

TD5 : Crevettes et cavitation

Hugo Delrieu*, Damien Toquer†, Mathilde Reyssat

31 mars 2025

Les "crevettes pistolets" peuvent assommer leur proie à distance en claquant leur pince hypertrophiée. La fermeture de la pince produit un jet d'eau de vitesse telle que la pression descend en-dessous de la pression de vapeur saturante et une bulle de vapeur se forme : ce phénomène porte le nom de cavitation. La bulle grandit puis implose, générant une onde de choc capable d'assommer un petit crustacé. On s'intéresse ici à la dynamique de cette bulle.

Référence : M. Versluis, B. Schmitz, A. Heydt, D. Lohse. "How snapping shrimp snap : through cavitating bubbles", *Science* (2000).

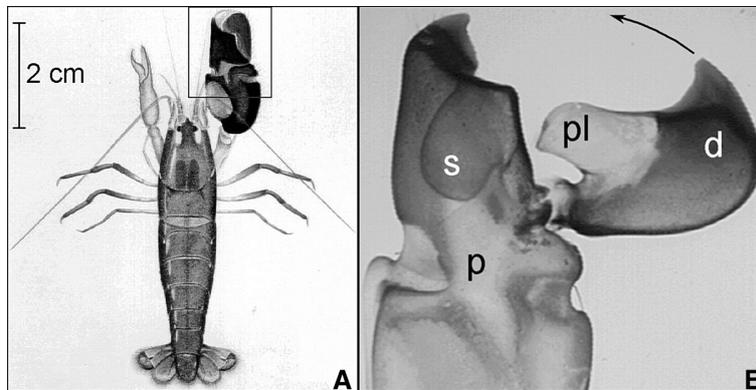


FIGURE 1 – (A) *Alpheus heterochaelis*, one of the largest snapping shrimp. The large snapper claw may be either on the right or the left in both sexes. Modified after (30). (B) Close-up of the snapper claw in its cocked position. The claw is made transparent by the use of methyl salicylate. The claw has a protruding plunger (pl) on the dactyl (d) and a matching socket (s) in the immobile propus (p) (photograph by B. Seibel). During the extremely rapid closure of the snapper claw, a high-velocity water jet is formed when the plunger displaces the water from the propus socket.

1. A partir de la figure 2, estimer le temps d'implosion et la taille caractéristique de la bulle. En déduire le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement.

Solution: A partir de la figure 2, on trouve $\tau \sim 0.5$ ms et $L \sim 1$ cm, donc $U \sim L/\tau \sim 20$ m/s. Ceci nous donne un nombre de Reynolds $Re \sim 2.10^5$. On est dans un régime inertiel.

2. Pourquoi l'écoulement peut-il être considéré incompressible et irrotationnel ?

Solution: On évalue le nombre de Mach : $Ma \sim U/c \sim 2.10^{-2} \ll 1$, avec c la vitesse du son dans l'eau. On peut donc considérer l'écoulement comme incompressible.

*hugo.delrieu@espci.fr

†damien.toquer@phys.ens.fr

Initialement, le fluide est au repos et donc irrotationnel. Comme l'écoulement est inertiel, on sait que la vorticité va se développer dans les couches limites et se diffuser sur un temps typique $R^2/\nu \sim \frac{10^{-4}}{10^{-6}} \sim 100 \text{ s} \gg 1 \text{ ms}$, on peut donc considérer l'écoulement irrotationnel.

3. En déduire en loi d'échelle la vitesse minimale u_{min} nécessaire à la formation d'une bulle de cavitation et le temps de vie τ de la bulle.

Solution: Comme l'écoulement est inertiel, incompressible et irrotationnel, on peut appliquer l'équation de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p = C \quad (1)$$

On a :

$$\begin{aligned} u &= \nabla \phi \sim \frac{\Delta \phi}{R} \\ \Rightarrow \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} &\sim \rho \frac{\Delta \phi}{\tau} \sim \rho \frac{uR}{R/u} \sim \rho u^2 \end{aligned}$$

On obtient donc en loi d'échelle :

$$\rho u^2 + p \sim C$$

De plus, loin de la bulle, on a $u = 0$ et $p = p_\infty = p_0 \Rightarrow C = p_0$.

Donc

$$u_{min} \sim \sqrt{\frac{p_0 - p_a}{\rho}} \sim \sqrt{\frac{p_0}{\rho}} \sim 10 \text{ m/s} \quad (2)$$

On en déduit le temps d'implosion :

$$\tau \sim \frac{R}{u} \sim R \sqrt{\frac{\rho}{p_0}} \sim 1 \text{ ms} \quad (3)$$

On étudie maintenant le problème de façon quantitative. On considère une bulle sphérique de rayon $R = R_0$    $t = 0$. On fait l'hypothèse qu'elle commence à s'effondrer à vitesse nulle ($\dot{R}(t=0) = 0$). La pression de vapeur dans la bulle P_a est petite devant la pression P_0 dans le liquide loin de la bulle. On note γ la tension de surface eau-air.

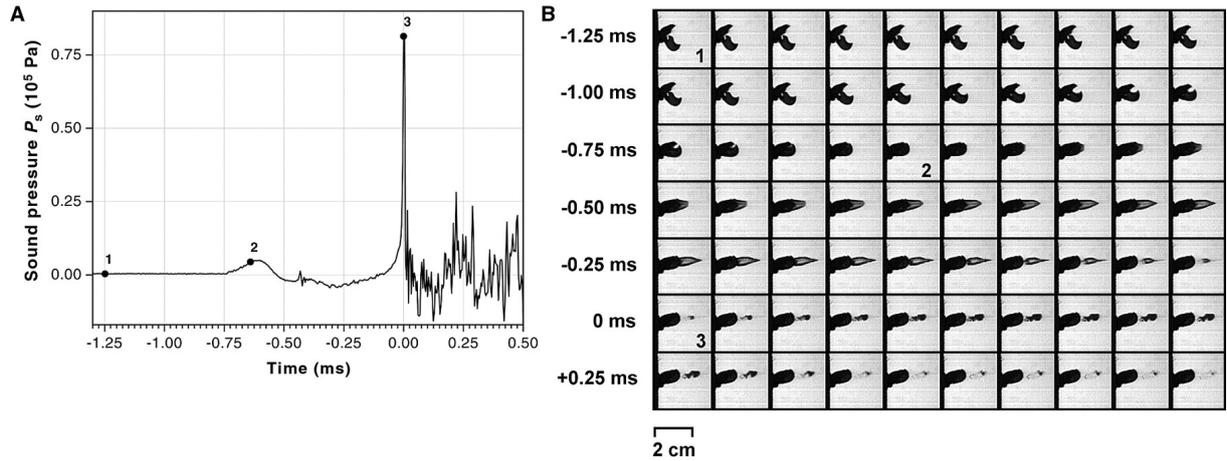


FIGURE 2 – (A) Hydrophone signal of a snap by an *A. heterochaelis* female measured at a distance $r = 4$ cm. The numbered points correspond to the respective frames in (B). The precursor signal is before and the broadband signal is after the main peak at $t = 0$. The broadband signal is partly due to the reflections of the main signal at the aquarium walls. The small peak at $t = -425 \mu\text{s}$ coincides with the collapse of a small cavitation bubble under the claw (29). (B) A sequence of high-speed images in top view showing the closure of the snapper claw taken at $25 \mu\text{s}$ intervals (40,500 fps). Each tick mark on the time axis of the hydrophone signal (A) indicates an image recording. The dactyl rotation starts at frame 1 at $t = -1250 \mu\text{s}$. The main peak of the sound emission is at $t = 0$ (frame 3) and coincides with the collapse of the cavitation bubble. Full closure of the claw was already achieved at frame 2,650 μs before bubble collapse.

4. En utilisant l'incompressibilité de l'eau et les symétries, déterminer le potentiel des vitesses ϕ et le champ de vitesse $u(r, t)$ en fonction de $R(t)$.

Solution: On a une symétrie sphérique, donc une invariance par rotation selon θ et φ ce qui implique $\phi(r, \theta, \varphi, t) = \phi(r, t)$.

On a $u = \nabla\phi \Rightarrow \nabla \cdot u = \Delta\phi = 0$, ce qui se réduit grâce aux invariances à

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (4)$$

En intégrant une première fois, on trouve :

$$\partial_r \phi = \frac{A}{r^2}$$

Pour déterminer A , on utilise la condition au bord $u_r(r = R) = \partial_r \phi(r = R) = \dot{R} \Rightarrow A = \dot{R}R^2$. En intégrant une fois de plus, on a :

$$\phi(r, t) = -\frac{\dot{R}R^2}{r} + B(t) \quad (5)$$

En utilisant l'équation de Bernoulli loin de la bulle, on montre que $\partial_t B = 0$, donc la constante B ne joue aucun rôle dans la physique du problème. On a donc :

$$u_r = \frac{\dot{R}R^2}{r^2} \quad (6)$$

$$\phi = -\frac{\dot{R}R^2}{r} \quad (7)$$

5. En utilisant l'équation de Bernoulli, montrer que $R(t)$ vérifie l'équation de Rayleigh-Plesset :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{2\gamma}{\rho R} = -\frac{p_0}{\rho}. \quad (8)$$

Solution: On applique l'équation de Bernoulli au voisinage de R :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}(r=R) + \frac{1}{2}\rho u^2(r=R) + p(r=R) &= p_0 \\ \Rightarrow -\frac{\rho}{R}(\ddot{R}R^2 + 2\dot{R}^2R) + \rho \frac{\dot{R}^2}{2} + p(r=R) &= p_0 \\ \Leftrightarrow -R\ddot{R} - \frac{3}{2}\dot{R}^2 &= \frac{p_0 - p(r=R)}{\rho} \end{aligned}$$

L'équation de Laplace nous permet de déterminer le terme de pression :

$$p_a = p(r=R) + \frac{2\gamma}{R}$$

En remplaçant par cette expression et en négligeant la pression de vapeur saturante devant p_0 , on obtient :

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{2\gamma}{\rho R} = -\frac{p_0}{\rho}.$$

6. Montrer que le terme de tension de surface est négligeable dans les conditions considérées. En déduire que

$$\frac{d(\dot{R}^2 R^3)}{dt} = -\frac{2p_0}{3\rho} \frac{dR^3}{dt}. \quad (9)$$

Solution: Il suffit de comparer le gain de pression dû à la tension de surface par rapport à la pression p_0 :

$$\frac{2\gamma}{R} \sim \frac{2 \cdot 70 \cdot 10^{-3}}{10^{-2}} \sim 14 \text{ Pa} \ll p_0$$

L'effet de la tension de surface est donc complètement négligeable dans la dynamique de la bulle.

En multipliant les deux membres restant par $2R^2\dot{R}$, on obtient :

$$2R^3\dot{R}\ddot{R} + 3R^2\dot{R}^3 = -\frac{2p_0}{\rho}R^2\dot{R}$$

On reconnaît $R^2\dot{R} = \frac{1}{3}\frac{d(R^3)}{dt}$ et $2R^3\dot{R}\ddot{R} + 3R^2\dot{R}^3 = \frac{d(\dot{R}^2 R^3)}{dt}$, ce qui nous donne donc l'équation (9).

7. Calculer le temps τ d'implosion de la bulle et vérifier la cohérence avec les données expérimentales. On donne

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}} dx \approx 0.747. \quad (10)$$

Solution: On intègre une première fois pour obtenir :

$$\dot{R}^2 R^3 = -\frac{2p_0}{3\rho}(R^3 - R_0^3)$$

Puis on sépare les variables :

$$\frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{2p_0}{3\rho}} \sqrt{\frac{R_0^3 - R^3}{R^3}}$$

On a un signe $-$ car le rayon décroît au cours du temps : $dR/dt < 0$.

$$\int_0^\tau dt = -\sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_{R_0}^0 \sqrt{\frac{R^3}{R_0^3 - R^3}} dR$$

$$\Leftrightarrow \tau = R_0 \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1 - x^3}} dx$$

Et donc finalement :

$$\tau \simeq \underbrace{0.747}_{\simeq 0.915} \sqrt{\frac{3}{2}} R_0 \sqrt{\frac{\rho}{p_0}} \quad (11)$$

Le rayon maximal atteint par la bulle est en fait de 3,5 mm, ce qui nous donne $\tau \simeq 0.32$ ms, ce qui est tout à fait cohérent avec les résultats expérimentaux.

8. L'équation (9) ne possède pas de solution analytique, mais elle peut être résolue numériquement. Pour cela, réécrire cette équation sous forme adimensionnée. La résolution est montrée en Figure 3, que peut-on dire sur la dynamique de la bulle de cavitation ?

Solution: On a

$$\frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{2p_0}{3\rho}} \sqrt{\frac{R_0^3}{R^3} - 1}$$

En posant $r = R/R_0$ et $\theta = t/\mathcal{T}$ avec $\mathcal{T} = R_0 \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}$, on obtient :

$$\frac{R_0}{\mathcal{T}} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{R_0}{\mathcal{T}} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{r^3} - 1 \right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{r^3} - 1 \right)}$$

Finalement, on a :

$$\theta = \int_1^r \frac{dr}{\left[\frac{2}{3} \left(\frac{1}{r^3} - 1 \right) \right]^{1/2}} \quad (12)$$

Cette équation différentielle peut s'intégrer numériquement simplement en matlab ou avec la fonction `solve_ivp` du module python `scipy.integrate`. Le résultat est présenté en figure 3 : On peut observer que lorsque la bulle commence à diminuer en taille, ce rétrécissement s'accélère de plus en plus jusqu'à atteindre une pente verticale au temps τ . On a donc une diminution brutale du rayon de la bulle jusqu'à atteindre $R = 0$, c'est pourquoi on parle d'"effondrement" ou "collapse" de la bulle, ce qui engendre une onde de choc assez puissante pour assommer des petits crustacés.

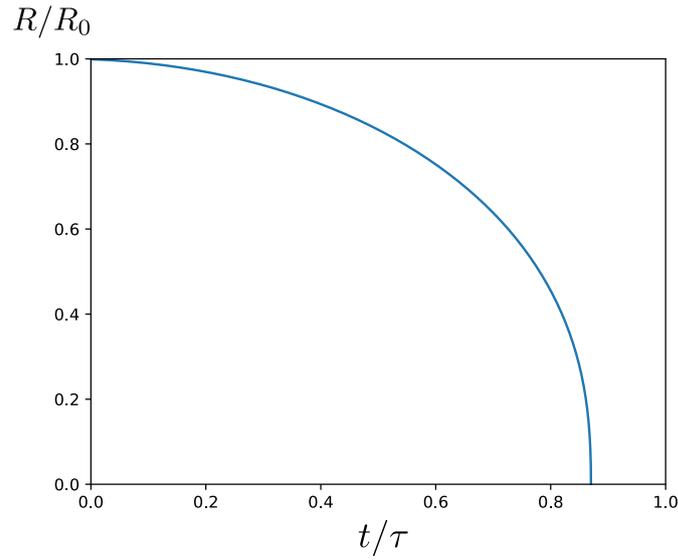


FIGURE 3 – Résolution numérique de l'équation de Rayleigh-Plesset

Données : Pression de vapeur saturante de l'eau : $P_{vap} = 2.10^3 Pa$

Formulaire (coordonnées sphériques)

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (13)$$