TD3 : Écoulements de Couette

Hugo Delrieu[*], Damien Toquer[†], Mathilde Reyssat

1 Diffusion de la quantité de mouvement

Le but de ce problème est de mettre en évidence le transport diffusif de la quantité de mouvement dans un fluide. On verra en particulier que la viscosité cinématique joue le rôle de coefficient de diffusion pour la quantité de mouvement. On considère un système modèle : le demi-espace $z > 0$ est occupé par un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ. Une plaque solide occupe le plan $z = 0$. A l'instant $t = 0$, la plaque est mise en mouvement dans la direction x à une vitesse constante V.

On note $\sigma_{xz}(z_0)$ la contrainte tangentielle en $z = z_0$, c'est-à-dire la force exercée dans la direction x sur une surface unité de normale $\boldsymbol{e}_z$ par le fluide situé en $z > z_0$. Les contraintes tangentielles sont reliées à la viscosité par $\sigma_{xz} = \eta \partial_z v$.

1. En utilisant les invariances du problème, montrer que le champ de vitesse ne peut dépendre que de z et de t.

> **Solution:** On a une invariance par translation selon x et y, donc $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial y} = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(z,t)$.
> On ne considèrera plus la dimension y dans la suite du problème.

2. Montrer que l'incompressibilité impose que le champ de vitesse est orienté selon x.

> **Solution:** L'incompressibilité impose $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$. On a donc que $u_z = C$ avec C une constante, or la condition d'imperméabilité sur la paroi impose $u_z(z=0) = 0 = C$, et donc $u_z = 0$.
>
> On a donc $\boldsymbol{u} = u_x(z,t)\boldsymbol{e_x}$.

3. À l'aide des équations de Navier-Stokes, montrer que le champ de vitesse vérifie

$$\partial_t u = \nu \partial_z^2 u, \tag{1}$$

où $\nu = \eta/\rho$ est la viscosité cinématique.

[*]hugo.delrieu@espci.fr
[†]damien.toquer@phys.ens.fr

Solution: On écrit Navier-Stokes projeté selon $\boldsymbol{e}_x$ et $\boldsymbol{e}_z$:

$$\begin{cases} \partial_t u_x + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_x = -\frac{1}{\rho}\partial_x p + \nu\Delta u_x \\ 0 = -\partial_z p \end{cases} \tag{2}$$

On a $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_x = u_x \underbrace{\partial_x u_x}_{=0} + \underbrace{u_z}_{=0} \partial_z u_x = 0$ et $\Delta u_x = \underbrace{\partial_x^2 u_x}_{=0} + \partial_z^2 u_x = \partial_z^2 u_x$.

Il faut maintenant déterminer le terme de gradient de pression selon x. Pour cela, on observe que $p = K(x)$ avec K une fonction de x uniquement (2). On sait cependant que $p(x, z = +\infty) = p_0$ et donc $p(x, z) = p_0$ pour tout x. On a donc montré que $K(x) = K$ est une constante, et alors $\partial_x p = 0$.

On aurait aussi pu utiliser l'invariance du problème selon x pour justifier ce résultat.

On obtient donc finalement l'équation suivante :

$$\partial_t u_x = \nu \partial_z^2 u_x \tag{3}$$

On reconnait ici une équation de diffusion de la quantité de mouvement avec ν le coefficient de diffusion associé.

4. On va chercher des solutions sous la forme $u(\xi)$ avec $\xi = z/\sqrt{\nu t}$. Cela revient à considérer que la vitesse est constante le long des trajectoires $z_\xi(t) = \xi\sqrt{\nu t}$. Justifier ce choix à l'aide d'une loi d'échelle.

Solution: Si on raisonne en loi d'échelle sur l'équation précédente, on a :

$$\frac{V}{t} \sim \nu \frac{V}{\delta^2}$$
$$\Rightarrow \delta(t) \sim \sqrt{\nu t}$$

On voit apparaitre une longueur caractéristique δ qui est la seule longueur caractéristique du problème. Ainsi, on sait que c'est la longueur typique sur laquelle l'écoulement va varier et que la solution va s'exprimer en fonction de cette longueur. On fait donc apparaitre une variable adimensionnée $\xi = z/\sqrt{\nu t}$ et on cherche la solution de cette équation sous la forme $u(\xi) = V f(\xi)$.

5. Résoudre cette équation. On supposera une condition de non-glissement $u(z = 0) = V$. Que représente la quantité $\sqrt{\nu t}$?

Solution: On a tout d'abord :

— $\partial_t f(\xi) = \partial_t \xi \cdot \underbrace{\partial_\xi f(\xi)}_{f'} = -\frac{1}{2}\frac{z}{\sqrt{\nu t}} \times \nu \times \frac{1}{\nu t} f' = -\frac{1}{2t}\xi f'$.

— $\partial_z f(\xi) = \partial_z \xi \cdot f' = \frac{1}{\sqrt{\nu t}} f'$ et donc $\partial_z^2 f(\xi) = \frac{1}{\nu t} f''$.

On remplace dans (4) et on obtient :

$$-\frac{1}{2t}\xi f' = \nu \times \frac{1}{\nu t} f'' \tag{4}$$

$$\iff f'' + \frac{\xi}{2} f' = 0 \tag{5}$$

On pose $g = f'$ et on remplace dans l'équation :

$$g' + \frac{\xi}{2} g = 0 \tag{6}$$

La solution de cette équation est :

$$g(\xi) = A e^{-\xi^2/4} \tag{7}$$
$$\Rightarrow f(\xi) = A \int_0^{\xi} e^{-x^2/4} dx + B \tag{8}$$

On utilise la condition de non glissement à la paroi : $u(\xi = 0) = Vf(0) = VB = V \Rightarrow B = 1$. Pour déterminer A, on utilise le fait que $u(\xi \to +\infty) = 0 = Vf(\xi \to +\infty)$ avec $f(\xi \to +\infty) = A \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x^2/4} dx}_{=\sqrt{\pi}} + 1$ et donc $A = -1/\sqrt{\pi}$.

Finalement, on a :

$$u(\xi) = Vf(\xi) = V \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-x^2/4} dx \right] \tag{9}$$

Si on trace la vitesse en fonction de la hauteur et pour différents temps, on constate que la vitesse se transmet verticalement dans le fluide au cours du temps jusqu'à atteindre V pour des temps très longs : la quantité de mouvement se diffuse entre les couches de fluides par le biais de la viscosité.

La longueur $\delta(t) = \sqrt{\nu t}$ représente donc la longueur typique sur laquelle la quantité de mouvement a été diffusée en un temps t par la viscosité du fluide.

6. Exprimer le flux de quantité de mouvement du fluide dans la direction z en fonction de u et de η. En donner un ordre de grandeur en fonction de la vitesse typique d'écoulement U et de l'échelle de longueur typique L. C'est le flux de quantité de mouvement dû à la diffusion.
Indice : Écrire la conservation de la quantité de mouvement selon x.

Solution: La conservation de la quantité de mouvement selon x se mettra sous la forme :

$$\partial_t(\rho u_x) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{10}$$

avec $\boldsymbol{j}$ un flux de quantité de mouvement.

Par ailleurs, la conservation de la quantité de mouvement selon x est par définition l'équation de Navier-Stokes que l'on projette selon x, c'est-à-dire l'équation (4). Cette équation peut donc se mettre sous la forme :

$$\partial_t(\rho u_x) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}_D = 0 \tag{11}$$

avec $\boldsymbol{j}_D = -(\eta \partial_z u_x) \, \boldsymbol{e}_z$. Ce flux est le flux diffusif de quantité de mouvement qui est dirigé selon z, ce qui est cohérent avec le fait que la vitesse se propage verticalement. En ordre de grandeur, on a $j_D \sim \eta V/L$.

7. Exprimer maintenant le flux convectif de quantité de mouvement dans la direction de

l'écoulement et en donner l'ordre de grandeur en fonction de U.
Indice : Commencer par calculer le volume de fluide qui passe à travers une paroi dS orienté selon $\boldsymbol{e}_x$ entre t et $t + \mathrm{d}t$.

Solution: Le volume de fluide passant au travers d'une paroi $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S\boldsymbol{e}_x$ pendant un temps dt s'écrit $\mathrm{d}\Omega = u_x \mathrm{d}t\mathrm{d}S$, donc la quantité de mouvement qui traverse cette surface est $(\rho\mathrm{d}\Omega)u_x = (\rho u_x^2)\mathrm{d}t\mathrm{d}S = j_C \mathrm{d}t\mathrm{d}S$ avec j_C le flux convectif de quantité de mouvement, c'est-à-dire le flux résultant de l'écoulement. Donc $j_C = \rho u_x^2 \sim \rho V^2$.

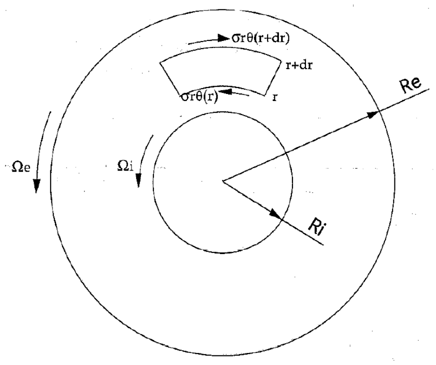
8. Exprimer l'ordre de grandeur du rapport de ces deux flux (convection/diffusion). Ce rapport porte le nom de nombre de Reynolds et il mesure l'importance relative des deux modes de transport de quantité de mouvement. Il aura une très grande importance en mécanique des fluides.

Solution: On a :

$$\frac{j_C}{j_D} \sim \frac{\rho V L}{\eta} \widehat{=} Re \tag{12}$$

2 Viscosimètre de Couette

On considère un fluide incompressible compris entre deux cylindres coaxiaux, de rayons R_e et R_i et de hauteur $H \gg R_e, R_i$, tournant respectivement à des vitesses angulaires Ω_e et Ω_i, comme représenté sur le schéma ci-dessous. On se place en coordonnées cylindriques (r,θ,z). On suppose qu'un régime stationnaire a été atteint.



1. Justifier que $\boldsymbol{u}(r,\theta,z,t) = u(r)\boldsymbol{e}_\theta$.

Solution: On a une invariance par rotation selon θ et par translation selon z. De plus, on suppose l'écoulement stationnaire, on a donc $\boldsymbol{u}(r,\theta,z,t) = \boldsymbol{u}(r)$. Le fluide est incompressible, donc :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}}_{=0} &= 0 \\ \Leftrightarrow u_r &= \frac{K}{r} \end{aligned}$$

La condition d'imperméabilité sur le cylindre intérieur impose :

$$\begin{aligned} u_r(r = R_i) = 0 = \frac{K}{R_i} &\Rightarrow K = 0 \\ &\Rightarrow u_r = 0 \end{aligned}$$

On a donc $\boldsymbol{u}(r,\theta,z,t) = u(r)\boldsymbol{e}_\theta$.

2. Appliquer Navier-Stokes dans la direction $\boldsymbol{e}_\theta$. Montrer que l'on peut chercher des solutions sous la forme $u_\theta = \frac{A}{r} + Br$.

Solution: En appliquant Navier-Stokes, on obtient après avoir retiré les termes nuls :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) - \frac{u_\theta}{r} = 0 \tag{13}$$

En injectant $u_\theta = \frac{A}{r} + Br$, on constate que cette expression est bien solution de l'équation.

3. On suppose des conditions aux limites de non glissement sur les parois. En déduire A et B en fonction des rayons et des vitesses angulaires des cylindres.

Solution: On a $u_\theta(r = R_i) = \Omega_i R_i$ et $u_\theta(r = R_e) = \Omega_e R_e$, donc :

$$\begin{cases} \Omega_i R_i &= \frac{A}{R_i} + BR_i \\ \Omega_e R_e &= \frac{A}{R_e} + BR_e \end{cases} \tag{14}$$

En résolvant ce système, on obtient :

$$A = \frac{(\Omega_i - \Omega_e)R_e^2 R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \; ; \; B = \frac{\Omega_e R_e^2 - \Omega_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \tag{15}$$

4. Calculer la force $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ qu'exerce le fluide sur un élément de surface dS du cylindre extérieur compris entre θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$. Dans le cas considéré ici, la contrainte tangentielle est donnée par :

$$\sigma_{r\theta} = \eta \left(\partial_r u_\theta - \frac{u_\theta}{r} \right) \tag{16}$$

Solution: On a $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \sigma_{r\theta}(r = R_e)\mathrm{d}S\boldsymbol{e}_\theta$ car la vitesse est selon $\boldsymbol{e}_\theta$ et la contrainte s'applique sur une surface de normale $\boldsymbol{e}_r$. On remplace la contrainte par son expression et on obtient :

$$\sigma_{r\theta}(r = R_e) = -2\eta \frac{A}{R_e^2}$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}\boldsymbol{F} = -2\eta \frac{A}{R_e^2} \times R_e \mathrm{d}\theta \boldsymbol{e}_\theta = -2\eta \frac{A}{R_e} \mathrm{d}\theta \boldsymbol{e}_\theta$$

5. Le couple exercé par cette force sur l'axe de rotation est :

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{C}} = R_e \boldsymbol{e}_r \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{F} \tag{17}$$

Calculer le couple total exercé par le fluide sur le cylindre extérieur. Pourquoi ce dispositif permet-il de mesurer une viscosité ?

Solution: Le couple total est :

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{\mathcal{C}} = \int_0^{2\pi} R_e \times -2\eta \frac{A}{R_e} \mathrm{d}\theta \, \boldsymbol{e}_z = -4\pi\eta A \, \boldsymbol{e}_z$$

Finalement, on a :

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = 4\pi\eta(\Omega_e - \Omega_i) \frac{R_e^2 R_i^2}{(R_e^2 - R_i^2)} \, \boldsymbol{e}_z \tag{18}$$

Le couple est directement proportionnel à la viscosité du fluide et à la différence de vitesse de rotation des cylindres. Ainsi, en imposant une différence de vitesse de rotation entre les deux cylindres et en mesurant le couple exercé sur le cylindre extérieur, on peut mesurer la viscosité du fluide.

6. Application numérique : estimer le couple à appliquer à de l'eau ($\eta = 1$ mPa · s) et de l'huile ($\eta = 100$ mPa · s) pour obtenir une vitesse de rotation de l'ordre du Hz (on considèrera $R_e = 3$ cm, $R_e - R_i = 1$ mm).

Solution:
- Pour de l'eau : $\mathcal{C} = 10^{-3}\ \mathrm{N \cdot m}$
- Pour de l'huile : $\mathcal{C} = 0{,}1\ \mathrm{N \cdot m}$

Formule en coordonnées cylindriques (r,θ,z)

— **Gradient**

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

— **Divergence**

$$\nabla \cdot \boldsymbol{g} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r g_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial g_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial g_z}{\partial z}$$

— **Laplacien**

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

— **Navier-Stokes selon $\boldsymbol{e}_\theta$**

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)$$