

---

# Instabilités à l'interface entre fluides miscibles par forçage oscillant horizontal

Marc LEGENDRE , Philippe PETITJEANS , Pascal KUROWSKI

– Laboratoire de physique et mécanique des milieux hétérogènes, ESPCI  
10, rue Vauquelin 75005 Paris  
courriel : malegend@pmmh.espci.fr

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

---

**Résumé.** Des expériences ont été menées pour étudier l'effet de vibrations sinusoïdales et horizontales sur l'interface entre deux fluides miscibles placés dans une cuve fermée. A une amplitude d'excitation  $a$  fixée, la fréquence  $f$  est progressivement augmentée jusqu'à une fréquence seuil pour laquelle on peut observer un relief stationnaire dans le référentiel de la cuve. La différence de densité entre les deux fluides induit un cisaillement oscillant qui conduit à une instabilité de type Kelvin-Helmoltz . La courbe de stabilité expérimentale confirme ce mécanisme physique. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**instabilité d'interface/ fluides miscibles/tension de surface effective**

***Instabilities at the interface between miscible fluids under horizontal oscillating forcing***

**Abstract.** *Experiments were performed in order to study the instability at the interface between miscible fluids placed in a closed tank when submitted to an horizontally and sinusoidally oscillating forcing. For a given amplitude  $a$ , the frequency  $f$  was progressively increased until a threshold frequency above which a stationary relief can be observed in the reference frame of the tank. The difference of density involves an oscillating shear which lead to a Kelvin-Helmoltz type instability. An experimental stability curve was determined and confirms the physical mechanism. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS*

***interfacial instability/ miscible fluids/effective surface tension***

---

Note présentée par Prénom NOM

S1296-2147(01)0????/FLA

© 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

**Abridged English version**

Many theoretical studies have been reported on the problem of two fluids excited by a sinusoidal and horizontal forcing [3, 4]. However, few experimental works have been published. In this paper, some results are presented about the effects of horizontal vibrations on the interface between miscible fluids. The physical mechanism is explained and the experimental stability curve is compared to the theoretical predictions of Lyubimov [4].

Two miscible fluids, water and glycerin, are placed in a closed tank, submitted to horizontal and sinusoidal oscillations in  $a \cos(\omega t)$  (figure 1(a)). At a fixed amplitude  $a$ , the frequency  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  is increased gradually and continuously. Above a threshold frequency, a relief appears at the interface between the two fluids. This relief is called as "frozen waves" because it is stationary in the reference frame of the tank (figure 1(b)). The wavelength of the instability is measured by averaging the total number of patterns over the length of the cell. As the dispersion is small (less than 10%), the method is relevant.

Because of the density difference, a sinusoidal shear is generated between the two fluids (figure 3(a)) :

$$\Delta U = 2a\omega \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \sin(\omega t)$$

This relation has been confirmed by PIV measurements of the velocity field (figure 2(a)). We have found that this shear involves a Kelvin-Helmoltz type instability and that the mean square of the shear  $\langle \Delta U^2 \rangle$  is the control parameter of the instability (figure 2(b)). Indeed, the pressure gradient around the interface is related to the velocity gradient square (Bernoulli theorem). We assume that the time characterising the evolution of the interface is much larger than the excitation period. Hence, the shear direction has no influence and the mean square of the shear is the relevant parameter. We can show experimentally and theoretically that  $\langle \Delta U^2 \rangle$  is proportionnal to the product  $(a\omega)$ . The experimental stability curve of the instability is given by the figure 3(b). One can observe that  $(a\omega)_s^2$  depends linearly on the wavelength  $\lambda$ . Moreover, experiments with diluted glycerin have been performed and seem to show that the viscosity has no influence on the instability.

A theoretical model of this non-linear problem has been proposed by Lyubimov and Cherepanov [4] in the case of immiscible and inviscid fluids. This model provides an equation of the stability curve :

$$(a\omega)_s^2 = \frac{(a\omega)_0^2}{2} \left( \frac{\lambda}{\lambda_c} + \frac{\lambda_c}{\lambda} \right) \tanh \left( \frac{2\pi h}{\lambda} \right)$$

$$\text{where } \lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{(\rho_2 - \rho_1)g}} \quad \text{and} \quad (a\omega)_0^2 = \frac{(\rho_1 + \rho_2)^3}{\rho_1 \rho_2 (\rho_2 - \rho_1)} \sqrt{\frac{\gamma g}{\rho_2 - \rho_1}}$$

In first approximation, we can assume that, in our experiments, the surface tension is zero as the fluids are miscible. Moreover, we can suppose that the fluids are inviscid as the experimental stability curve does not depend on the glycerin viscosity. Within these conditions, the model predicts the linear dependance of  $(a\omega)_s^2$  on  $\lambda$ . Therefore the theoretical prediction is in good agreement with the experimental stability curve of the figure 3(b).

Some works have shown that an effective surface tension exists between miscible fluids as water and glycerin [8]. This surface tension is due to the large concentration gradient at the interface. This should be present in our experiment but its order of magnitude is too small to have a significant influence. To complete our study of miscible fluids, a similar experiment, in which the forcing is vertical, is going to be performed in our laboratory.

## Instabilités à l'interface entre fluides miscibles par forçage oscillant horizontal

### 1. Introduction

De nombreux travaux théoriques et expérimentaux étudiant le forçage sinusoïdal et vertical de deux liquides superposés dans une cuve ont été réalisés au cours des deux dernières décennies [1, 2] aboutissant à une compréhension approfondie de l'instabilité de Faraday. L'expérience similaire, mais pour laquelle l'excitation est horizontale, a fait l'objet de nombreuses études théoriques [3, 4] mais, paradoxalement, d'assez peu d'études expérimentales (le cas d'un mélange diphasique au voisinage du point critique a été étudié dans [5], celui d'un mélange eau/granulaire dans [6]). L'objet de cet article est de présenter quelques résultats expérimentaux concernant l'effet de vibrations horizontales sur l'interface entre deux fluides miscibles. Nous expliquerons l'origine physique de l'instabilité et relierons, dans le cas particulier de fluides miscibles, la courbe de stabilité marginale obtenue aux prévisions théoriques de Lyubimov et Cherepanov [4].

### 2. Montage expérimental

Deux fluides miscibles sont placés dans une cuve de 20 cm de longueur, de 2 cm de largeur et de 3 cm de hauteur. La cuve est soumise à des vibrations horizontales et quasi-sinusoïdales. Pour cela, la cuve, fixée à deux rails horizontaux, est reliée à un moteur par l'intermédiaire d'une bielle (figure 1(a)). Pour des amplitudes d'excitation petites devant la longueur de la bielle, les vibrations peuvent être considérées comme sinusoïdales. La position de la cuve est donc  $x(t) = a \cos(\omega t)$  où  $a$  est l'amplitude et  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  est la fréquence. Les deux fluides utilisés, eau et glycérine, sont placés très précautionneusement l'un sur l'autre dans la configuration gravitationnelle stable : la glycérine plus dense est sous l'eau. Comme ils diffusent très lentement, on peut, dans la limite des temps relativement courts (de l'ordre de l'heure), définir une interface fine.

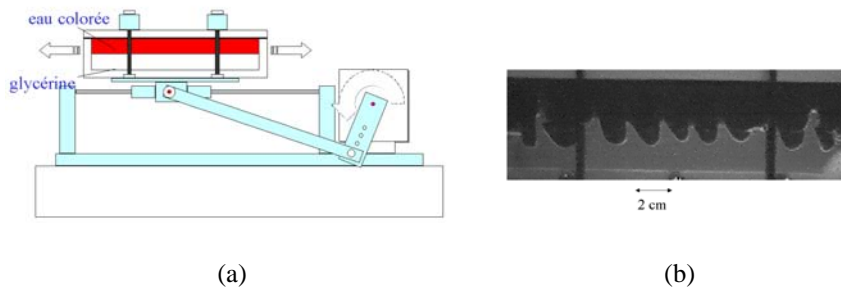


FIG. 1 – Schéma du montage expérimental (a) et visualisation du relief de l'interface (b)

Quand on soumet à des vibrations la cuve fermée contenant, en quantités égales, eau et glycérol, on peut observer pour une amplitude donnée, une instabilité d'interface, à partir d'une fréquence seuil. Cette instabilité se développe et prend la forme d'un relief stationnaire dans le référentiel non galiléen de la cuve (on parle aussi "d'ondes gelées"). Ce relief possède une périodicité spatiale relativement bien définie. Nous appellerons par abus de langage cette périodicité "longueur d'onde". Celle-ci croît avec l'amplitude d'excitation  $a$ . Si on augmente l'excitation, les ondes se brouillent au bout de quelques dizaines de secondes à cause du mélange. La figure 1(b) montre un exemple d'instabilité observée.

Pour mesurer cette longueur d'onde, on se place dans le régime de stabilité linéaire, c'est-à-dire au voisinage du seuil de l'instabilité (dès que le relief est visible). Il est important de souligner que ce que l'on appelle ici "seuil" est de nature expérimentale : c'est en fait l'apparition du relief quand, pour une amplitude d'excitation fixée, on augmente progressivement et continuellement la fréquence d'excitation. Comme nous parvenons à détecter des amplitudes d'onde de l'ordre de la centaine de microns, nous pouvons considérer

que l'on se trouve au voisinage du seuil quand nous commençons à voir le relief. On détermine la longueur d'onde de l'instabilité en moyennant les longueurs d'onde observées. La dispersion des longueurs d'onde étant généralement faible (de l'ordre de 10%), cette méthode semble pertinente.

### 3. Interprétation physique

Les deux fluides sont soumis, dans le référentiel non galiléen de la cuve, à la même accélération  $a\omega^2 \cos(\omega t)$ . Comme ils sont de densités différentes, ils sont soumis à une force d'entraînement différente, qui sera plus grande pour la glycérine que pour l'eau. On comprend donc que les vitesses des deux fluides vont être différentes et, dans le référentiel de la cuve, opposées puisqu'il y a conservation du débit. Il en résulte un cisaillement sinusoïdal entre les deux fluides. Si les volumes occupés par les deux fluides sont égaux, on montre (par exemple [3]) que le cisaillement est :

$$\Delta U = 2a\omega \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \sin(\omega t)$$

Des mesures du champ de vitesse par PIV (Particle Image Velocimetry) ont confirmé quantitativement cette relation (voir figure 3(a)).

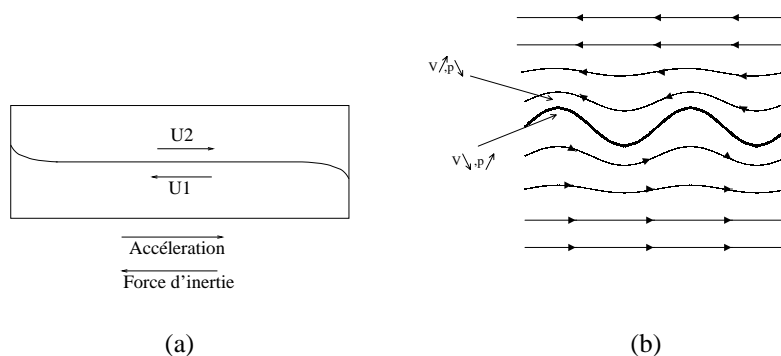


FIG. 2 – Origine du cisaillement (a) et mécanisme physique de l'instabilité (b)

Comme pour l'instabilité de Kelvin-Helmoltz, le cisaillement est responsable de la croissance de l'instabilité par un mécanisme de type Bernoulli. A un instant donné, une perturbation de l'interface va resserrer les lignes de courant d'un côté de l'interface et les desserrer de l'autre puisque le débit se conserve (voir figure 2 (b)). La perturbation va s'amplifier car on a, le long d'une ligne de courant, d'après le théorème de Bernoulli :  $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = cte$  et la pression locale diminue d'un côté de l'interface et augmente de l'autre, dans le sens d'une amplification de la déformation. Nous allons de plus considérer que le temps caractéristique de l'évolution de l'interface est très grand devant celui caractérisant l'excitation (c'est à dire  $\frac{2\pi}{\omega}$ ). Or, c'est le cisaillement au carré qui provoque la perturbation et qui reste le même quel que soit le sens relatif de déplacement des deux couches. C'est, dans notre cas, la valeur moyenne sur une période du cisaillement au carré qui est donc à l'origine du gradient de pression qui déforme l'interface. Le cisaillement oscillant joue donc le même rôle que le cisaillement "classique" de Kelvin-Helmoltz et le paramètre de contrôle de l'instabilité est :

$$\langle \Delta U^2 \rangle = 2(a\omega)^2 \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right)^2$$

## Instabilités à l'interface entre fluides miscibles par forçage oscillant horizontal

### 4. Résultats

Nous venons de voir que le paramètre pertinent pour caractériser l'instabilité est le produit  $\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} (a\omega)_s$ . On peut alors déterminer la courbe de la figure 3 (b).

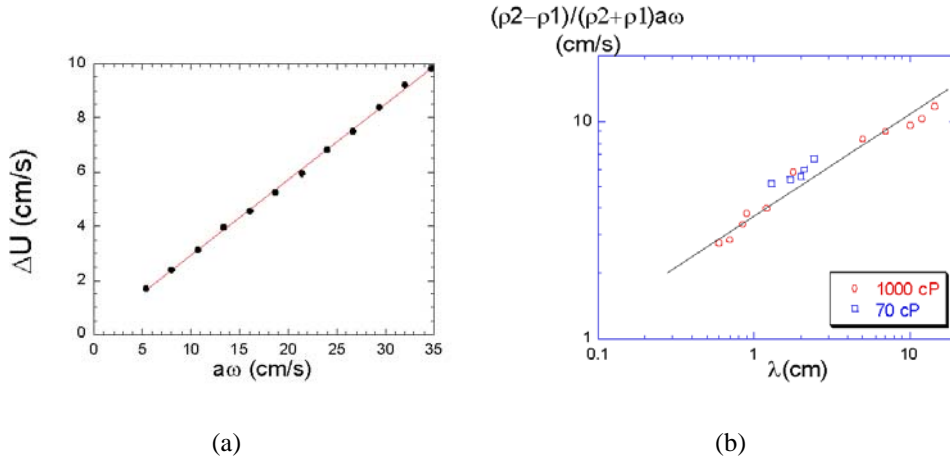


FIG. 3 – Variation du cisaillement avec  $a\omega$  (a) et courbe de stabilité marginale (b)

Cette courbe a été réalisée avec de la glycérine pure de viscosité 1000 cP et de la glycérine diluée à 83%, de viscosité 70 cP. Il y a peu de mesures concernant la glycérine diluée car à amplitude trop forte les deux liquides se mélangent rapidement (avant apparition de l'instabilité) et à amplitude trop faible, la fréquence d'excitation à atteindre est trop grande pour notre système ; la plage d'ondes observées est donc assez étroite. Il semble en tout cas que la viscosité de la glycérine ne joue pas un rôle important dans cette instabilité. En représentation log-log, les points s'alignent sur une droite de pente 0.5 ; cela signifie que  $(a\omega_s)^2$  varie linéairement avec la longueur d'onde  $\lambda$ .

### 5. Comparaison avec un modèle théorique

Une modélisation théorique de ce problème faiblement non-linéaire, dans le cas de fluides non visqueux et non miscibles, a été proposée par Lyubimov et Cherepanov [4]. Ce modèle, fondé sur un développement en échelles multiples, conduit à l'équation de la courbe de stabilité marginale :

$$(a\omega)_s^2 = \frac{(a\omega)_0^2}{2} \left( \frac{\lambda}{\lambda_c} + \frac{\lambda_c}{\lambda} \right) \tanh \left( \frac{2\pi h}{\lambda} \right)$$

$$\text{où } \lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{(\rho_2 - \rho_1)g}} \quad \text{et} \quad (a\omega)_0^2 = \frac{(\rho_1 + \rho_2)^3}{\rho_1 \rho_2^2 (\rho_2 - \rho_1)} \sqrt{\frac{\gamma g}{\rho_2 - \rho_1}}$$

Puisque les fluides sont miscibles, il n'y a pas de tension de surface et seule la gravité stabilise l'interface. L'équation de la courbe de stabilité marginale prévoit alors, pour une tension de surface  $\gamma$  nulle, une hauteur de fluide  $h$  plus grande que la longueur d'onde et des fluides non visqueux, une variation linéaire du paramètre de contrôle au carré  $(a\omega)^2$  avec la longueur d'onde  $\lambda$ . Ceci est en accord avec la courbe expérimentale (voir figure 3 (b)). Notons que l'approximation de fluides non visqueux peut paraître grossière puisque l'on utilise de la glycérine (de viscosité 1000 cP) mais la viscosité de cette dernière ne semble pas être déterminante concernant le seuil d'apparition de l'instabilité. Le mécanisme physique non visqueux de type Bernoulli semble particulièrement robuste pour expliquer cette instabilité.

## 6. Tension de surface effective entre fluides miscibles

Korteweg en 1901 a été le premier à proposer qu'il existait une tension de surface effective entre fluides miscibles. En effet, la définition microscopique de la tension de surface est (voir par exemple [7]) :

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \left( \frac{dC}{dn} \right)^2 dn$$

où  $n$  est la direction normale à l'interface,  $C$  la concentration et  $\alpha$  une constante qui dépend uniquement des espèces chimiques en contact. Comme il existe une région entre les deux fluides miscibles dans laquelle le gradient de concentration est important, on peut postuler l'existence d'une tension de surface entre fluides miscibles. Il va de soit qu'il s'agit d'une grandeur hors-équilibre et qui tend vers zéro aux temps longs à cause de la diffusion. Petitjeans a réussi à mesurer une telle tension de surface effective par la méthode de la goutte tournante [8] en utilisant deux fluides peu diffusifs, l'eau et la glycérine et en limitant les mesures aux temps courts.

Etant données les prédictions théoriques de Lyubimov [4], on pouvait s'attendre à voir l'effet stabilisant de la tension de surface effective dans l'instabilité décrite dans cet article. Cet effet aurait été traduit par l'existence d'un minimum dans la courbe de stabilité marginale correspondant à la longueur d'onde capillaire effective :

$$\lambda_{eff} = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma_{eff}}{\Delta\rho g}}$$

Ce minimum n'a pas pu être mis en évidence car la tension de surface effective entre fluides miscibles est ici trop faible pour jouer un rôle stabilisant important ; seule la gravité est stabilisante. La courbe de stabilité expérimentale montre que si un minimum existe, il correspond à une longueur d'onde inférieure à  $1\text{ mm}$ , c'est-à-dire que la tension de surface effective serait inférieure à  $0.02\text{ mJ/m}^2$ .

## 7. Conclusion

L'origine de l'instabilité observée est clairement due au cisaillement entre les deux fluides miscibles par un mécanisme de type "Kelvin-Helmoltz oscillant". La courbe de stabilité marginale confirme le mécanisme physique invoquée et la prédiction théorique de [4]. Dans les régimes que l'on a pu observer, la tension de surface entre fluides miscibles ne joue pas de rôle prépondérant. Pour compléter notre étude et pour éventuellement mettre en évidence une tension de surface effective, l'effet des vibrations verticales sur l'interface entre fluides miscibles est actuellement en cours d'étude au laboratoire.

**Remerciements.** Les auteurs remercient Farzam Zouesthiagh et Régis Wunnenburger pour leurs contributions à ce travail.

## Références bibliographiques

- [1] W. S. Edwards and S. Fauve, Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment, JFM, 278 (1994), 123
- [2] S. Fauve, K. Umar, C. Laroche, D. Beysens and Y. Garrabos, Parametric instability of a liquid-vapor interface close to the critical point, PRL, 68 (1992), 3160
- [3] M.V. Khenner, D.V. Lyubimov, T.S. Belozerova and B. Roux, Stability of plane-parallel vibrational flow in a two-layer system, Eur. J. Mech, 18 (1999), 1085-1101
- [4] D. V. Lyubimov and A. A. Cherepanov, Development of a steady relief at the interface of fluids in a vibrational field, Fluid dynamics(USSR), 86 (1987), 849-854
- [5] R. Wunnenburger, P. Evesque, C. Chabot, Y. Garrabos, S. Fauve and D. Beysens, Frozen wave induced by high frequency horizontal vibrations on a CO<sub>2</sub> gas-liquid interface near the critical point, PRE, 96 (1999), 4100-4103
- [6] A. Ivanova, V. Kozlov and P. Evesque, Patterning of "liquefied" sand surface in a cylinder filled with liquid and subjected to horizontal vibrations Europhysics. Lett., 35 (1996), 159-164
- [7] Y. Rocard, Thermodynamique, Masson, 1967
- [8] P. Petitjeans, A surface tension for miscible fluids, C. R. Acad. Sc. Paris, 322 (1996), 673-680