TD6 : Traînée et portance

Hugo Delrieu*, Damien Toquer†, Mathilde Reyssat

11 avril 2025

1 Profondeur d'un plongeon

Dans cet exercice, on va essayer d'estimer la profondeur d'un bassin dans lequel saute un plongeur. On suppose que le plongeoir est à une hauteur $H = 10$ m du sol. On modélisera le plongeur par un cylindre de masse $m = 100$ kg et de surface $S = 0.1$ m^2.

1. Calculer la trajectoire du plongeur jusqu'à l'eau en l'absence de frottement avec l'air. En déduire la vitesse V_0 du plongeur lorsqu'il entre dans l'eau.

Solution: On note z la coordonnée du plongeur. On suppose aucune vitesse initiale $\dot{z}(t = 0) = 0$ et $z(t = 0) = H$. Dans ce cas, la trajectoire du plongeur est donnée par :

$$z(t) = H - g\frac{t^2}{2}. \tag{1}$$

Il atteint l'eau pour $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. À cet instant, sa vitesse est $V_0 = \sqrt{2gH} = 14$ m/s.

2. Estimer le nombre de Reynolds dans l'air et dans l'eau. En déduire l'expression de la force de frottement fluide dans chaque cas.

Solution: Dans cette géométrie, le nombre de Reynolds est donnée par :

$$\mathrm{R_e} = \frac{\rho V_0 \sqrt{S}}{\eta}. \tag{2}$$

Dans l'air, on a $\eta_{\mathrm{air}} \sim 10^{-5}$ kg/m/s et $\rho_{\mathrm{air}} \sim 1$ kg/m^3. On obtient $\mathrm{R_{e},}textair \sim 4.10^5$. Dans l'eau, on a $\eta_{\mathrm{eau}} \sim 10^{-3}$ kg/m/s et $\rho_{\mathrm{eau}} \sim 10^3$ kg/m^3. On obtient $\mathrm{R_{e,eau}} \sim 4.10^6$. Le frottement est donnée par une force de trainée dans les 2 cas :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho C_x S U \vec{U}. \tag{3}$$

3. On supposera que la coefficient de trainée du plongeur est $C_x = 0.7$. Justifier que dans l'air, les frottements de l'air sont bien négligeable devant le poids. Cela reste-t-il vrai dans l'eau ?

Solution: Dans l'air, le plongeur ressent une force de trainée d'au maximum $F_T \sim 7$ N. C'est négligeable par rapport à son poids $P = mg \sim 1000$ N. À l'entrée dans l'eau, la force de trainée est de $F_T \sim 7000$ N. Il faut aussi prendre que dans l'eau, la poussée d'Archimède compense le poids !

*hugo.delrieu@espci.fr
†damien.toquer@phys.ens.fr

4. Écrire l'équation du mouvement du plongeur dans l'eau dans les approximations appropriées. Résoudre cette équation et obtenir la profondeur du plongeur en fonction du temps. On introduira une longueur typique de pénétration l_p.

Solution: En négligeant le poids, et la poussée d'Archimède, on obtient :

$$m\ddot{z} = -\frac{1}{2}\rho C_x S \dot{z}^2 \implies \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2} = -\frac{1}{l_p}, \tag{4}$$

avec :

$$l_p = \frac{2m}{\rho C_x S} \sim 3 \text{ m}. \tag{5}$$

En intégrant une première fois cette équation, on obtient

$$\frac{1}{V_0} - \frac{1}{\dot{z}} = -\frac{t}{l_p} \implies \dot{z} = \frac{1}{\frac{1}{V_0} + \frac{t}{l_p}}. \tag{6}$$

On obtient finalement :

$$z = -l_p \ln\left(1 + V_0 \frac{t}{l_p}\right). \tag{7}$$

5. Réécrire la vitesse du plongeur dans l'eau en fonction de sa profondeur. Généralement, les piscines de plongeon ont une profondeur de 5 m. Est ce suffisant ici ? Aurait-on besoin d'augmenter la profondeur pour des compétitions de Red Bull cliff diving de 28 m de haut ?

Solution: On remarque que :

$$z = -l_p \ln\left(\frac{\dot{z}}{V_0}\right), \tag{8}$$

soit :

$$\dot{z} = V_0 e^{-\frac{z}{l_p}}. \tag{9}$$

Cette fonction décroît très rapidement sur une longueur caractéristique l_p. Remarquablement, l_p ne dépend pas de U_0. Donc même pour une hauteur de plongeoir beaucoup plus grande, un bassin de 5 m reste suffisant car $l_p = 3$ m.

2 Jeu de balles

Tous les jeux de balle sont caractérisés par des trajectoires en cloche. Dans le cas de la pétanque ou du basket-ball, la trajectoire de la balle est très proche d'une parabole. Dans le cas d'un volant de badminton, la trajectoire a plutôt une forme triangulaire qu'a décrit le mathématicien italien Niccolò Tartaglia (Fig1).

1. On projette la balle à une vitesse U_0 et un angle θ_0 avec l'horizontale. Quelle est la trajectoire de la balle en l'absence de frottement avec l'air ?

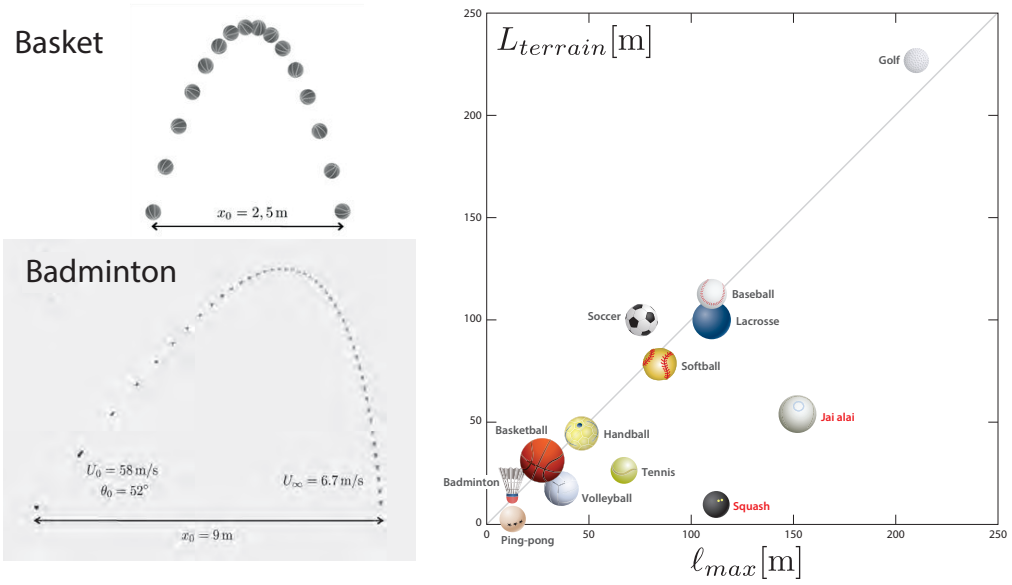

FIGURE 1 – Gauche : Chronophotographies de trajectoires de balles. Parabole décrite par un ballon de basket ($R = 12\,\mathrm{cm}$, $m = 650\,\mathrm{g}$, vitesse initiale $U_0 = 7\,\mathrm{m/s}$, angle initial $\theta_0 = 75°$. Forme triangulaire de type "Tartaglia" suivie par un volant de badminton ($R = 3\,\mathrm{cm}$, $m = 5\,\mathrm{g}$, vitesse initiale $U_0 = 58\,\mathrm{m/s}$, angle initial $\theta_0 = 52°$). Le pas de temps est de 100 ms sur la chronophotographie du basket et 50 ms sur la chronophotographie du badminton. Droite : Longueur des terrains de jeu utilisés dans différents sports en fonction de la distance $\ell_{max} = 2\pi R^2 \rho_f / m$ (pour info, le Jaï alaï est une forme de pelote basque). Données : Caroline Cohen & Baptiste Darbois-Texier.

Solution: En notant $\vec{e}_x$ l'axe horizontale et $\vec{e}_z$ l'axe verticale, orienté vers le haut, et en l'absence de force de trainée, on a :

$$\begin{cases} m\ddot{z} = -mg & \implies z(t) = -g\frac{t^2}{2} + U_0 \sin(\theta_0)t, \\ m\ddot{x} = 0 & \implies x(t) = U_0 \cos(\theta_0)t. \end{cases} \tag{10}$$

2. Estimer le nombre de Reynolds. En déduire l'expression de la force de frottement fluide. Pour quelle vitesse (dite terminale) U_∞ cette force équilibre le poids ?

Solution:

$$\mathrm{R_e} = \frac{\rho U_0 R}{\eta}, \tag{11}$$

avec $\eta_{\mathrm{air}} \sim 10^{-5}$ kg/m/s et $\rho_{\mathrm{air}} \sim 1$ kg/m^3. En utilisant $U_0 \sim 10$m/s et $R \sim 0.01$m, on obtient $\mathrm{R_e} \sim 10^5$. La force de frottement fluide est donnée par la force de trainée :

$$F = \frac{1}{2}\rho C_x \pi R^2 U^2. \tag{12}$$

Et on obtient finalement :

$$F(U_\infty) = mg \implies U_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{C_x \rho \pi R^2}}. \tag{13}$$

3. Décrire les trajectoires lorsque $U_0 \ll U_\infty$ et lorsque $U_0 \gg U_\infty$. Commenter le cas de la balle de basket et du volant de badminton.

> **Solution:** Si $U_0 \ll U_\infty$, la force de trainée reste négligeable comparée au poids, et on obtient une trajectoire parabolique. Pour le ballon de basket, $U_\infty \sim 24\text{m/s} > U_0$, on est bien dans ce régime. À l'inverse, si $U_0 \gg U_\infty$, la force de trainée va fortement ralentir la balle. On s'attend à retrouver une longueur caractéristique $l_{\max}$ comme à l'exercice précédent. Ensuite la gravité l'emporte, et la balle tombe tout droit. Pour le volant de badminton, $U_\infty = 8.4 > U_0$, on est bien dans ce régime.

4. Commenter la comparaison de la longueur d'arrêt l_{max} (longueur de pénétration définit à l'exercice précédent), avec la taille du terrain.

> **Solution:** l_{max} donne une bonne estimation de la distance maximum que peut parcourir une balle (pratiquement quelque soit sa vitesse initiale). On remarque que les terrains ne sont jamais beaucoup plus grand que cette longueur, en effet cela perdrait de son interêt s'il fallait 10 lancers de balle pour parcourir le terrain. Par contre, certains sports de rapidité utilisent des terrains petits devant $l_{\max}$.

3 Balistiques de spores

À une toute autre échelle, les champignons doivent libérer leurs spores afin de se disséminer. La plupart des espèces que l'on retrouve dans notre assiette ont développé une technique particulièrement astucieuse pour éjecter leurs spores du support sur lequel ils sont attachés : une catapulte capillaire !

Comment ça marche ? Le spore est initialement fixé sur une tige fragile. Une partie centrale du spore est recouverte d'une substance hydrophile sur laquelle un film d'eau se condense rapidement. Au pied du spore, une goutte de condensation se forme également sur un autre point hydrophile. La goutte croît progressivement et soudain touche le film (Fig2). La coalescence brutale de la goutte sur le film entraîne alors la rupture de la tige et l'éjection du spore.
Données numériques :
- masse du spore $m_S \sim 3.10^{-13}\,\text{kg}$,
- rayon du spore $R_S \sim 3\,\mu\text{m}$,
- masse de la goutte $m_D \sim 5.10^{-14}\,\text{kg}$,
- rayon de la goutte $R_D \sim 2.2\,\mu\text{m}$

1. Sachant que lors de la coalescence la goutte de rayon R_D s'étale dans le film déjà présent sur le spore, quel est le gain en énergie de surface ? En déduire une estimation de la vitesse d'éjection du spore. L'application numérique est-elle comparable à vitesse déduite des images de la vidéo ?

> **Solution:** Après coalescence, la surface du film est augmentée de la surface de la goutte, c'est-à-dire $4\pi R_D^2$. Le gain en énergie de surface est donc de l'ordre de $4\pi R_D^2 \gamma$.

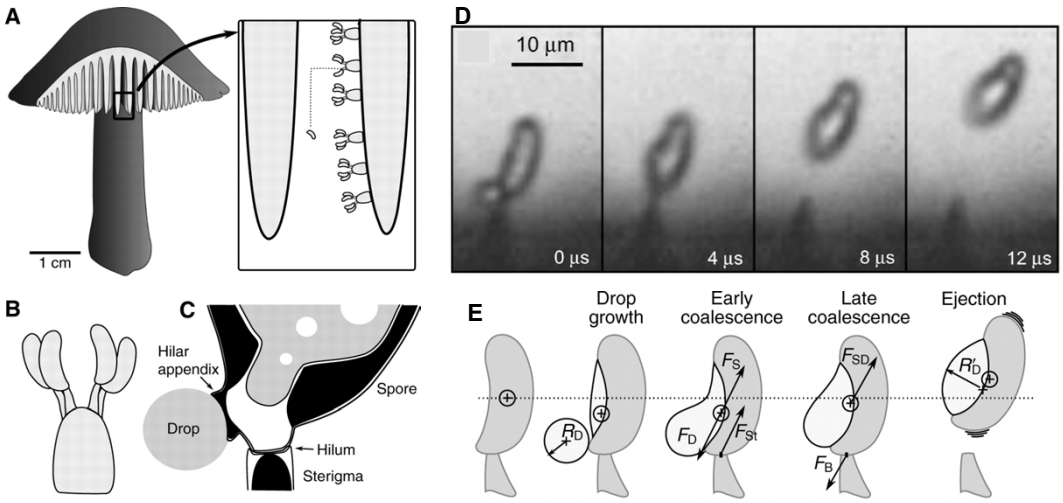

FIGURE 2 – Ejection de spores dans les champignons. Les spores initialement logés dans les lamelles du champignon doivent pouvoir s'éjecter afin de se disperser. Il utilisent pour cela un mécanisme de catapulte capillaire qui met en jeu la coalescence d'une goutte d'eau sur un film d'eau présent sur le spore. Seule une caméra ultrarapide a pu capturer la dynamique de cette éjection à 250 000 images/s (extrait de X.Noblin *et al.*, J. Experimental Biology, 212. 2835 (2009)).

Si on considère que toute cette énergie est convertie en énergie cinétique, on a :

$$E_\gamma \sim E_c$$
$$\Leftrightarrow 4\pi R_D^2 \sim \frac{1}{2}(m_S + m_D)U^2$$
$$\Rightarrow U \sim \sqrt{\frac{8\pi R_D^2 \gamma}{m_S + m_D}}$$
$$\Rightarrow U \overset{\text{A.N.}}{\sim} 5 \text{ m/s}$$

Sur les images, le spore parcourt une distance d'environ 10 μm en environ 8 μs, ce qui donne une vitesse de l'ordre de 1 m/s. On a donc légèrement surestimé la vitesse car on a négligé la perte d'énergie due à la rupture du pied et au léger gain de surface du film.

2. Écrire l'équation décrivant la dynamique du spore et en déduire la distance d'éjection par rapport à son point d'attache.

Solution: On calcule d'abord le nombre de Reynolds : $Re \sim 3.10^{-6}/1,4.10^{-5} \sim 0.2$ On est donc plutôt en régime de Stokes : $T = 6\pi\eta R_S U$ On a donc :

$$m_S \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -6\pi\eta R_S \mathbf{U} + m_S \mathbf{g} \tag{14}$$

Si on se contentente de la composante horizontale, on se retrouve avec :

$$\frac{dU_x}{dt} + \frac{6\pi\eta R_S}{m_S} U_x = 0$$

Ce qui conduit à :

$$U_x = U_{x0}\exp(-t/\tau) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m_S}{6\pi\eta R_S}$$

et donc :

$$x = \underbrace{\frac{m_S U_{x0}}{6\pi\eta R_S}}_{x_{max}}(1-\exp(-t/\tau)) \tag{15}$$

On obtient finalement $x_{max} = 368$ μm, ce qui est suffisant pour faire en sorte que le spore ne se recolle pas sur les lamelles du champignon.

4 Ça plane pour moi

Certains oiseaux marins comme les albatros sont d'excellents planeurs (Fig5). Néanmoins s'il n'a pas de moyen de se propulser, le planeur, aussi optimisé soit-il, finit inexorablement par rejoindre le sol.

1. En supposant que l'angle des ailes α soit idéalement ajusté et que la contribution des forces aérodynamiques sur le corps du planeur soient négligeables, quel est l'angle de chute β dans le cas le plus favorable pour l'aile illustrée en Figure 4 ?

Solution: En régime stationnaire, les forces de portance, traînée et poids s'équilibrent. En projection horizontale, on a :

$$F_p \sin\beta = T\cos\beta$$
$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{T}{F_p} = \frac{C_x}{C_p}$$

Sur la Figure 4, le cas idéal donne $C_p/C_x \sim 50$ et donc $\beta \sim 1,15°$.

2. En déduire la vitesse de translation et la vitesse de chute du planeur. Faire l'application numérique pour un planeur de masse 500 kg et une surface d'aile de 15 m^2.

Solution: On peut négliger la traînée sur la projection verticale, ce qui donne :

$$F_p \simeq mg$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho U^2 S C_p \simeq mg$$
$$\Rightarrow U \simeq \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_p}}$$

Avec $C_p \sim 0.6$, on a $U \sim 33$ m/s $= 120$ km/h. La vitesse de chute est $U_c = U\tan\beta \sim 0.7$ m/s.

3. Sachant qu'un planeur monte aux alentours de $h = 2000$ m d'altitude en plaine, quelle est la distance maximale qu'il peut parcourir ?

Solution: Dans une configuration optimale, le planneur pourra parcourir une distance $D = h\frac{U}{U_c} = h/\tan\beta = 99$ km. On peut remarquer que $\frac{h}{D} = \tan\beta = \frac{C_x}{C_p}$. Ce rapport est appelé "finesse" du planeur et donne la distance que peut parcourir le planeur en fonction de sa hauteur de départ, il caractérise donc sa qualité et est directement relié aux coefficients de traînée et de portance des ailes.

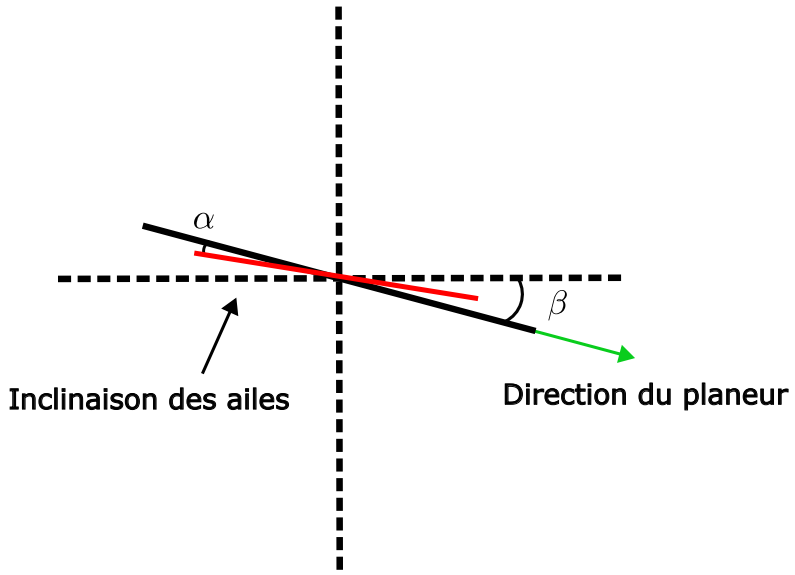

FIGURE 3 – Schéma du planeur

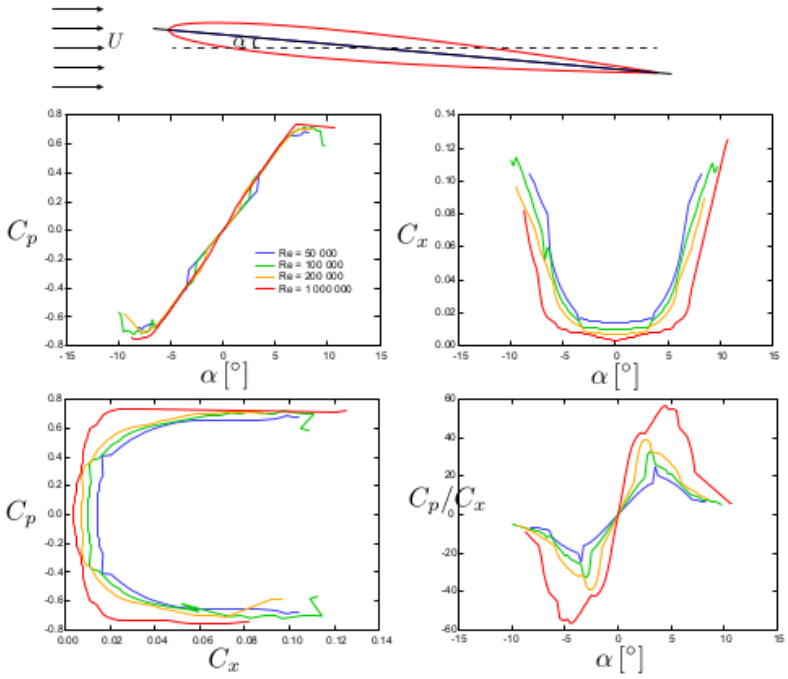

FIGURE 4 – Polaires obtenues numériquement pour un profil d'aile symétrique NACA-6 à différents nombres de Reynolds. On peut observer la linéarité de C_p avec α pour des incidences modérées et le décrochement au-delà d'un angle d'incidence supérieur à $7-8^o$. La symétrie de cette aile impose la symétrie des profils, mais il existe bien d'autres profils non symmétriques dont on peut visualiser les caractéristiques sur le site : http ://airfoiltools.com/

FIGURE 5 – Planeur et albatros. On remarquera l'élancement remarquable de leurs ailes.