меняется в зависимости от значений параметров  $1/Re$ ,  $M$ ,  $A$  при фиксированном  $B$  так, как показано на рис. 1.

В случае невязкой среды ( $1/Re = 0$ ) особая точка (16) имеет тип "седло" при  $M < B^{1/2}$  и  $M > 1$ , неустойчивый узел при  $B^{1/2} < M < M_{кр}$  и неустойчивый фокус при  $M_{кр} < M < 1$ , где

$$(18) \quad M_{кр} = ((1/2 - 2A) + ((1/2 - 2A)^2 + 4BA)^{1/2})^{1/2},$$

особая точка  $q = 0$ ,  $\xi = \xi_2$  имеет тип "седло" при всех  $M > B^{1/2}$ . Изменение типа особой точки (16) влечет за собой изменение структуры волны.

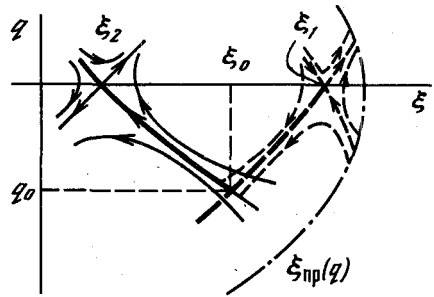
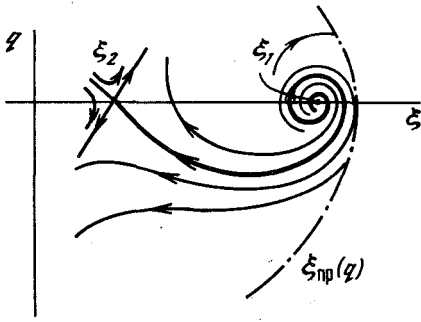


Рис. 2. Схематическое изображение фазового портрета системы (9), (14) в случае  $M_{кр} \leq M < 1$

Рис. 3. Схематическое изображение двулистного фазового портрета системы (9), (14) в случае  $M > 1$ . Штриховыми и сплошными линиями обозначены фазовые кривые соответственно первого и второго листов фазового портрета

3. В случае невязкой среды структура ударных волн описывается системой (9), (14), решения которой могут быть проанализированы с помощью стандартных методов качественного исследования уравнений первого порядка на плоскости [5; 7]. Если  $M \leq 1$ , то  $v_1 \leq v_{пр}(0)$ . В этом случае оказываются справедливыми следующие утверждения: при  $M \leq B^{1/2}$  не существует ограниченных по  $z$  решений (9), (14), удовлетворяющих условиям (6), кроме  $\xi \equiv \xi_1, q \equiv 0$ ; при  $B^{1/2} < M \leq 1$  существует единственное непрерывно дифференцируемое решение (9), (14), такое что  $\xi(z) \rightarrow \xi_1$  при  $z \rightarrow -\infty$ ,  $\xi(z) \rightarrow \xi_2$  при  $z \rightarrow +\infty$ , распределение  $\xi(z)$  оказывается монотонным, если  $B^{1/2} < M < M_{кр}$  (см. [1]), и немонотонным, если  $M_{кр} \leq M < 1$  (см. рис. 2). Асимптотика немонотонного решения при  $z \rightarrow -\infty$  имеет вид

$$\xi(z) = \xi_1 + C \exp(Pz) \cos(Rz),$$

$$P = j / (2 \cdot \Gamma \cdot \epsilon) > 0, \quad R = ((f''_{0\xi})_1 (c_{\infty 1}^2 - c_{*1}^2) / (\epsilon v_1 (c_{\infty 1}^2 - v_1^2 j^2)) - P^2)^{1/2}.$$

Амплитуда  $C$  не превосходит  $\xi_{кр}(0) - \xi_1 > 0$ . В пределе  $M \rightarrow 1$  период колебаний, равный  $2\pi/R$ , вместе с амплитудой  $C$  стремится к нулю. В случае, когда нелокальностью среды можно пренебречь ( $A \rightarrow 0$ ),  $M_{кр} \rightarrow 1$ , ударные волны с немонотонной структурой не возникают [1].

Если  $M > 1$ , то фазовый портрет системы (9), (14) становится двулистным. Первый лист содержит точку (16); в уравнении (14) на месте  $V(\xi, q)$  фигурирует  $V_1(\xi, q)$ . Второй лист содержит особую точку  $\xi = \xi_2, q = 0$  и отвечает второй ветви  $V_2(\xi, q)$  функции  $V(\xi, q)$  в уравнении (14). Справедливо утверждение: для любого числа  $M > 1$  система (9), (14) имеет единственное непрерывное кусочно-дифференцируемое решение, удовлетворяющее условиям  $\xi \rightarrow \xi_1, q \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow -\infty$  и  $\xi \rightarrow \xi_2, q \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow +\infty$  (см. рис. 3). Производная  $dq/dz$  терпит разрыв первого рода в точке  $\xi = \xi_0, q = q_0$  ( $\xi_2 < \xi_0 < \xi_1, q_0 < 0$  при  $A \neq 0$ ), определяемой единственным образом. Удельный объем ( $v(z) = V_1(\xi(z), q(z))$  при  $\xi_0 < \xi \leq \xi_1, v(z) = V_2(\xi(z), q(z))$  при  $\xi_2 \leq \xi \leq \xi_0$ ) испытывает скачок в точке  $\xi_0, q_0$ , величина которого равна  $V_1(\xi_0, q_0) - V_2(\xi_0, q_0) > 0$ . Если  $A \rightarrow 0$ , то  $\xi_0 \rightarrow \xi_1, q_0 \rightarrow q_{00} = -\Gamma(f'_{0\xi})_1 / (jv_1)$ , величина скачка удельного объема монотонно возрастает до значения  $V_2(\xi_1, 0) - V_2(\xi_1, q_{00}) > 0$  при  $A = 0$ . Отметим, что предельное ( $A = 0$ ) распределение  $\xi(z)$  не дифференцируемо в точке  $\xi = \xi_1$  [1].

Введение нелокальности среды ( $A \neq 0$ ) приводит к появлению слабых ударных волн ( $M \leq 1$ ) с немонотонной структурой при значениях числа Маха:  $M_{кр} \leq M <$

$< 1$  ( $M_{кр}$  определено в (18)). В сильных ударных волнах ( $M > 1$ ) перед фронтом, контролируемым вязкостью и теплопроводностью, возникает зона непрерывной релаксации с шириной порядка масштаба нелокальности среды  $(\epsilon v_1 / (\partial^2 f_0 / \partial \xi^2))^{1/2}$ , при этом уменьшается величина "вязкого" скачка удельного объема, а распределение  $\xi(z)$  становится непрерывно дифференцируемым.

Геологический институт  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
13 IV 1989

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я.Б. — ЖЭТФ, 1946, т. 16, № 4, с. 365.
2. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М.: Мир, 1967, с. 289.
3. Рошин А.Б., Трускиновский Л.М. — ПММ, 1989, т. 53.
4. Weyl H. — Comm. Pure Appl. Math., 1949, vol. 2, № 2/3, p. 103.
5. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Система квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
6. Мандельштам Л.И., Леонтович М.А. — ЖЭТФ, 1937, т. 7, № 3, с. 438.
7. Андронов А.А. и др. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. 488 с.

УДК 518.538.13

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© С.Г. ОСИПОВ, М.М. ХАПАЕВ

### О НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКЕ ДОМЕННОЙ ГРАНИЦЫ

(Представлено академиком В.П. Масловым 14 IV 1989)

1. В последние годы исследования нелинейных динамических процессов в магнитных материалах вызывают большой интерес как физиков, так и математиков [1–3]. Подобные исследования в значительной степени стимулируются многочисленными применениями ферромагнитных пленок в запоминающих устройствах, носителями информации в которых являются либо сами магнитные домены, либо структурные особенности доменных границ.

В настоящее время пока не удалось добиться полного понимания динамики доменных границ, что обусловлено, с одной стороны, сложностью строгой математической постановки задачи; с другой — противоречивостью, ограниченным характером и неоднозначностью интерпретации экспериментальных данных.

Наиболее общим уравнением, описывающим динамику доменной границы, является уравнение Ландау–Лифшица — уравнение движения вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  под действием полного эффективного поля  $\mathbf{H}$ :

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = |\gamma| \cdot \mathbf{H} \times \mathbf{M} + \left( \frac{\alpha}{M_S^2} \right) (\mathbf{M} \times \mathbf{M} \times \mathbf{H}),$$

где  $\gamma$  — гиромагнитное отношение,  $\alpha$  — параметр затухания,  $M_S$  — намагниченность насыщения;

$$(2) \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{H}_{ex} + \mathbf{H}_d + \mathbf{H}_0 = -\frac{2K}{M_S^2} f(\mathbf{M}) + \frac{2A}{M_S^2} \Delta \mathbf{M} + \mathbf{H}_d + \mathbf{H}_0,$$

$\mathbf{H}_a$  — поле анизотропии,  $\mathbf{H}_{ex}$  — обменное поле,  $\mathbf{H}_d(\mathbf{M})$  — размагничивающее поле,