

## Figure 1 : Montage expérimental et extraction des données brutes

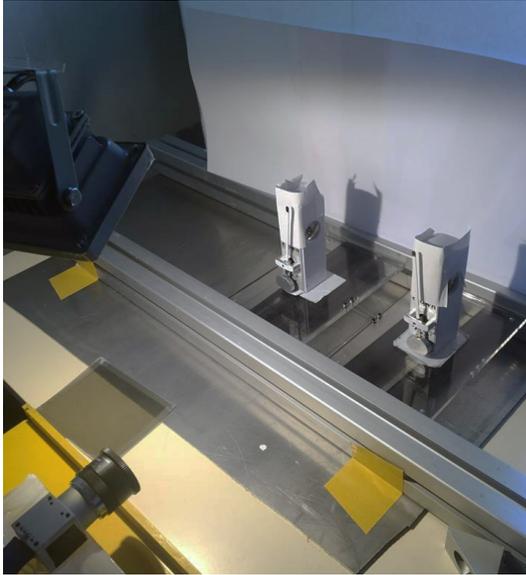


Figure 1.A

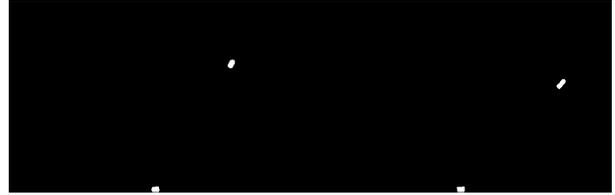


Figure 1.B

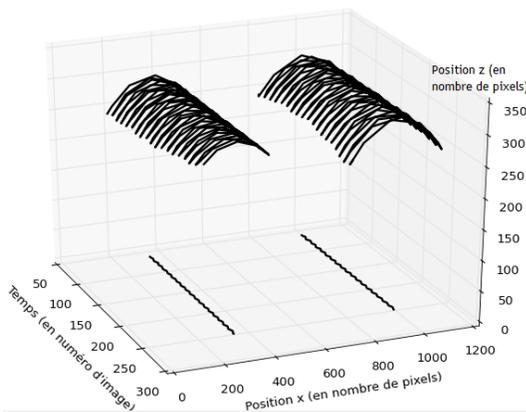


Figure 1.C

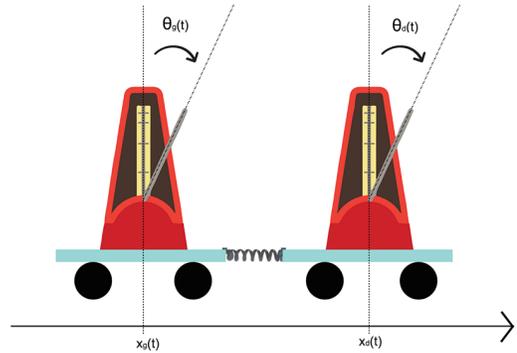


Figure 1.D

**Figure 1.A** Deux métronomes sont placés chacun sur une plaque, ces deux plaques étant liées par un ressort. Les plaques sont positionnées sur des rouleaux permettant une translation unidirectionnelle. Des feuilles blanches sont positionnées sur les métronomes et derrière ceux-ci. Ces feuilles permettent de simplifier le traitement d'images qui sera ensuite effectué. Nous analyserons la dynamique de ce système. Une fois lancés, les deux métronomes se synchronisent rapidement en phase. L'étude est portée en régime permanent lorsque cette synchronisation est déjà établie. Une lampe éclaire le montage et une caméra nous permet de recueillir les séquences d'images. Ces images sont tout d'abord traitées grâce au module SMIL existant sous Python (Copyright (c) 2011-2015, Matthieu FAESSEL and ARMINES). Un exemple d'image obtenue après traitement est présentée en *Figure 1.B*.

**Figure 1.B** Les quatre points importants de l'image ont été isolés, à savoir les positions des plaques et des deux extrémités des tiges des métronomes.

**Figure 1.C** A partir de ces images nous tirons les données brutes des positions en fonction du temps. Nous pouvons donc tracer les positions de ces quatre points en fonction du temps sur un même graphique 3D, le temps représentant un des axes du graphique.

**Figure 1.D** Schéma du montage avec les notations  $x_d$ ,  $x_g$ ,  $\theta_g$  et  $\theta_d$  qui seront utilisées dans la suite.

## Figure 2 : Caractérisation de la dynamique du système

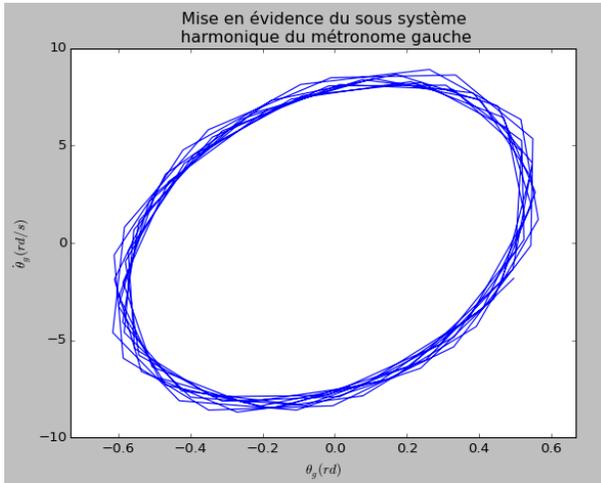


Figure 2.A

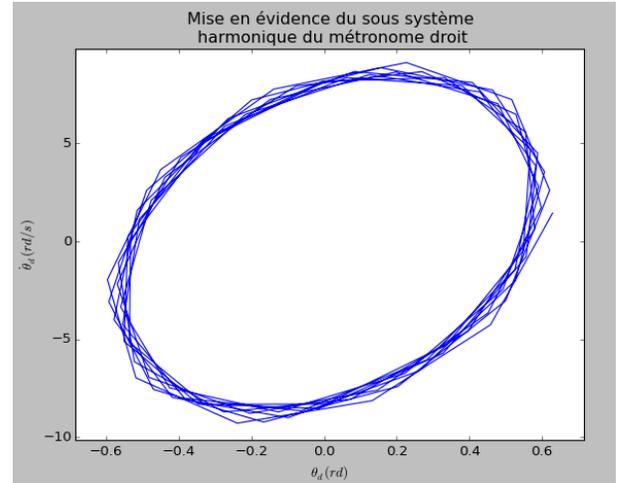


Figure 2.B

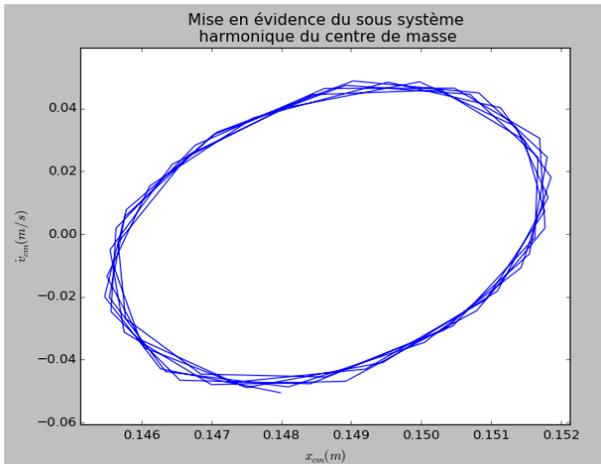


Figure 2.C

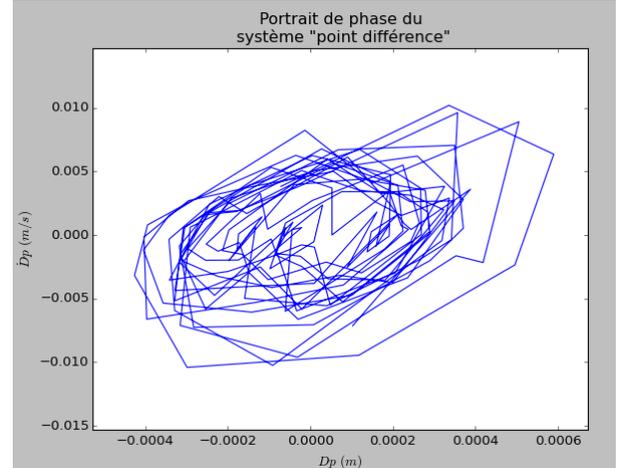


Figure 2.D

Pour décrire notre système il faut, à priori, 8 paramètres que sont les positions des plaques gauche et droite  $xg$  et  $xd$ , les vitesses des plaques gauche et droite  $vg$  et  $vd$ , les angles que forment les tiges des métronomes gauche et droit avec la verticale  $\theta g$  et  $\theta d$ , et les vitesses angulaires de ces tiges  $\theta g'$  et  $\theta d'$ . Tous ces paramètres ont été calculé numériquement à partir des données brutes récoltées. Pour décrire toute la dynamique du système il faudrait construire le portrait de phase dans l'espace à 8 dimensions. Nous avons en fait réussi à isoler trois sous-systèmes harmoniques de dimension 2. Définissons le centre de masse par sa position  $x_{cm}$  et notons sa vitesse  $v_{cm}$ . Les sous-systèmes sont alors les suivants :  $(\theta g, \theta g')$ ,  $(\theta d, \theta d')$ ,  $(x_{cm}, v_{cm})$ . Les portraits de phase de ces sous-systèmes sont représentés en 2.A, 2.B et 2.C. Ce sont tout trois des ellipses, ce qui définit un oscillateur harmonique. Le fait que ce soit des sous-systèmes harmoniques signifie qu'ils ne s'influencent pas les uns les autres, chacun évoluant à une fréquence donnée. Par ailleurs il nous reste deux paramètres que nous n'avons pas réussi à classer en sous-système harmonique. Les deux derniers paramètres doivent être choisis pour pouvoir retrouver les 8 initiaux à partir des 6 que nous avons déjà. Nous pourrions choisir  $(xg, vg)$  ou  $(xd, vd)$  mais nous choisissons plutôt un nouveau paramètre plus symétrique, que nous appelons point différence, et que nous définissons par  $x_{Dp} = xd - xg$ . Nous notons  $v_{Dp}$  sa vitesse. Nous choisissons plutôt ce lot de paramètre  $(x_{Dp}, v_{Dp})$  car il est plus symétrique et apparaît normalement quand on étudie le couplage de deux oscillateurs harmoniques. Par ailleurs, ce couple  $(x_{Dp}, v_{Dp})$  ne forme pas un sous-système harmonique ici, comme nous pouvons le voir sur son portrait de phase 2.D qui n'est pas une ellipse et contient de multiples points d'intersections. Nous étudierons ce dernier lot de paramètres en Figure 3.

Figure 3 : Analyse du sous système ( $xDp, vDp$ )

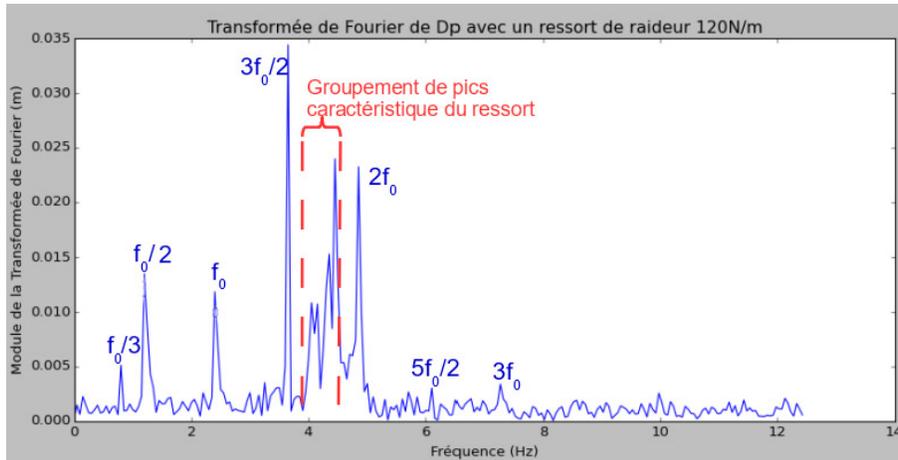


Figure 3.A

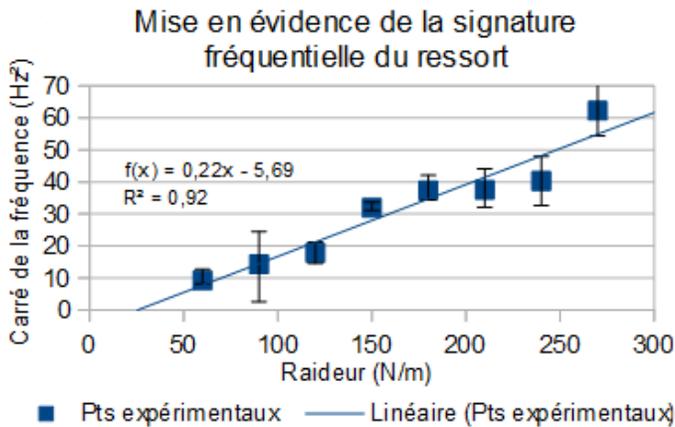


Figure 3.B

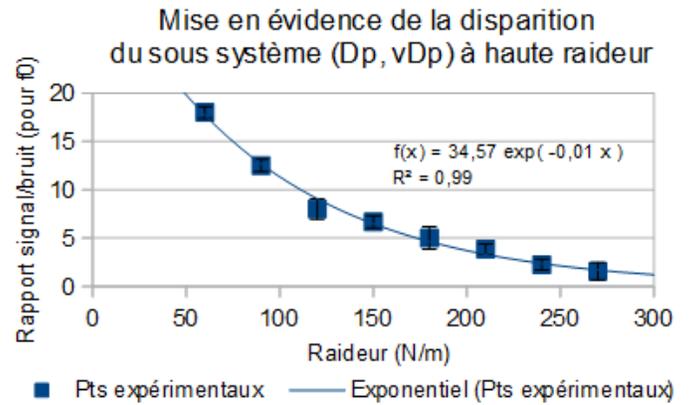


Figure 3.C

**Figure 3.A** : La Transformée de Fourier de  $xDp$  présente plusieurs contributions (elle a ici été réalisée pour un ressort de 120N/m mais l'on retrouve cela à toute raideur). Premièrement, on trouve comme attendu des pics à  $f_0$  et à ses harmoniques ( $2f_0, 3f_0\dots$ ),  $f_0$  étant la fréquence des métronomes qui est déterminée facilement grâce à la Transformée de Fourier de  $\theta g$  par exemple. Deuxièmement, de façon totalement inattendue, on trouve aussi des pics à  $f_0/2, f_0/3$  : c'est la cascade sous-harmonique. Celle-ci implique que notre système est chaotique. La raison exacte de ce chaos est difficile à déterminer mais nous pensons que celui-ci provient des possibilités de flambement aléatoire du ressort. Par ailleurs, nous n'avons pas pu le vérifier. Enfin, le spectre présente un groupement de pics supplémentaires qui a une fréquence centrale variant de la même façon que la raideur du ressort.

**Figure 3.B** : Si on considère un modèle simplifié de deux oscillateurs harmoniques couplés par un ressort, on trouve par le calcul que le point différence oscille à une nouvelle fréquence dont le carré varie linéairement avec la raideur du ressort de couplage. C'est exactement ce qu'on trouve expérimentalement pour la fréquence du groupement de pics, celui-ci est donc la signature fréquentielle du ressort.

**Figure 3.C** : En augmentant progressivement la raideur du ressort nous observons que le rapport signal/bruit du pic à  $f_0$  diminue (exponentiellement) et tend vers 0. On observe la même tendance pour tous les autres pics décrits précédemment. Ce phénomène se comprend par le fait que, à haute raideur, la situation est analogue au cas où les deux métronomes sont posés sur la même plaque. Ainsi  $xDp$  est une valeur constante et ne possède aucun pic au delà de la fréquence nulle dans son spectre de Fourier.