

Instabilité gravitationnelle entre fluides miscibles dans une cellule de Hele-Shaw : des petits aux grands nombres de Péclet

P. Kurowski, J. Fernandez, L. Limat et P. Petitjeans

Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes, UMR 7636, École Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de la Ville de Paris, 10 rue Vauquelin, 75231 Paris, France

Résumé: Nous avons analysé la stabilité linéaire d'une interface entre deux fluides miscibles gravitationnellement instable dans une géométrie de type Hele-Shaw. Le modèle utilise une équation de Brinkman modifiée qui décrit l'écoulement à la fois dans le régime de Darcy et dans le régime de Stokes. Nous mettons en évidence un comportement non trivial de la longueur d'onde λ et du taux de croissance σ le plus instable à très grand nombre de Péclet, quand la diffusion moléculaire devient négligeable. En particulier, la longueur d'onde adimensionnée par l'épaisseur b de la cellule reste constante au-delà de $Pe \sim 100$. Les solutions théoriques de λ et σ sont comparées avec de récents résultats expérimentaux pour une gamme de Pe couvrant plus de quatre ordres de grandeur : un excellent accord est observé en particulier pour les fluides visqueux.

1. INTRODUCTION

Lorsqu'un fluide lourd est placé au-dessus d'un fluide plus léger, l'interface se déstabilise par gravité en formant des structures quasi-périodiques dont la taille caractéristique résulte aux temps courts de la compétition entre l'effet stabilisant de la tension de surface et déstabilisant de la gravité. Cette instabilité, appelée communément instabilité de Rayleigh-Taylor [1, 2], est à l'origine de plusieurs phénomènes physiques couvrant différentes disciplines, comme la géologie (formation de dômes de sel lorsque des couches peu denses de sel montent jusqu'à la surface du sol [3]), la physique nucléaire (fusion par confinement inertiel [4]), etc... Elle a donné lieu à de nombreuses applications dans des domaines aussi variés que l'industrie chimique [5, 6], pétrolière (milieu poreux) et de façon plus générale la mécanique des fluides.

L'étude que nous avons entreprise est l'extension de cette instabilité gravitationnelle aux cas de deux fluides miscibles dans une cellule de Hele-Shaw, qui modélise un milieu poreux idéal. La complexité du problème vient du fait que les phénomènes associés aux processus de diffusion ne sont jamais stationnaires mais évoluent dans le temps aussi longtemps qu'il existe un gradient de concentration non nul entre les fluides. Les études expérimentales ont montré que le nombre de Péclet, nombre sans dimension qui traduit l'importance relative du transport de masse par advection et du transport de masse par diffusion représente le paramètre pertinent pour nos expériences. Quand la diffusion moléculaire domine, la longueur d'onde typique adimensionnée par l'épaisseur de la cellule, varie comme Pe^{-1} tandis que dans l'autre limite, elle tend vers une constante de l'ordre de 5 au-delà de $Pe \approx 100$. Le premier régime a fait l'objet de nombreux travaux théoriques [7, 8, 9, 10] et est maintenant bien compris; le comportement de la longueur d'onde dominante dans le deuxième régime (grands Péclet) n'est pas, à notre sens, expliqué de manière satisfaisante. Nous proposons ci-dessous un nouveau modèle dans la limite des très bas nombre de Reynolds, qui permet d'expliquer le comportement, à la fois de la longueur d'onde et du taux de croissance, des petits aux très grands nombres de Péclet.

2. ANALYSE DE STABILITE LINEAIRE (MODELE DE BRINKMAN)

On considère un système composé de deux couches de fluides miscibles, de différentes densités mais de viscosités identiques dans une cellule de Hele-Shaw d'épaisseur b . Au temps initial les deux couches de fluides sont mises en contact sans vitesse relative, la déformation de l'interface étant uniquement due au contraste de densité entre les fluides ($\rho_1 > \rho_2$). L'accélération de la pesanteur g est parallèle à l'axe z , dirigée vers le bas (Fig. 1). L'épaisseur couches de fluides est supposée infinie devant la taille caractéristique de l'instabilité.

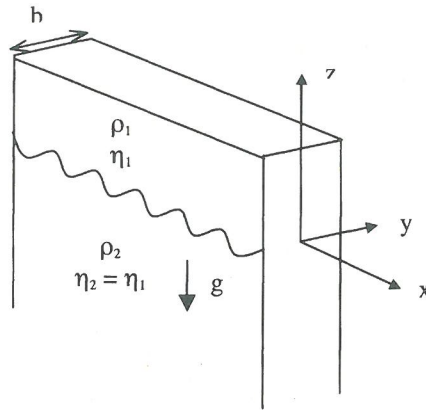


Figure 1. Représentation schématique de la cellule de Hele-Shaw.

2.1 Modèle de Brinkman

Dans le cadre d'une analyse de stabilité linéaire et dans la limite des petits nombres de Reynolds, le champ de vitesse obéit à l'équation de Stokes tridimensionnelle.

Notre calcul de stabilité linéaire est basé sur l'hypothèse suivante : si \mathbf{U} est le champ de vitesse de l'écoulement, on découple \mathbf{U} en un champ de vitesse dans le plan d'écoulement (x, z) et en un champ de vitesse parabolique suivant y : $\mathbf{U}(x, y, z, t) = \mathbf{U}_1(x, z, t)F_p(y)$. La fonction $F_p(y)$ satisfaisant la condition de non-glissement aux parois, $F_p(y=\pm b/2)=0$, est donnée par le profil de vitesse de Poiseuille :

$$F_p(y) = \frac{3}{2} \langle F_p \rangle_y \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right) \quad \text{avec} \quad \langle F_p \rangle_y = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} F_p(y) dy.$$

L'équation du mouvement est alors obtenue en moyennant l'équation de Stokes sur l'épaisseur de la cellule :

$$\nabla p = \eta \Delta_{x,z} \mathbf{U} - \frac{12\eta}{b^2} \mathbf{U} + \rho \mathbf{g} \quad (1)$$

où $p(x, z, y)$ et $\rho(x, z, t)$ sont respectivement les champs de pression et de densité, η la viscosité dynamique, $\mathbf{U}(u, w)$ est le champ de vitesse moyenné dans l'épaisseur, et $\Delta_{x,z} = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2)$ l'opérateur Laplacien agissant dans le plan (x, z) .

Cette équation, souvent appelée équation de Brinkman dans la littérature [11], a été établie pour un écoulement stationnaire dans un milieu poreux de grande porosité. Quand b est beaucoup plus petit que λ , l'équation (1) se réduit à l'équation de Darcy et dans le cas contraire elle représente un écoulement de Stokes dans le plan (x, z) .

Les fluides sont supposés incompressibles :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2)$$

Les équations (1,2) doivent être complétées par l'équation de convection-diffusion :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) c = \Delta c \quad (3)$$

$$\rho = \rho_2 + \Delta \rho c \quad (4)$$

où $c(x,z,t)$ est la concentration local du fluide, D le coefficient de diffusion moléculaire et $\Delta\rho = (\rho_1 - \rho_2)$ le contraste de densité, supposé très petit par rapport à ρ_1 .

2.2 Relation de dispersion : des petits aux grands nombres de Péclet

A l'état initial, l'interface est plane et les fluides sont au repos. L'état de base pour les champs de vitesse, de pression et de concentration est alors défini par :

$$U_0 = 0 \tag{5}$$

$$\nabla p_0 = [\rho_2 + \Delta\rho c_0(z,t)]g \tag{6}$$

$$c_0 = 1/2[1 + \text{erf}(z/\sqrt{Dt})] \tag{7}$$

où erf représente la fonction erreur. On note $[p', u, w, c'](x,z,t)$ les perturbations infinitésimales des champs de pression, vitesses et concentration que l'on développe en modes normaux : $[p', u, w, c'] = [p_1(z), u_1(z), w_1(z), c_1(z)] \exp(ikx + \sigma(t)t)$ où $\sigma(t)$ représente le taux de croissance de l'instabilité et k le vecteur d'onde. On fait l'hypothèse que σ varie très lentement avec le temps (approximation d'état quasi-stationnaire $\sigma = \sigma(t_0)$) et que par conséquent, le problème peut être traité au temps initial $t_0 = 0$. Par simple calcul algébrique et en utilisant la condition d'incompressibilité (2), les équations (1,3) se ramènent à deux équations couplées des seules variables w_1 et c_1 :

$$\eta[\partial^2/\partial z^2 - k^2][12/b^2 - (\partial^2/\partial z^2 - k^2)]w_1(z) = \Delta\rho g k^2 c_1(z) \tag{8}$$

$$[\sigma - D(\partial^2/\partial z^2 - k^2)]c_1(z) = -\partial c_0/\partial z w_1(z) \tag{9}$$

A l'instant initial, le profil c_0 est une fonction escalier vérifiant $\partial c_0/\partial z = \delta(z)$ où δ est la fonction de Dirac. En appliquant l'opérateur $[\sigma - D(\partial^2/\partial z^2 - k^2)]$ à (8), on obtient une équation différentielle unique d'ordre 6 pour l'amplitude w_1 :

$$\eta[\sigma - D(\partial^2/\partial z^2 - k^2)][\partial^2/\partial z^2 - k^2][12/b^2 - (\partial^2/\partial z^2 - k^2)]w_1(z) = -\Delta\rho g k^2 \delta(z) \tag{10}$$

En dehors de l'interface, $\delta(z) = 0$, la solution de (10) s'écrit alors :

$$w_1^\pm = A^\pm \exp\mp kz + B^\pm \exp\mp lz + C^\pm \exp\mp \xi z \text{ avec } l = (k^2 + \frac{\sigma}{D})^{1/2} \text{ et } \xi = (k^2 + \frac{\sigma}{v} + \frac{12}{b^2})^{1/2}$$

Les signes + et - correspondent aux régions $z > 0$ et $z < 0$. Cinq de ces six constantes peuvent s'exprimer en fonction de A^- par exemple en utilisant les cinq conditions aux limites à l'interface $z = 0$: continuité de la contrainte normale et tangentielle, de la concentration et de la vitesse normale et tangentielle u et w . Ces cinq conditions aux limites sont en fait équivalentes à écrire la continuité de w et de ses dérivées successives jusqu'à l'ordre 4. Le résultat du calcul algébrique donne pour les constantes exprimées en fonction de k, l et ξ :

$$A^+ = A^-, B^+ = B^- = -\frac{k}{l} \frac{\xi^2 - k^2}{\xi^2 - l^2} \quad A^-, C^+ = C^- = -\frac{k}{\xi} \frac{l^2 - k^2}{l^2 - \xi^2} A^-$$

La relation de dispersion est obtenue en intégrant (10) de $-\epsilon$ à $+\epsilon$ de part et d'autre de l'interface et en faisant tendre ϵ vers zéro :

$$\eta D \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\partial^6 w_1}{\partial z^6} dz = -\Delta \rho g k^2 w_1(0)$$

soit,

$$2\eta D(k^5 A^- + l^5 B^- + \xi^5 C^-) = \Delta \rho g k^2 (A^- + B^- + C^-) \quad (11)$$

En remplaçant les constantes d'intégration par leur valeur, la relation de dispersion se met finalement sous la forme implicite :

$$\Sigma = \frac{12}{Pe} + \frac{q}{2} \left[1 - \frac{q}{\sqrt{12+q^2}} \right] - \frac{6q}{Pe \Sigma} \left[1 - \frac{q}{\sqrt{Pe \Sigma + q^2}} \right] \quad (12)$$

où le nombre de Péclet $Pe = \frac{b}{D} U^*$ est défini à partir d'une vitesse caractéristique $U^* = \Delta \rho b^2 / 12\eta$ et où

nous avons introduit le vecteur d'onde et le taux de croissance réduits $q = bk$ et $\Sigma = \frac{12\eta}{\Delta \rho g b} \sigma$. L'équation

(12) qui peut se mettre sous la forme d'un polynôme du 5^{ème} degré a été résolue numériquement pour une large gamme de Péclet. La relation de dispersion $\Sigma(q)$ qui correspond à une solution réelle et qui présente un maximum est représentée figure 2 pour quatre valeurs de Pe (1, 10, 10^2 et 10^4). La courbe en trait

continu représente la limite asymptotique $\Sigma_{Pe \rightarrow \infty} = \frac{q}{2} \left[1 - \frac{q}{\sqrt{12+q^2}} \right]$. Le vecteur d'onde correspondant au

mode le plus instable croît quand Pe augmente car la diffusion moléculaire qui stabilise les grands vecteurs d'onde (petites longueurs d'onde) sera de plus en plus inopérante au grands nombres de Pe .

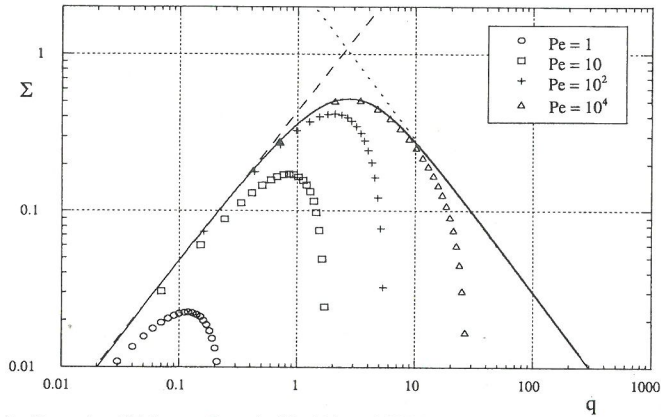


Figure 2. Relation de dispersion $\Sigma(q)$ pour $Pe = 1, 10, 100$, et 10000 .

Dans le cas particulier où $Pe \ll 1$, l'équation (12) se réduit à la relation de dispersion caractéristique du régime de Darcy :

$$\Sigma = \frac{1}{2} \left(q - Pe^{-1} q^2 - Pe^{-1} q \sqrt{q^2 + 2Peq} \right) \quad (13)$$

$\Sigma(q)$ présente un maximum, puis s'annule pour une fréquence de coupure $q_c = Pe/4$ au-delà de laquelle le système est stable. Les modes les plus instables q_m et Σ_m se déduisent aisément de l'équation

(13) : $q_m = \frac{\sqrt{5}-2}{2} Pe$ ou $\frac{\lambda_c}{b} = \frac{4\pi}{\sqrt{5}-2} Pe^{-1}$ et $\Sigma_m = \frac{(\sqrt{5}-2)(3-\sqrt{5})}{8} Pe$. Ce résultat est bien connu : pour de

petits nombres de Péclet, la diffusion est dominante et tend à détruire les structures de petites tailles. Cet effet sera d'autant plus important que Pe est petit.

3. COMPARAISON ENTRE LA THEORIE LINEAIRE ET LES EXPERIENCES EN CELLULE DE HELE-SHAW

3.1 Montage expérimental et paramètres de contrôle

Les expériences sont réalisées dans une cellule de Hele-Shaw constituée de deux plaques de verre séparées par une feuille de mylar d'épaisseur calibrée. Les dimensions du montage sont de 60 cm de long dans la direction x et de 16 cm dans la direction z . Le canal hydrodynamique à l'intérieur de la cellule a été découpé dans la feuille de mylar munie de deux entrées et de deux sorties à chaque extrémité. Les deux fluides sont injectés simultanément par les deux entrées à la même vitesse, afin d'éliminer le cisaillement, au moyen d'une pompe à double seringues. Le plus lourd (densité ρ_1) est injecté par l'entrée supérieure, le plus léger (densité ρ_2) par l'entrée inférieure. Lorsque l'interface entre les deux fluides (de même épaisseur) est parfaitement plane et horizontale, l'écoulement est alors arrêté. Les deux fluides sont au repos et cet instant définit le temps initial dans nos expériences (pour une description plus complète du montage et de la procédure expérimentale, voir référence [12]). Le développement de l'instabilité et la position de l'interface est ensuite filmée par des caméras CCD, puis les images sont traitées et analysées sur ordinateur : la longueur d'onde λ de l'instabilité est alors déterminée à partir de la transformée de Fourier de l'interface (λ correspondant au mode principal). Le taux de croissance σ est déterminé à partir de l'analyse du diagramme spatio-temporel de l'interface [13].

Les deux fluides utilisés sont identiques, soit de l'eau ultra pure, soit un mélange d'eau et de glycérine. Le contraste de densité entre les fluides est simplement obtenu par l'ajout d'une très faible quantité de colorant (rouge d'amarante) dans l'un des fluides. Le pourcentage massique de colorant ajouté étant très faible, on considère que l'ajout de colorant ne change ni la viscosité des fluides ni le volume du mélange. Les expériences ont été effectuées en faisant varier le contraste de densité $\Delta\rho/\rho$, de $3 \cdot 10^{-3}$ à 10^{-1} , l'épaisseur b de la cellule de $50 \mu\text{m}$ à 1 mm et en utilisant trois viscosités différentes $\eta = 1, 20$ et 50 cP .

3.2 Longueur d'onde et taux de croissance

Nous avons représenté figure 3 et figure 4 la variation expérimentale en fonction du nombre de Péclet de la longueur d'onde et du taux de croissance adimensionnés correspondant aux modes les plus instables. Nous avons également porté sur les mêmes figures (en trait plein) les valeurs théoriques de ces deux modes les plus instables issues de l'analyse de stabilité linéaire.

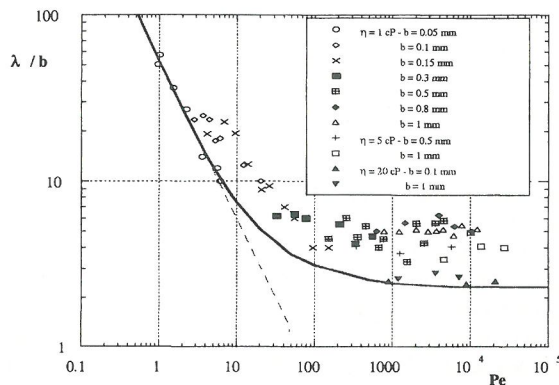


Figure 3. Variation de la longueur d'onde adimensionnée par l'épaisseur b en fonction du nombre de Péclet Pe .

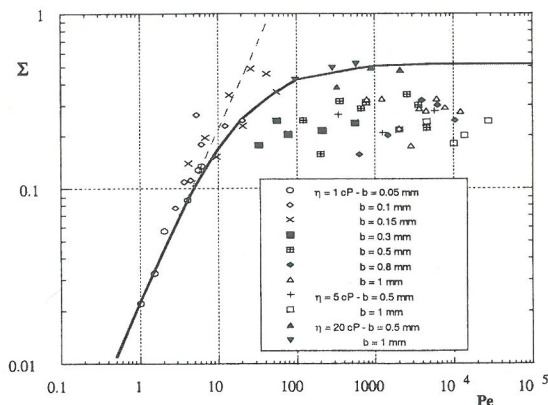


Figure 4. Variation du taux de croissance Σ en fonction du nombre de Péclet P_e .

On observe expérimentalement deux régimes :

- Un régime à très petit Pe (régime diffusif), typiquement $P_e \leq 10$. Le temps caractéristique d'apparition de l'instabilité est alors très grand (de l'ordre de quelques minutes) devant le temps b^2/D mis par le colorant pour diffuser sur l'épaisseur b (de l'ordre de la seconde). Dans ce régime, λ/b et Σ varient respectivement comme P_e^{-1} et P_e . Cette variation est en excellent accord avec les courbes théoriques. λ/b variant comme P_e^{-1} signifie encore que la longueur d'onde λ dans le régime diffusif est sélectionnée par la longueur de diffusion, définie comme $l_d = D/U^*$. Les expressions théoriques de λ/b et de Σ ne dépendent dans ce régime que du nombre de P_e et par conséquent du coefficient de diffusion D . Celui-ci est de l'ordre de $10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ pour les fluides usuels, mais nous ne connaissons pas sa valeur précise. Il devient pour nous un paramètre ajustable. Une valeur de $2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$ permet de regrouper sur la même courbe les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques (figure 5).

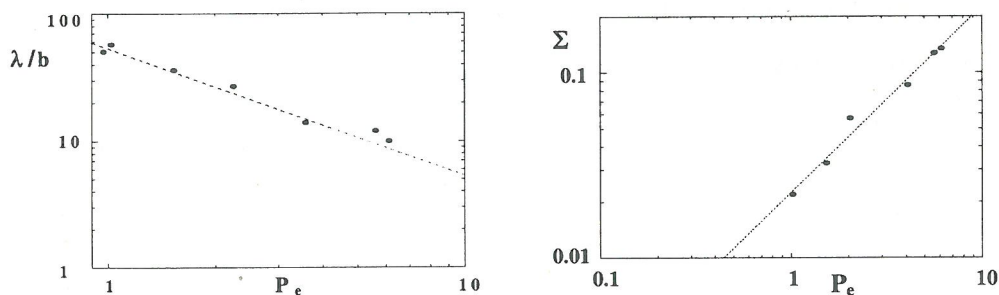


Figure 5. λ/b et Σ en fonction de P_e : l'ajustement entre les prédictions théoriques (courbes en pointillés) et les mesures expérimentales détermine la valeur de $D = 2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$

- Un régime asymptotique à très grand Pe (régime convectif), typiquement $P_e > 100$. Le temps caractéristique d'apparition de l'instabilité est alors très petit devant le temps b^2/D . On observe une saturation de la longueur d'onde et du taux de croissance réduits ($\lambda/b \sim 5$ et $\Sigma \sim 0.3$ lorsque les fluides utilisés sont de l'eau). La longueur d'onde dominante n'est plus fixée par le nombre de Péclet mais par l'épaisseur b . C'est la première fois qu'une telle saturation est observée dans le cadre d'une instabilité de Rayleigh-Taylor. Comme on peut le voir sur les figures 3 et 4, le modèle théorique rend parfaitement compte de la saturation des modes les plus instables à grand Péclet. Malgré tout, cette saturation à grand Péclet a déjà été observée dans d'autres expériences d'instabilités d'origine visqueuse entre fluides miscibles [14, 15], (instabilité de Saffman-Taylor). Toutes ces mesures mettaient en évidence une déviation à la loi de Darcy, mais à notre sens, sans véritable justification physique ou théorique.

Malgré tout, on remarque que les valeurs des deux asymptotes théoriques, $\lambda/b = 2.3$ et $\Sigma = 0.5$, sont très proches de celles obtenues pour les fluides les plus visqueux (20 cP) tandis qu'elles sont environ

deux fois plus petites dans le cas de l'eau (1 cP). Ce résultat n'est pas étonnant en soi puisque le modèle repose sur le choix d'un profil de Poiseuille dans l'épaisseur. Or le temps d'établissement d'un profil de Poiseuille sera d'autant plus petit que la viscosité est grande. Si on estime ce temps par le temps de diffusion de la vorticité sur l'épaisseur b , $t_v = b^2/\nu$ et qu'on le compare au temps caractéristique de convection $t_c = 12\eta/\Delta\rho gb$, le rapport des deux temps qui représente le nombre de Reynolds doit être très petit devant 1. Les données expérimentales à grand Péclet donnent successivement $R_e \sim 25$ pour $\eta = 1$ cP, $R_e \sim 0,5$ pour $\eta = 5$ cP et $R_e \sim 0,05$ pour $\eta = 20$ cP. On peut donc considérer que pour des fluides visqueux (20 cP dans nos expériences) l'hypothèse d'un profil parabolique dans l'épaisseur reste valable ; c'est la raison pour laquelle on observe un excellent accord pour la valeur de la saturation entre le modèle et les expériences.

Les courbes théoriques rendent également bien compte du passage progressif du régime diffusif au régime convectif sur quatre décades : $\lambda/b \sim P_e^\alpha$ (resp. $\Sigma \sim P_e^\beta$) où l'exposant α (resp. β) décroît continûment de 1, pour des petits P_e , à 0 pour des grands P_e .

4. CONCLUSION

L'analyse de stabilité linéaire que nous avons développée dans le cas d'une interface diffuse instable par gravité décrit bien le comportement de la longueur d'onde et du taux de croissance (les plus instables), quand le nombre de Péclet varie sur plus de quatre décades. Bien que restrictif, puisque ce modèle n'est valable que dans la limite où le nombre de Reynolds tend vers zéro, il rend compte notamment de la saturation observée de λ/b et de Σ à très grand Pe . Plus les fluides utilisés sont visqueux, plus la valeur de la saturation converge vers les valeurs théorique $\lambda/b = 2.3$ et $\Sigma = 0.5$. Au-delà d'une certaine épaisseur de la cellule, la dépendance temporelle du champ de vitesse doit être prise en compte et le modèle n'est plus valable. On sait que la longueur d'onde théorique varie comme $(\frac{\eta D}{\Delta\rho g})^{1/3}$ lorsque l'épaisseur de la cellule

devient infinie (écoulement de Stokes) [16, 17]. Il serait intéressant, d'un point de vue expérimental, de déterminer à partir de quelle valeur de l'épaisseur de la cellule b , le rapport λ/b cesse d'être constant. Autrement dit, la question est de savoir comment le système passe d'une configuration Darcy-Stokes à une configuration réellement tridimensionnelle. Ce challenge, tant expérimental que théorique, devra être relevé dans le futur.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier le CNES pour l'aide financière apportée à la réalisation de cette étude.

Références :

- [1] L.Rayleigh W.S, *Scientific Papers*, (1990) 200-207
- [2] Saffman P.G and Taylor G. I, *J. Fluid. Mech.*, **245** (1958) 312-329
- [3] Ribe N., *J. Fluid. Mech.*, **377** (1998) 27-45
- [4] Salvador P., *thèse ParisVII*, (2000)
- [5] Garik P. *et al*, *Phys. Rev. Lett.*, **236** (1992) 1606-1609
- [6] Seijo B. *et al*, *Int.J. Pharm.*, (1990) 1-7
- [7] Homsy G. M., *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **19** (1967) 271
- [8] Bacri J. C., *C. R. Acad. Sci.*, t. **314** (II) (1992) 139-144
- [9] Joseph D. D., *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **9** (1990) 565
- [10] Yorstos Y. C., *J. Phys. Condens. Matter*, **2** (1990) 443
- [11] Brinkman H. C., *Appl. Sci. Res.*, **A1** (1947) 27-34
- [12] Fernandez J., *thèse ParisVI*, (2000)
- [13] Fernandez J. *et al*, soumis à *J. Fluid. Mech.* (2000)
- [14] Paterson L., *Phys. Fluids*, **28**(1) (1985) 26-30
- [15] Lajeunesse E. *et al*, *Phys. Rev. Lett.*, **79**(26) (1997) 5254-5257
- [16] Kurowski P. *et al*, *Europhys. Lett.*, **29** (1995) 309-314
- [17] Authelin J. R. *et al*, *C. R. Acad. Sci.*, **317** (II) (1993) 1539-1541