TD4 : Ecoulements à petit nombre de Reynolds, lubrification

Hugo Delrieu[*], Damien Toquer[†], Mathilde Reyssat

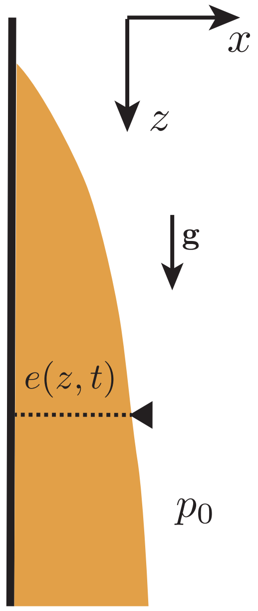
1 Principe de la lubrification

On considère une plaque de dimension latérale L, et placée à une distance h d'une paroi solide. On supposera $L \gg h$. La plaque se déplace parallèlement à la paroi à une vitesse V, l'espace entre la paroi et la plaque étant occupé par un fluide de viscosité cinématique η, dont le champ de vitesse est noté $\mathbf{u}$.

1. Ecrire la condition d'incompressibilité de l'écoulement. En déduire que $u_z \ll u_x$.
2. A quelle condition peut-on négliger les effets inertiels dans l'écoulement ? On supposera cette condition vérifiée dans la suite.
3. Ecrire l'équation de Navier-Stokes pour le fluide. La simplifier dans la limite $\mathcal{R}e \ll 1$.
4. En déduire en loi d'échelle le gradient de pression et la force normale F_n exercée par la plaque sur le fluide.
5. Donner en loi d'échelle la force tangentielle F_t que la plaque exerce sur le fluide. Vérifier que $F_t \sim F_n(h/L)$. Pourquoi parle-t-on de lubrification ?

2 Couteau dans un pot de miel

On plonge un couteau dans un pot de miel de masse volumique ρ. On cherche à déterminer l'épaisseur $e(z,t)$ du film de miel sur le couteau en fonction du temps. On prendra un champ de vitesse de la forme $\mathbf{u} = u_x(x,z)\mathbf{e}_x + u_z(x,z)\mathbf{e}_z$ et on supposera $\partial_z e \ll 1$.



1. A partir de l'incompressibilité du miel, déduire qu'on peut faire l'approximation de lubrification : $\mathbf{u} = u_z(x,z)\mathbf{e}_z$.
2. Ecrire l'équation de Stokes pour le miel. Quelle est la condition aux limites en $x = 0$?
3. Comment devrait-on écrire les conditions aux limites en $x = e$? Justifier que dans la limite $\partial_z e \ll 1$, elles se simplifient en $\partial_x v_z|_{x=e} = 0$ et $p(e,z) = p_0$.
4. Intégrer l'équation de Stokes et en déduire le champ de vitesse.
5. En déduire le débit de miel dans le film.

[*]hugo.delrieu@espci.fr
[†]damien.toquer@phys.ens.fr

6. A partir de la conservation de la masse, montrer que l'épaisseur du film $e(z,t)$ vérifie

$$\partial_t e = -\frac{\rho g}{\eta} e^2 \partial_z e. \tag{1}$$

7. En cherchant une solution sous la forme $e(z,t) = f(z)h(t)$, montrer que

$$e(z,t) = \sqrt{\frac{\eta z}{\rho g t}}. \tag{2}$$

Ce résultat est appelé loi d'amincissement de Reynolds.

Référence

P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes.*