TD3 : Écoulements de Couette

Hugo Delrieu[*], Damien Toquer[†], Mathilde Reyssat

1 Diffusion de la quantité de mouvement

Le but de ce problème est de mettre en évidence le transport diffusif de la quantité de mouvement dans un fluide. On verra en particulier que la viscosité cinématique joue le rôle de coefficient de diffusion pour la quantité de mouvement. On considère un système modèle : le demi-espace $z > 0$ est occupé par un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ. Une plaque solide occupe le plan $z = 0$. A l'instant $t = 0$, la plaque est mise en mouvement dans la direction x à une vitesse constante V.

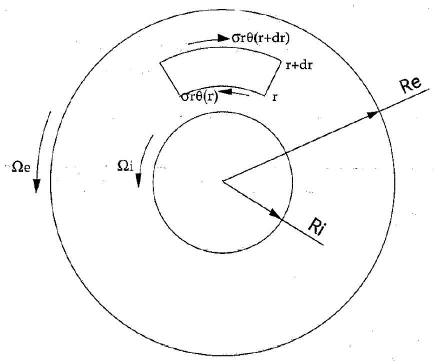
On note $\sigma_{xz}(z_0)$ la contrainte tangentielle en $z = z_0$, c'est-à-dire la force exercée dans la direction x sur une surface unité de normale $\boldsymbol{e}_z$ par le fluide situé en $z > z_0$. Les contraintes tangentielles sont reliées à la viscosité par $\sigma_{xz} = \eta \partial_z v$.

1. En utilisant les invariances du problème, montrer que le champ de vitesse ne peut dépendre que de z et de t.
2. Montrer que l'incompressibilité impose que le champ de vitesse est orienté selon x.
3. À l'aide des équations de Navier-Stokes, montrer que le champ de vitesse vérifie
$$\partial_t u = \nu \partial_z^2 u, \tag{1}$$
où $\nu = \eta/\rho$ est la viscosité cinématique.
4. On va chercher des solutions sous la forme $u(\xi)$ avec $\xi = z/\sqrt{\nu t}$. Cela revient à considérer que la vitesse est constante le long des trajectoires $z_\xi(t) = \xi\sqrt{\nu t}$. Justifier ce choix à l'aide d'une loi d'échelle.
5. Résoudre cette équation. On supposera une condition de non-glissement $u(z = 0) = V$. Que représente la quantité $\sqrt{\nu t}$?
6. Exprimer le flux de quantité de mouvement du fluide dans la direction z en fonction de u et de η. En donner un ordre de grandeur en fonction de la vitesse typique d'écoulement U et de l'échelle de longueur typique L. C'est le flux de quantité de mouvement dû à la diffusion.
Indice : Écrire la conservation de la quantité de mouvement selon x.
7. Exprimer maintenant le flux convectif de quantité de mouvement dans la direction de l'écoulement et en donner l'ordre de grandeur en fonction de U.
Indice : Commencer par calculer le volume de fluide qui passe à travers une paroi dS orienté selon $\boldsymbol{e}_x$ entre t et $t + \mathrm{d}t$.
8. Exprimer l'ordre de grandeur du rapport de ces deux flux (convection/diffusion). Ce rapport porte le nom de nombre de Reynolds et il mesure l'importance relative des deux modes de transport de quantité de mouvement. Il aura une très grande importance en mécanique des fluides.

[*] hugo.delrieu@espci.fr
[†] damien.toquer@phys.ens.fr

2 Viscosimètre de Couette

On considère un fluide incompressible compris entre deux cylindres coaxiaux, de rayons R_e et R_i et de hauteur $H \gg R_e, R_i$, tournant respectivement à des vitesses angulaires Ω_e et Ω_i, comme représenté sur le schéma ci-dessous. On se place en coordonnées cylindriques (r,θ,z). On suppose qu'un régime stationnaire a été atteint.



1. Justifier que $\boldsymbol{u}(r,\theta,z,t) = u(r)\boldsymbol{e}_\theta$.
2. Appliquer Navier-Stokes dans la direction $\boldsymbol{e}_\theta$. Montrer que l'on peut chercher des solutions sous la forme $u_\theta = \frac{A}{r} + Br$.
3. On suppose des conditions aux limites de non glissement sur les parois. En déduire A et B en fonction des rayons et des vitesses angulaires des cylindres.
4. Calculer la force $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ qu'exerce le fluide sur un élément de surface dS du cylindre extérieur compris entre θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$. Dans le cas considéré ici, la contrainte tangentielle est donnée par :
$$\sigma_{r\theta} = \eta\left(\partial_r u_\theta - \frac{u_\theta}{r}\right) \tag{16}$$
5. Le couple exercé par cette force sur l'axe de rotation est :
$$\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{C}} = R_e\boldsymbol{e}_r \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{F} \tag{17}$$
Calculer le couple total exercé par le fluide sur le cylindre extérieur. Pourquoi ce dispositif permet-il de mesurer une viscosité ?
6. Application numérique : estimer le couple à appliquer à de l'eau ($\eta = 1$ mPa · s) et de l'huile ($\eta = 100$ mPa · s) pour obtenir une vitesse de rotation de l'ordre du Hz (on considèrera $R_e = 3$ cm, $R_e - R_i = 1$ mm).

Formule en coordonnées cylindriques (r,θ,z)

— **Gradient**
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

— **Divergence**
$$\nabla \cdot \boldsymbol{g} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r g_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial g_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial g_z}{\partial z}$$

— **Laplacien**
$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

— **Navier-Stokes selon $\boldsymbol{e}_\theta$**
$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)$$