

Tippe Top : Protocoles et méthodes

Antoine Rideau & Franz De Soete

Introduction

Le mouvement de la Tippe Top (“toupie renversante” en français) est complexe dans la mesure où il inclut plusieurs rotations couplées à un mouvement de précession. De façon théorique, son mouvement a déjà été étudié. Ce document a vocation à décrire un dispositif expérimental permettant d’enregistrer le mouvement de la toupie puis de l’analyser à l’aide de Matlab pour pouvoir confronter les résultats expérimentaux et théoriques.

Matériel et dispositif expérimental

Tout d’abord, il s’agit de présenter le matériel nécessaire à la réalisation de dispositif :

- une toupie Tippe Top achetée sur internet (25,43€ sur grand-illusions.com) de 30mm de diamètre
- une caméra ultra rapide (au moins jusqu’à 630,5 f/s)
- un objectif de focale 1m adaptable sur la caméra
- des barres en aluminium permettant de construire un support pour la caméra (6x1m, 6x15cm)
- 12 petites équerres de soutien et 6 équerres plates
- 70 écrous et 70 vis pour fixer les barres et la caméra
- une clé pour serrer les écrous
- une dalle lumineuse à LED de 60x60cm
- une dalle lumineuse à LED de 30x30cm
- une alimentation stabilisée délivrant un courant d’au moins 0,85A et une tension de 25-40V
- une alimentation stabilisée délivrant un courant de 0,17A et 30V
- un carton dont les côtés font au moins 30x30cm (taille de la petite dalle)
- un ordinateur muni de pylonviewer et de Matlab (et de prises USB 3.0) pour l’acquisition et le traitement des vidéos
- une plaque en bois munie de quatre pieds en acier réglables
- un perceuse avec mèche à bois
- un niveau à bulles
- 4 feuilles de papier blanc A4
- une bombe de peinture noire (et un support en polystyrène)

Puis, la première étape consiste à monter le dispositif expérimental permettant l’acquisition des vidéos. A l’aide de la perceuse, faire 4 trous aux quatre coins de la planche en bois, puis y fixer les pieds réglables, et poser la dalle de 60x60cm dessus (**figure 1.a**). A l’aide d’un niveau à bulle, ajuster la hauteur de chaque pied pour que la dalle lumineuse soit parfaitement horizontale.

Découper ensuite le fond et le dessus du carton : sur les 4 côtés intérieurs, coller les feuilles blanches pour faire des surfaces réfléchissantes. Poser ensuite le carton sur la dalle lumineuse, et attacher la dalle lumineuse de 30x30cm à l’intérieur du carton sur l’un des côtés à la verticale : on a ainsi une enceinte lumineuse et réfléchissante pour lancer la toupie. Puis, avec les barres d’aluminium, réaliser un support pour la caméra, de sorte que celle-ci soit placée à la distance

focale de l’objectif par rapport à la toupie (environ 1m). La caméra est ensuite fixée sur le support (**figure 1.b**).

Enlever ensuite les transformateurs des dalles lumineuses et les connecter directement aux alimentations stabilisées : celle de 60x60cm à la plus puissante des 2 (la régler sur 0,80A) et celle de 30x30cm à l’autre (à régler sur 0,17A). Cette étape permet de s’affranchir de la fréquence de 50Hz délivrée normalement par les dalles qui est visible à la vidéo et perturbe les mesures.

Enfin, placer un carton au-dessus de la caméra (les chutes du carton précédent suffisent) pour cacher la lumière émise par les néons de la salle de TP qui fonctionne en 50Hz.

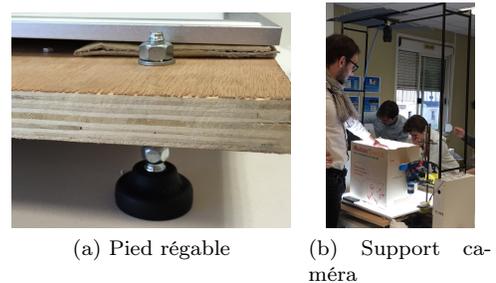


FIGURE 1: Dispositif expérimental

NB : Nous avons dû utiliser des cartons pour surélever le dispositif et placer l’objectif à distance focale du plan d’observation car nos barres d’aluminium noir n’étaient pas assez longues.

Manipulations

Réglages de l’objectif

C’est le premier réglage à réaliser car il conditionne le réglage de la caméra. L’objectif est à focale fixe de 1m, c’est pourquoi il faut le placer à 1m du plan d’étude. Puis, régler la mise au point et la profondeur de champ comme sur la **figure 2.a**.

Réglages de la caméra

Dans un premier temps, démarrer le logiciel Pylonviewer (qui n’existe que sous Windows). Aller dans le menu “device” et démarrer la caméra. Puis, cliquer sur la caméra et ouvrir le menu “image format control” : ajuster les réglages “width” et “Height” pour croquer l’image, puis “Offset X” et “Offset Y” pour bien la centrer. Une fois ces réglages terminés, on ne doit plus voir les bords de l’enceinte (**figure 2.b**), et la surface en arrière plan de la toupie doit être uniquement blanche. Régler ensuite le temps d’exposition sur 1.5ms : la fréquence d’acquisition est alors de 630,5 images/s.



FIGURE 2: Réglages objectif

Préparation de la toupie

La toupie fournie est en aluminium non teinté : c'est gênant pour réaliser des acquisitions de bonnes qualité et exploitables sous Matlab. C'est pourquoi il faut peindre la toupie en noir pour la faire ressortir sur le fond lumineux. Poser la toupie sur un support en polystyrène, et utiliser la bombe de peinture noire mate pour la peindre uniformément. Puis, une fois la peinture sèche, retourner et la faire tenir en plantant son manche dans le polystyrène et bomber à nouveau en noir. La toupie doit alors être uniformément noire. Enfin, peindre (avec du blanco par exemple) le bout du manche en blanc (ce qui servira à repérer le manche et mesurer les différents paramètres), et faire un point blanc de 2-3 mm de diamètre sur la face sphérique excentré d'à peu près 1cm du centre de la surface (il servira à mesurer la vitesse de rotation propre sur Matlab).

Lancement de la toupie

Les manipulations à effectuer sont simple : lancer la toupie et enregistrer son mouvement avec la caméra comme le montre la figure 3. Il faut veiller à ce que la toupie ne touche pas les bords de l'enceinte. L'enregistrement de la vidéo doit se faire sans perturbations.

Enregistrement des vidéos avec Pylonviewer

Une fois les réglages précédents établis, cliquer sur le bouton rouge sur pylonviewer. S'assurer qu'aucune limite n'est fixée pour le nombre d'images à enregistrer (ou le fixer à



FIGURE 3: Lancement de la toupie

10000). Régler la fréquence de visualisation vidéo à votre convenance (30 images/s par exemple). Puis, lancer l'acquisition vidéo en même temps qu'une deuxième personne lance la toupie.

Traitement des données

Etant donné que l'on ne dispose que d'une seule caméra, toutes les données doivent être déduite de l'image en vue de dessus pour avoir toujours le même repère. C'est pourquoi le point blanc prend toute son importance : il permet de rendre compte à tout instant de l'inclinaison de la toupie tant que le manche ne sort pas du disque noir délimité par la toupie. Puis la forme du manche prend le relais. De même pour le point blanc sur la calotte sphérique : il agit comme un repère par rapport au disque noir.

Traitement préliminaire

Les vidéos réalisées ont été enregistrées au format .avi, format que Matlab ne peut lire. Pour plus de commodité, on utilise ImageJ pour exporter les vidéos en séquences d'images en niveaux de gris. Ouvrir ImageJ, y faire glisser la vidéo sélectionnée. Puis, ouvrir le menu "Fichier", cliquer sur "save as -> images sequence". Choisir le format JPEG, ne pas mettre de nom pour les images, et créer un dossier dans le répertoire souhaité. La séquence d'images est réalisée et prête pour l'analyse avec Matlab. L'ensemble des programmes est regroupé dans le dossier « version 10 ».

Principes algorithmiques

L'analyse du mouvement a été découpée en trois phases :

1. Le bout du manche reste inclus dans le disque noir délimité par le contour de la toupie
2. Le bout du manche sort de ce disque et est repérable
3. la toupie est retournée, le point blanc permet la mesure de la vitesse

Pour chaque phase, un programme différent a été écrit dont l'utilisation est décrite dans le guide de l'utilisateur. Le principe général des programme est d'utiliser le fait que l'image est codée en niveaux de gris pour reconnaître la forme noire de la toupie sur le fond blanc de l'image, puis de reconnaître les repères blancs sur la toupie (bout du manche, point blanc sur la calotte sphérique). La vitesse de retournement, la vitesse de rotation propre ainsi que la trajectoire pourront ainsi être déterminées durant toute la durée du mouvement.

Pour mesurer la vitesse de retournement (cela ne concerne que les phases 1 & 2), on utilise le repère que constitue le bout du manche (tantôt blanc pour la première phase, tantôt noir pour la deuxième). Le paramètre variant est alors sa distance par rapport au centre du disque noir (délimité par les contours de la toupie). La situation est représentée sur la figure 4 ci-dessous.

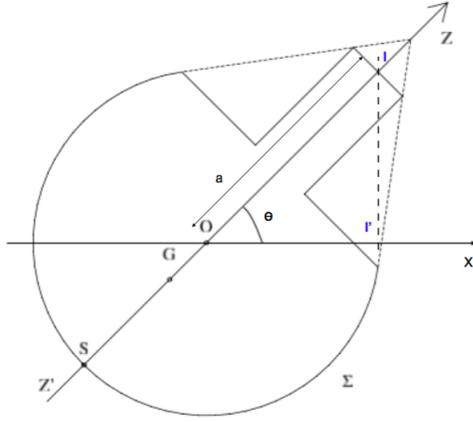


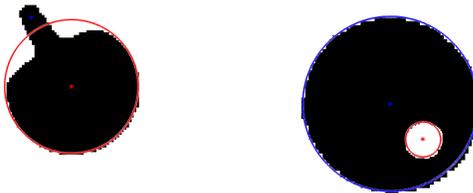
FIGURE 4: Schéma de la toupie

I' est le projeté orthogonal de I sur l'axe (OX) . La distance observée par vue de dessus est OI' . On note $a = OI$. Ainsi, la distance observée est reliée à l'angle par la relation :

$$\cos\theta = \frac{OI'}{a} \quad (1)$$

L'angle θ peut alors être déterminé avec Matlab à partir de l'image en vue de dessus. Cette loi est utilisée jusqu'à $\theta = 0$, puis θ est changé en $-\theta$. Puis, la vitesse de retournement est déduite simplement par différence entre les images successives. Lorsque le manche n'est plus visible, la toupie se retourne, et le mouvement est alors entièrement déterminé.

Pour les phases 1 et 2 du mouvement (jusqu'à retournement), la vitesse de rotation est déterminée en utilisant aussi le bout du manche et en repérant le vecteur \vec{OI}' (figure 5.a). Pour la phase 3 (toupie retournée), le centre du point blanc est repéré sur la surface de la toupie : le vecteur délimité par le centre du disque noir et le centre du point blanc est calculé, puis la vitesse de rotation est déduite (figure 5.b).



(a) Extrémités du vecteur \vec{OI}' (b) Vecteur pour la phase 3

FIGURE 5: Repérage sous Matlab

Guide de l'utilisateur

L'utilisation du programme est détaillée dans la vidéo tutorielle annexe. Pour utiliser correctement le programme, il

faut d'abord ouvrir le programme *Initialisation.m*. Le lancer : celui-ci demande alors de choisir un dossier de séquence d'images. Sélectionner le dossier désiré, puis le programme lance le traitement.

La séquence d'images est alors ouverte pour un traitement Matlab. Puis, ouvrir le programme *Debutdumouvement.m* : il y a deux paramètres à fixer, « borneinf » et « bornesup ». Il s'agit des numéros d'images qui délimitent la première phase du mouvement. Pour « borneinf », prendre la première image où la main du lanceur n'est plus visible et où le seul objet noir sur la vidéo est la toupie. Pour « bornesup », sélectionner la dernière image où le point blanc du bout du manche est encore dans le disque noir délimité par la toupie.

Pour la seconde phase du mouvement, utiliser le programme *Milieudumouvement.m* et changer à nouveau les paramètres « borneinf » et « bornesup » (dans ce programme). Pour la « borneinf », prendre quelques images après la « bornesup » de la première phase. La nouvelle bornesup correspond à la dernière image où l'on voit le manche.

La dernière phase du mouvement correspond à celle où la toupie est retournée sur son manche. Utiliser alors le programme *Findumouvement.m*. La borneinf correspond alors à la première image où l'on ne voit plus le manche, et la bornesup à la dernière image avant la chute de la toupie. Répéter ces opérations pour toute séquence d'images à analyser.

Par ailleurs, l'ensemble de ces quatre programme effectuent une sauvegarde des données. En effet, *Initialisation.m* enregistre ses données dans *Initialisation.mat*. Il en va de même pour les trois autres programmes qui stockent respectivement dans *SauvegardeDdM.mat*, *SauvegardeMdM.mat* et *SauvegardeFdM.mat*. Cela permet d'accéder facilement aux données déjà obtenues sans avoir à relancer l'analyse de milliers d'images. Toutes les courbes sont ensuite obtenues en lançant le programme *Exploitation_des_Donnees.m*.

Un peu de théorie

L'essentiel de la théorie a été développé dans *La toupie Tippe Top* par L. G. Vdiani et dans l'article *The Dynamics of a Tippe Top* qui propose une simulation numérique, permettant une comparaison avec les résultats obtenus. Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\mu(\dot{\mathbf{V}}_0 + q\ddot{\mathbf{k}}) = \mathbf{F} - \mu Fr r^{-1} \mathbf{K} \quad (2)$$

où μ est la masse réduite de la toupie, $\dot{\mathbf{V}}_0$ l'accélération de son centre d'inertie, q la distance initiale du centre de masse par rapport au centre de rotation propre ($q < 0$), \mathbf{k} le vecteur unitaire selon l'axe du manche de la toupie, \mathbf{F} la réaction du support, Fr le nombre de Froude et \mathbf{K} le vecteur unitaire vertical lié au référentiel de translation du centre de la toupie.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_0\omega) = \mu q \dot{\mathbf{V}}_0 \wedge \mathbf{k} - \mu q Fr r^{-1} \mathbf{k} \wedge \mathbf{K} - \mathbf{K} \wedge \mathbf{F} \quad (3)$$

où \mathbf{I}_0 est le tenseur du moment d'inertie et ω la vitesse de rotation angulaire.

Les paramètres réduits des équations ont pour expressions :

$$\mu = \frac{MR^2}{A_0}, Fr = \frac{\Omega^2 R}{g}, \sigma = \frac{C}{A_0} \quad (4)$$

où σ est le rapport d'inertie.

Le développement de ces équations et l'application des conditions de stabilité d'O'Brien et Synge conduit à la condition de stabilité :

$$1 > 4\mu Fr^{-1} h / \hat{\sigma}^2 \quad (5)$$

où $\hat{\sigma}$ est le rapport d'inertie axial/transverse au point de contact entre le support et la toupie. Dans le cas d'un roulement (notre cas) $h = q$. Par ailleurs, pour avoir retournement, il faut avoir $\mathbf{q} < \mathbf{0}$, c'est-à-dire que le centre de masse à l'état initial doit être sous le centre de rotation.

Enfin, un petit bilan énergétique s'impose. Le fait qu'il y ait des frottements au niveau du contact entre la toupie et le support induit nécessairement des pertes énergétiques. L'énergie totale s'écrit :

$$E_{totale} = E_{rotation} + E_{translation} + E_{potentiel} \quad (6)$$

où $E_{rotation}$ et $E_{translation}$ sont les énergies de rotation et de translation (respectivement) au centre d'inertie de la toupie. Cependant, comme le montre le graphique énergétique figure 6 de l'article *The Dynamics of a Tipped Top*, l'énergie totale diminue simultanément au retournement : la perte d'énergie ne serait-elle pas due essentiellement au choc du manche sur le support lors du retournement ? Par ailleurs, l'augmentation de l'énergie potentielle compense la diminution de l'énergie rotationnelle, mais l'énergie de translation diminue : une diminution de la vitesse de rotation peut-être observée après le retournement.

Ouverture

Maîtrise des conditions initiales

Une toupie plus grosse, en laiton, a par ailleurs été réalisée avec le tour numérique du PMMH (**figure 6**). L'objectif était de pouvoir la lancer en fixant un paramètre : la vitesse de rotation propre initiale et l'inclinaison initiale de son axe de rotation. Pour cela, son manche s'adapte sur une perceuse/visseuse. Le montage expérimental n'est pas encore adapté au lancement, mais la perceuse l'est déjà puisqu'un variateur permet de contrôler sa vitesse de rotation. Il serait de plus judicieux d'utiliser une surface incurvée pour faciliter le lancer de la toupie.

Par ailleurs, pour pouvoir mieux rapprocher le problème expérimental d'un modèle théorique, il serait intéressant de déterminer le coefficient de frottement statique (à assimiler au coefficient de frottement dynamique) de la surface de lancer, puis de le faire varier.

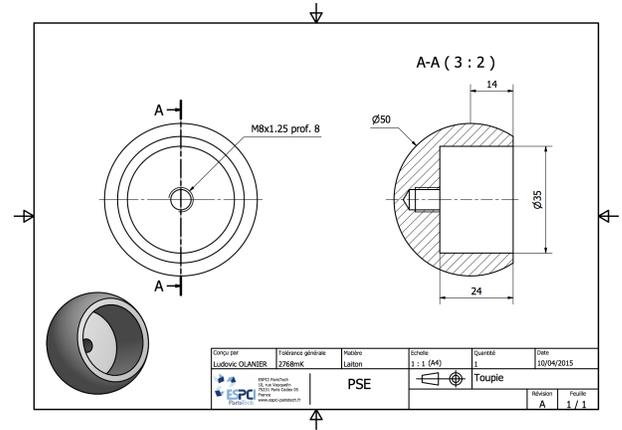


FIGURE 6: Plan de la toupie en laiton

Données supplémentaires

A partir de la vidéo, il semble possible de mieux saisir la précession, en mesurant par exemple au cours du mouvement l'angle de l'axe de précession. Par ailleurs, il serait intéressant d'étudier l'influence du coefficient de frottement de la surface sur le mouvement. En effet, c'est un paramètre important dans la résolution théorique, et les manipulations décrites ci-dessus ne permettent pas de le faire varier. Enfin, une vidéo prise de côté permettrait d'étudier la dynamique du choc du manche de la toupie sur le support.

Bibliographie

- [1] L.G. Vidiani, *La toupie Tippe Top* (corrigé du problème d'Agrégation de Mécanique rationnelle de 1953), 2006.
- [2] A. C. OR, *The Dynamics of a Tippe Top*, Journal of Applied Mathematics, Vol.54, No. 3, pp. 597-609, June 1994.
- [3] S. EBENFELD, *A new analysis of the Tippe Top : Asymptotic States and Liapunov Stability*, Annals of Physics 243, 195-217 (1995).