

A l'autre bout du spectre en nombre de Reynolds

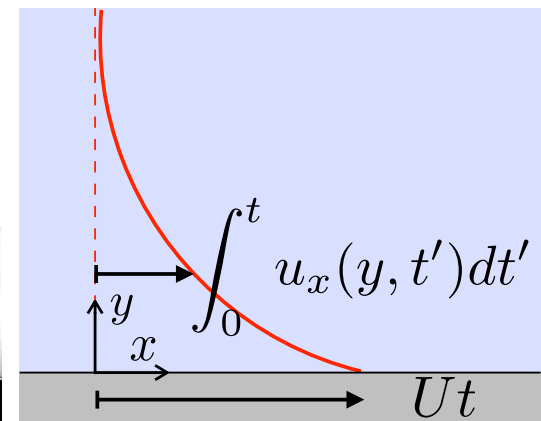
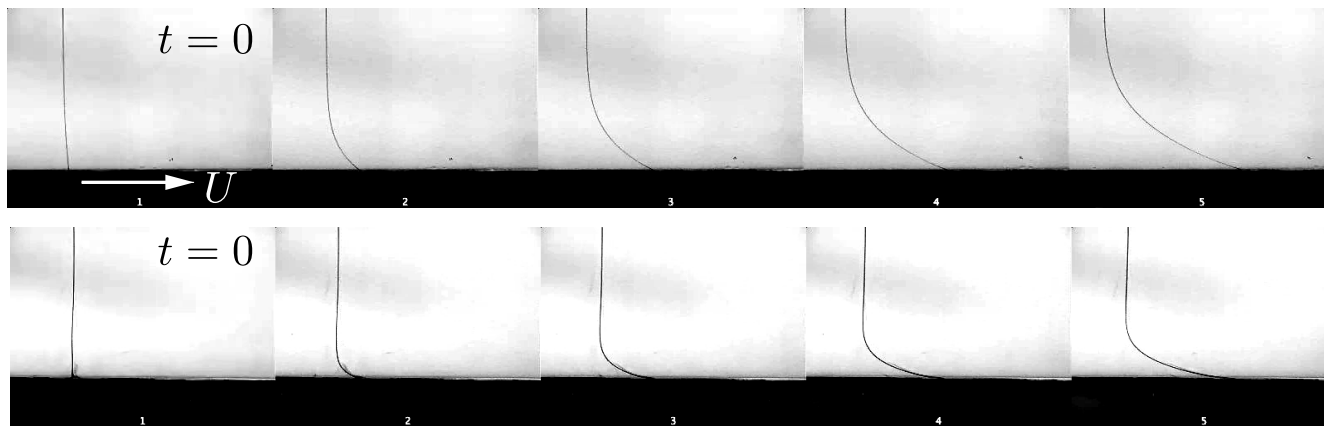
La notion de couche limite

Écoulements rotationnels et irrotationnels

Écoulements potentiels et loi de Bernoulli



Développement d'une couche limite sur une plaque plane mise en mouvement



Développement d'une couche limite sur une plaque plane mise en mouvement

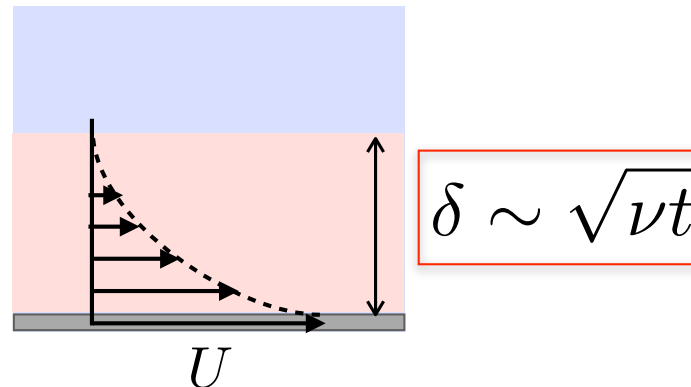
Navier Stokes

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

$$\rho \frac{U}{t} \sim \eta \frac{U}{\delta^2}$$

Épaisseur de couche de diffusion de la quantité de mouvement

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\eta}{\rho} t}$$



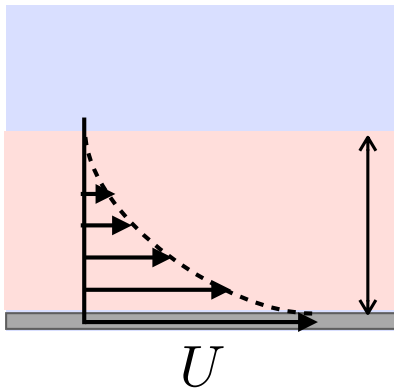
La même expérience du point de vue de la vorticité

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{u}$$

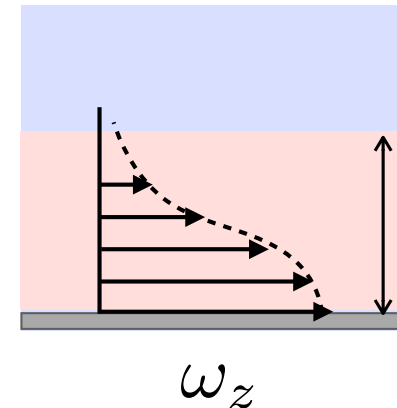
$$\omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Navier Stokes (ici)

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}$$



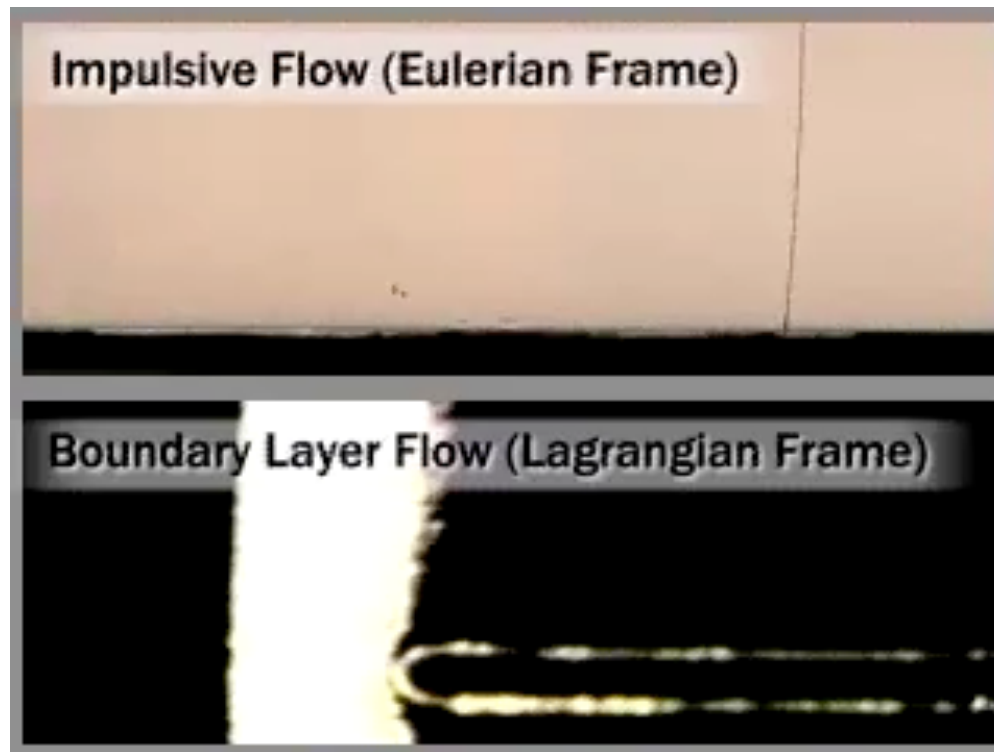
$$\delta \sim \sqrt{\nu t}$$



irrotationnel

$$\omega_z \sim 0$$

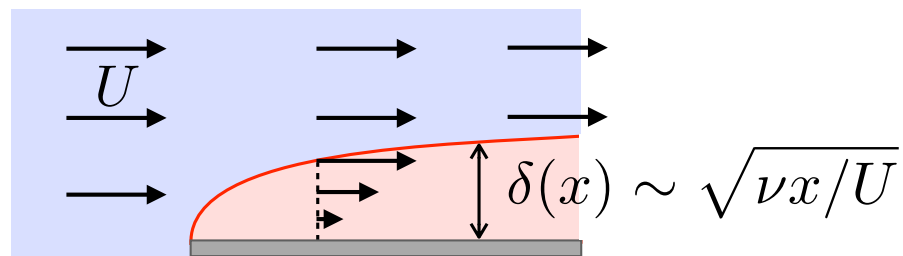
rotationnel

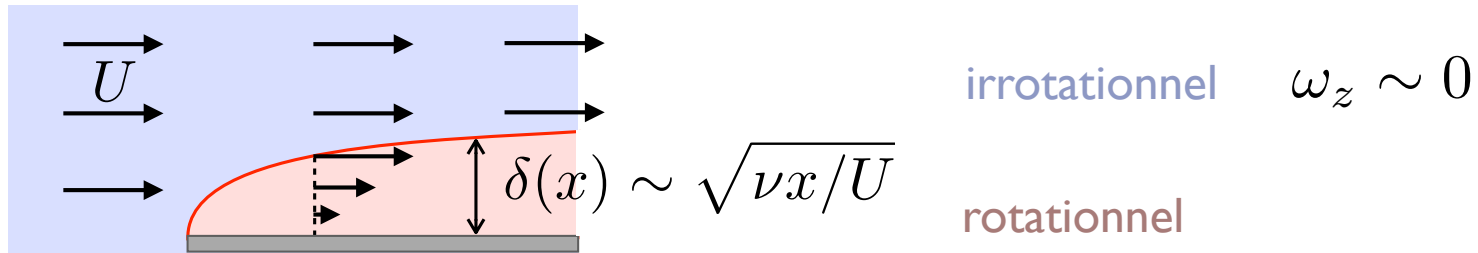


Développement d'une couche limite sur une plaque plane

$$t_d \sim \frac{\delta^2}{\nu}$$

$$t_c \sim \frac{x}{U}$$





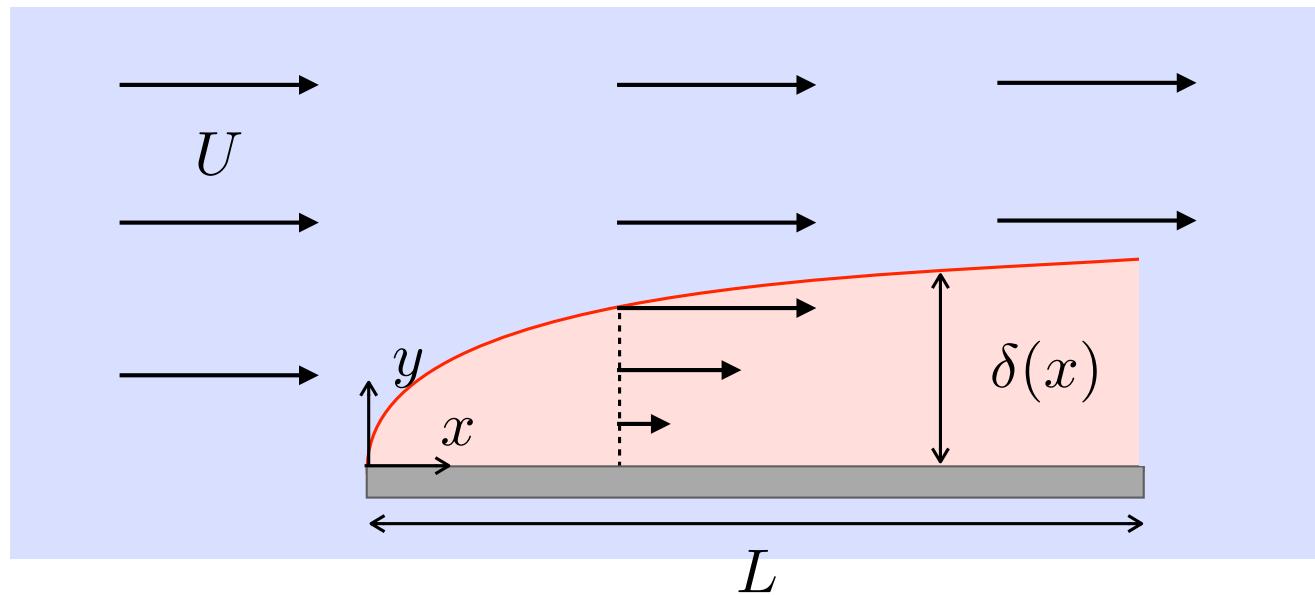
$$\delta(L) \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = L \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = L Re_L^{-1/2}$$

$$Re_L \gg 1 \rightarrow \frac{\delta(L)}{L} \ll 1$$

En dehors de la couche limite :
la viscosité ne joue pas de rôle, l'écoulement est irrotationnel

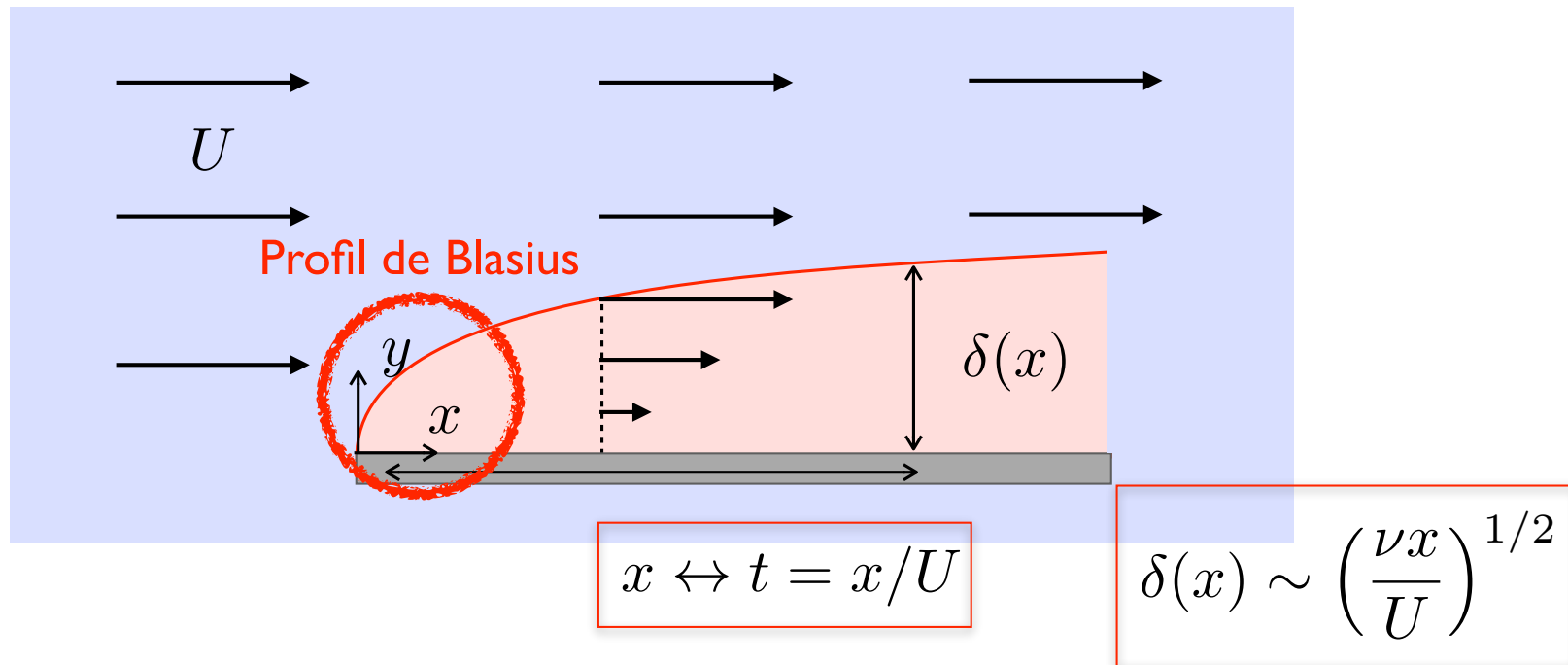
Dans la couche limite :
la viscosité joue un rôle, l'écoulement est rotationnel

2. Couche limite sur une plaque plane



L. Prandtl, H. Blasius, T. von Kármán (début XX^e ↔ aviation)

2. Couche limite sur une plaque plane

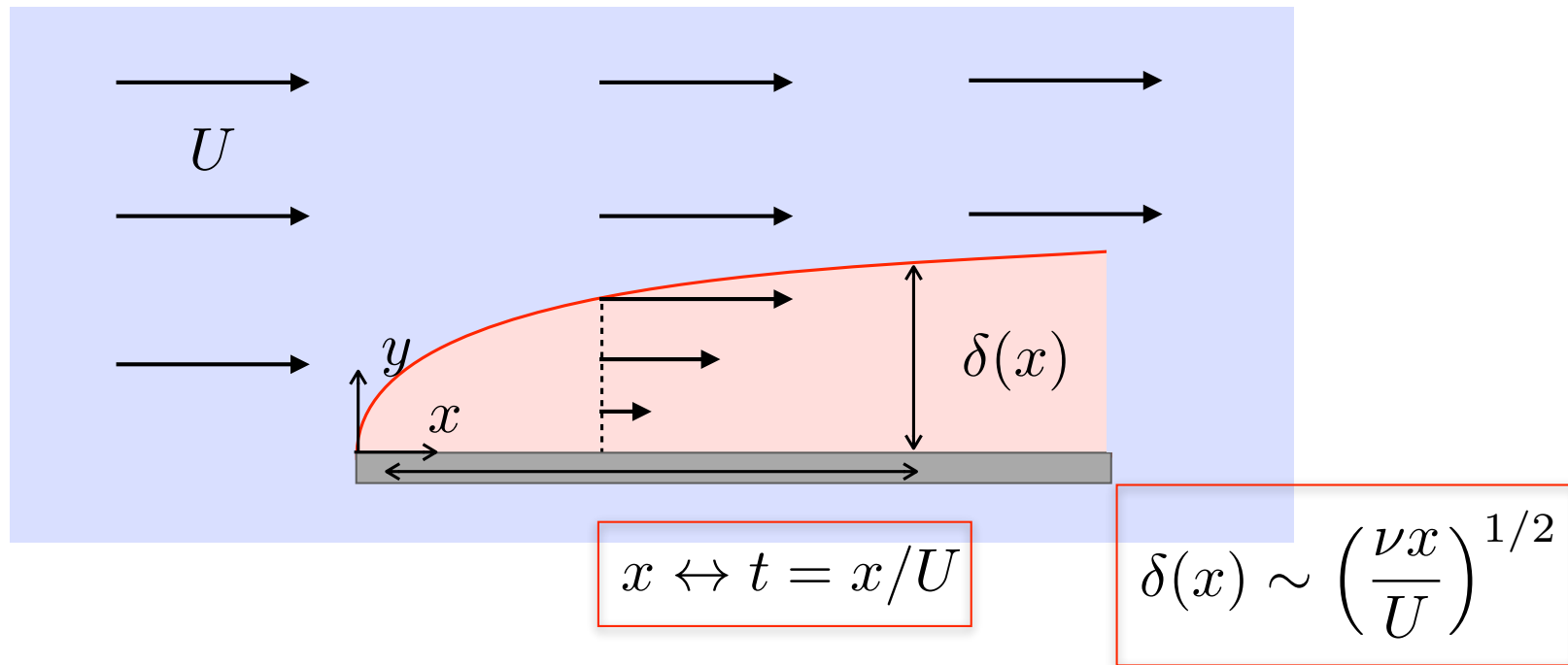


$$u_y? \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U}{x} \sim \frac{u_y}{\delta} \quad u_y \sim \frac{\delta}{x} U$$

$$u_y \ll U \Leftrightarrow \delta \ll x \Leftrightarrow x \gg L^* = \frac{\nu}{U} \Leftrightarrow \frac{UL}{\nu} = Re \gg 1$$

2. Couche limite sur une plaque plane



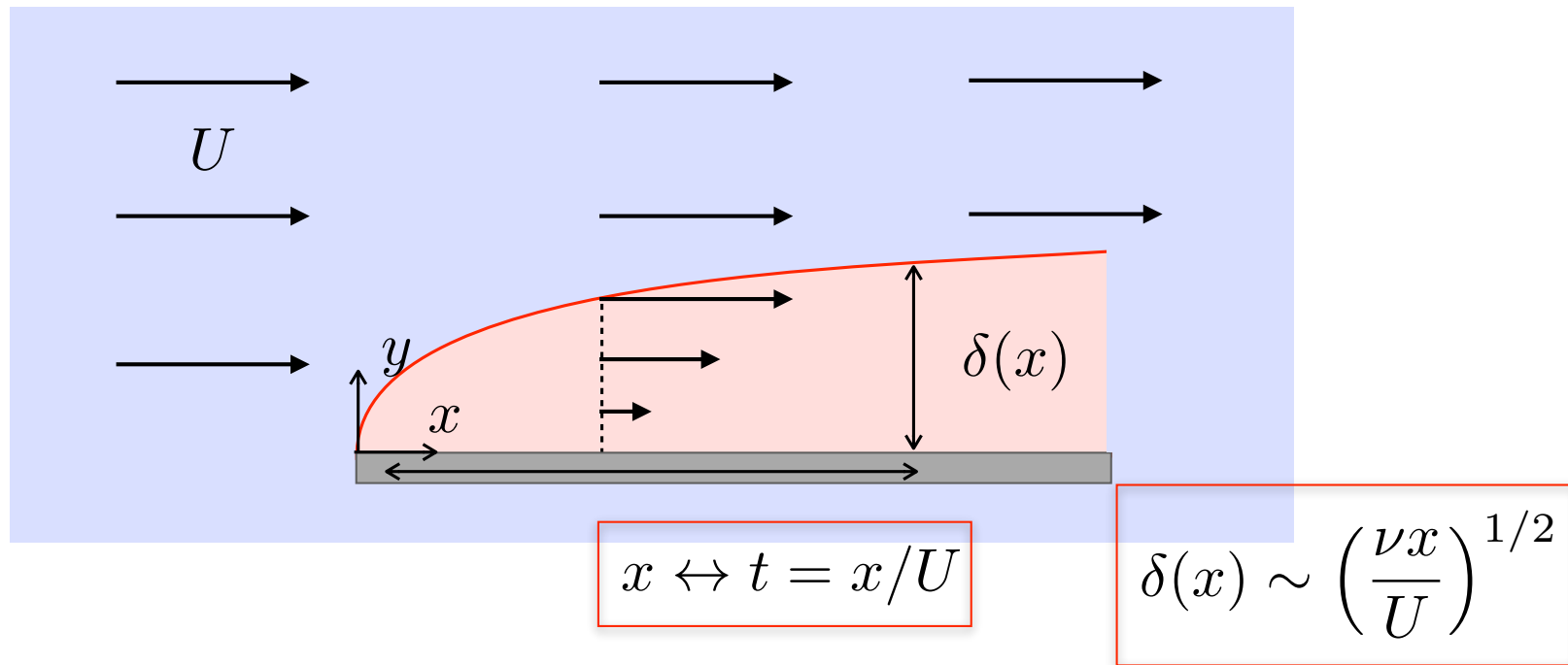
Traînée ?

Cisaillement sur δ

$$\sigma_{xy} \sim \eta \frac{U}{\delta} \sim \frac{(\eta\rho)^{1/2} U^{3/2}}{L^{1/2}}$$

$$T \sim \sigma_{xy} W L \sim \boxed{(\eta\rho L)^{1/2} U^{3/2} W} \quad \text{traînée de friction}$$

2. Couche limite sur une plaque plane



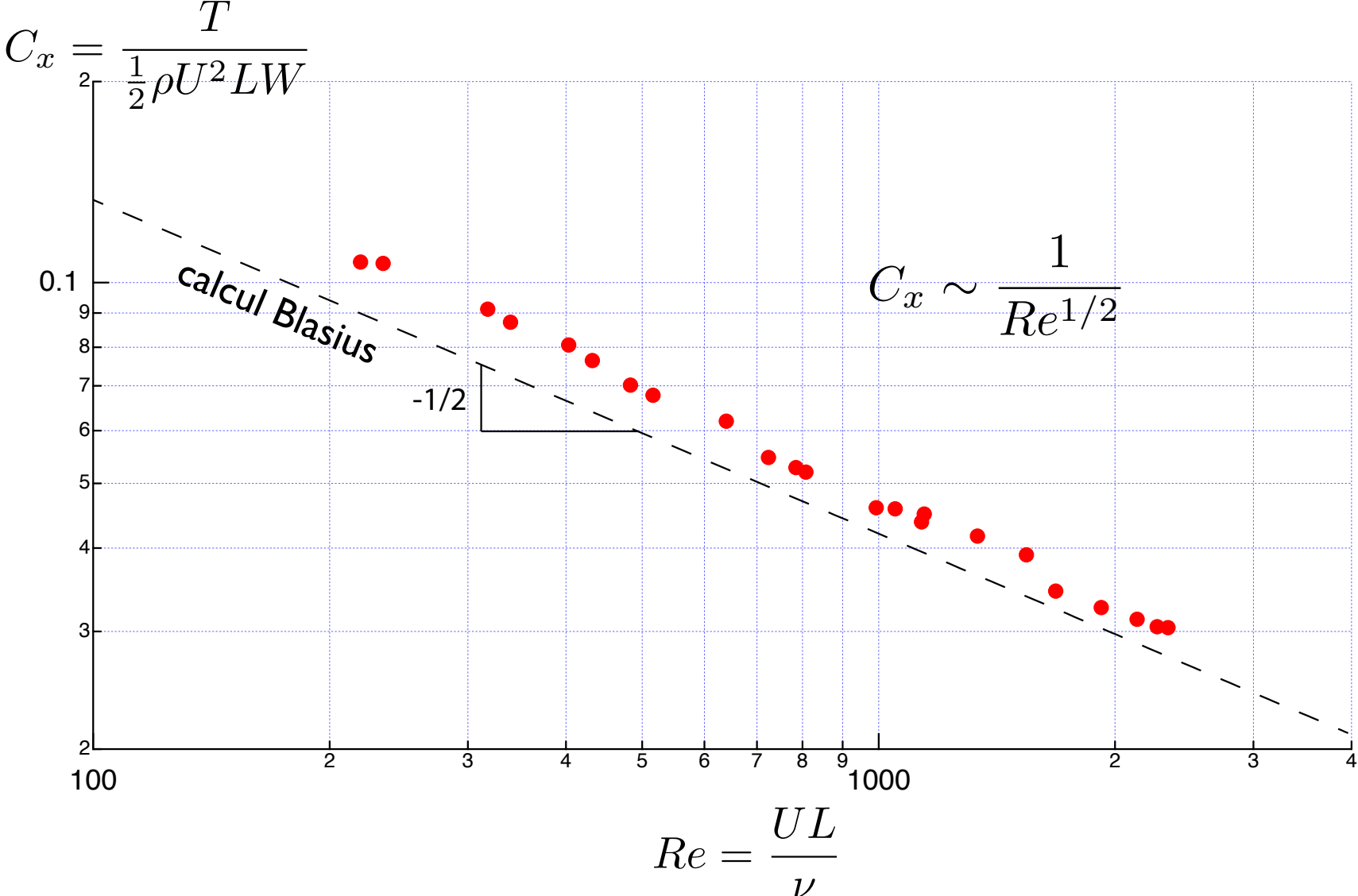
$$T \sim (\eta \rho L)^{1/2} U^{3/2} W$$

Coefficient de traînée

$$T = C_x \frac{1}{2} \rho U^2 W L$$

$$C_x \sim \left(\frac{\eta}{\rho U L}\right)^{1/2} \sim \frac{1}{Re^{1/2}}$$

2. Couche limite sur une plaque plane



2. Couche limite sur une plaque plane

Rappel: si $Re \ll 1$

$$T \sim \eta UL \Rightarrow C_x \sim \frac{1}{Re}$$

2. Couche limite sur une plaque plane

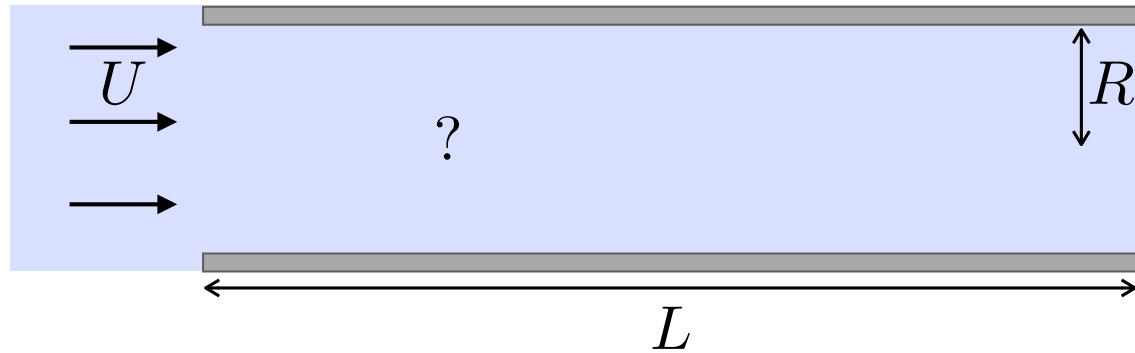
Rappel: si $Re \ll 1$

$$T \sim \eta UL \Rightarrow C_x \sim \frac{1}{Re}$$

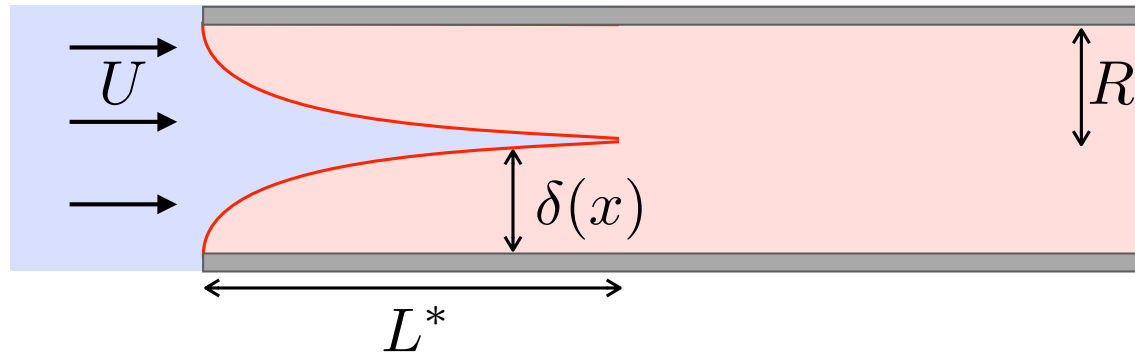
$Re \ll 1 \Leftrightarrow \delta \sim$ taille du système

$Re \gg 1 \Leftrightarrow \delta \ll$ taille du système

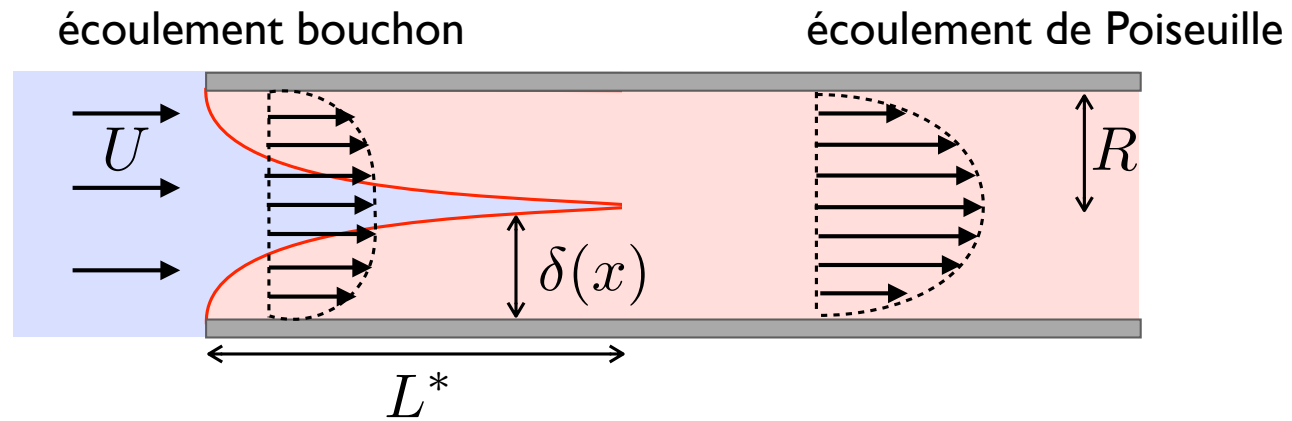
Bonus: longueur d'entrée dans un tube



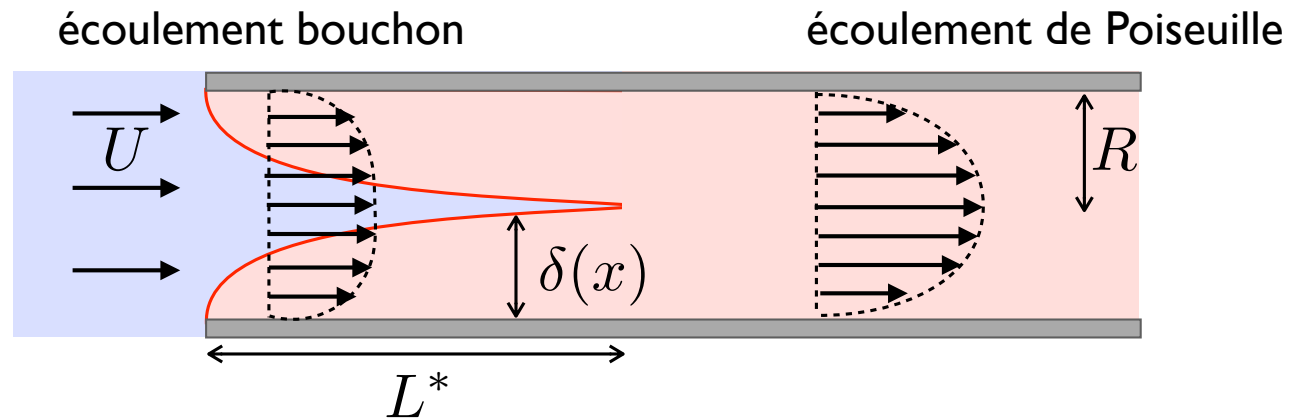
Bonus: longueur d'entrée dans un tube



Bonus: longueur d'entrée dans un tube



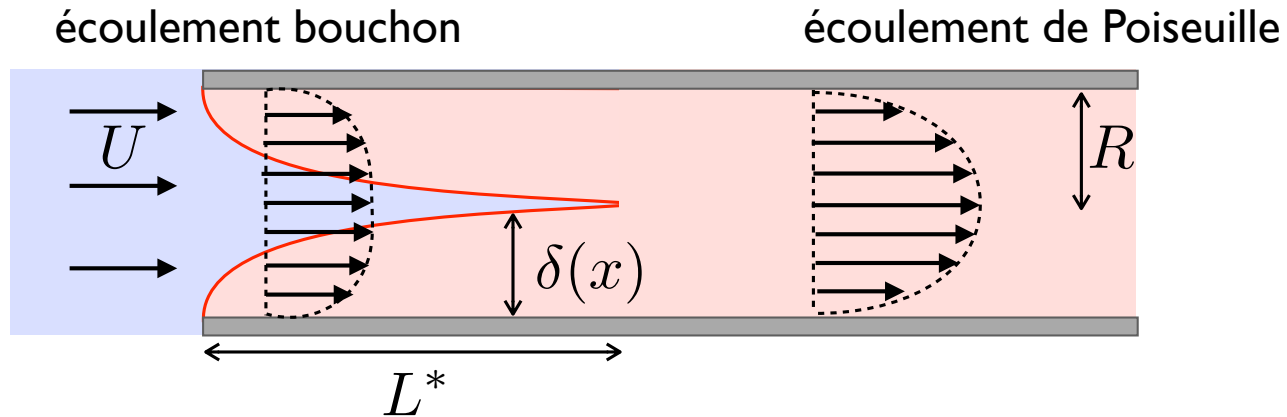
Bonus: longueur d'entrée dans un tube



$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



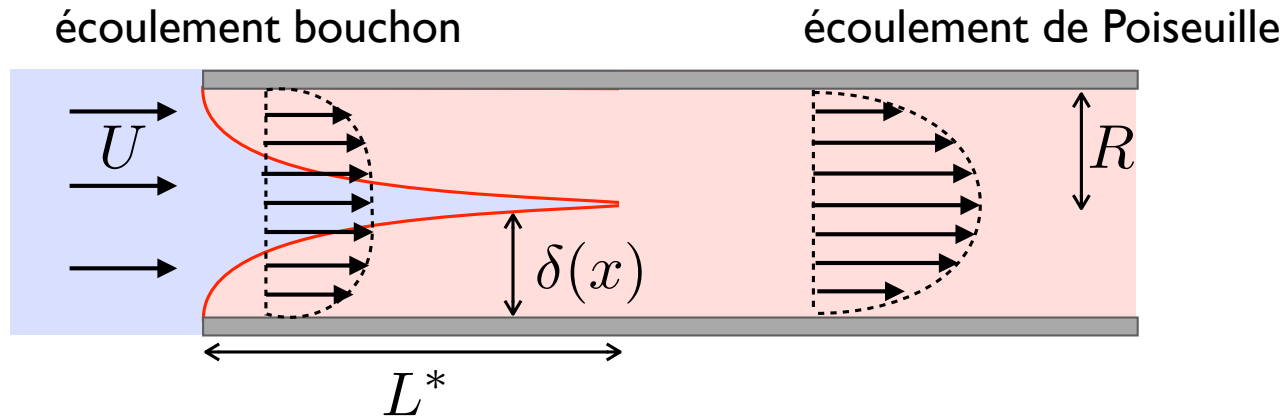
$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

Lien avec Re ?

$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



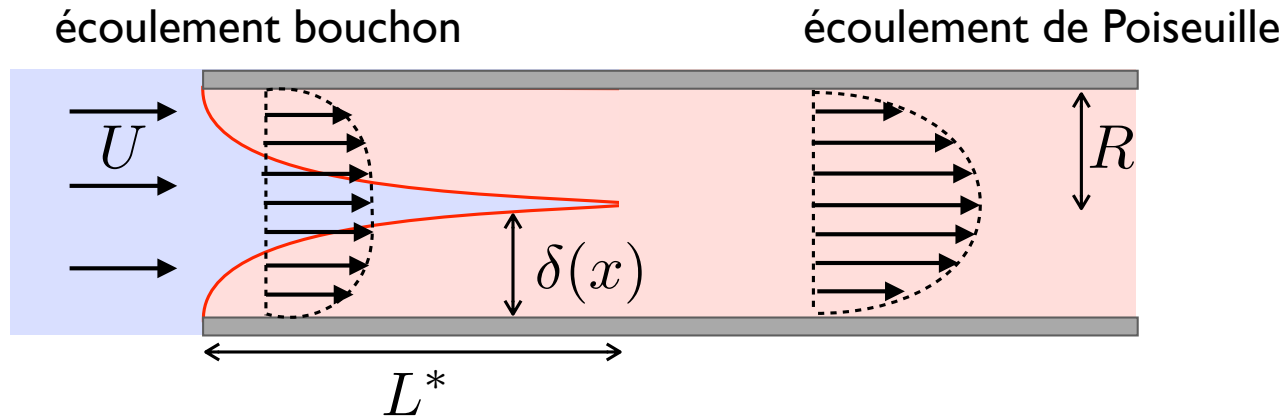
$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

Lien avec Re ?

$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u} \longleftarrow u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

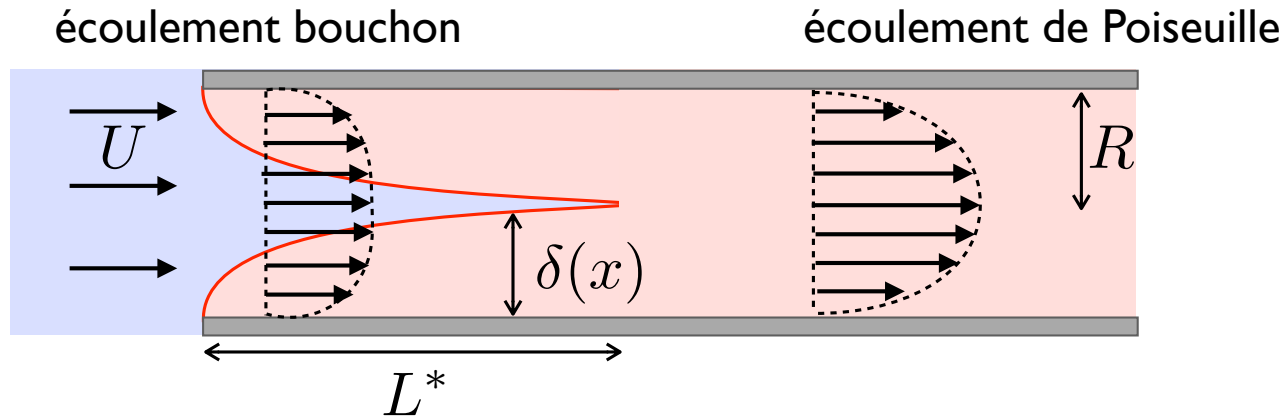
Lien avec Re ?

$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u}$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}$$

$$\Delta u \sim \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} \sim \frac{U}{R^2}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

Lien avec Re ?

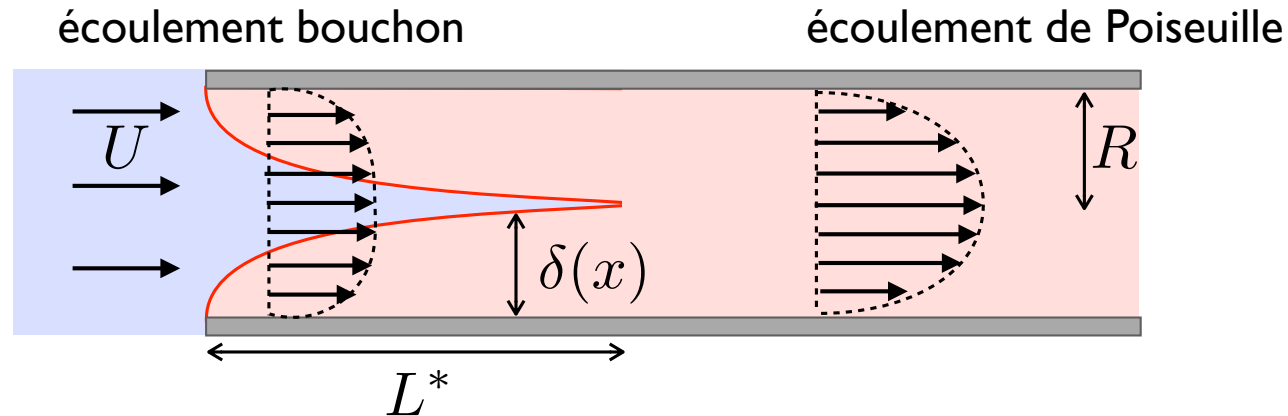
$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u}$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}$$

$$\Delta u \sim \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} \sim \frac{U}{R^2}$$

$$Re = \frac{\rho U R^2}{\eta L} = \frac{L^*}{L}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



$$\delta(L^*) \sim R \quad L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

Lien avec Re ?

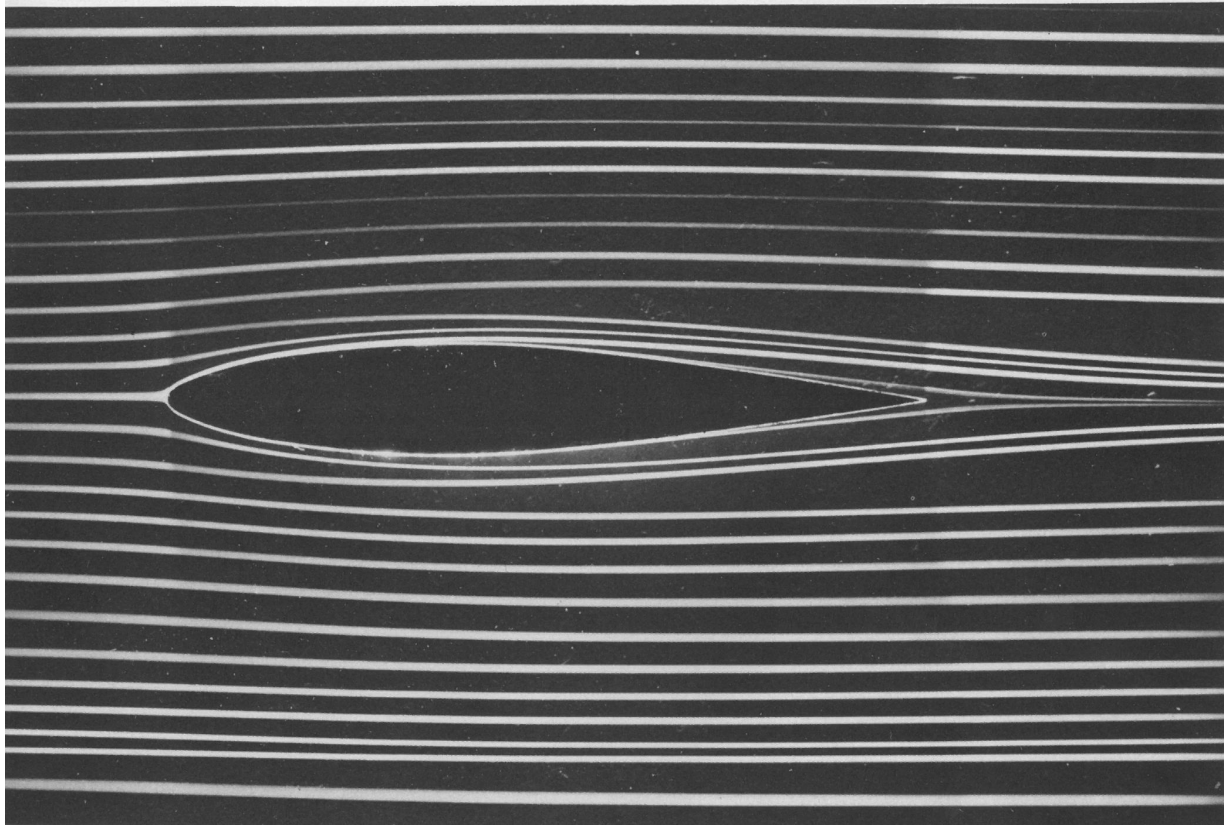
$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u}$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}$$

$$\Delta u \sim \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} \sim \frac{U}{R^2}$$

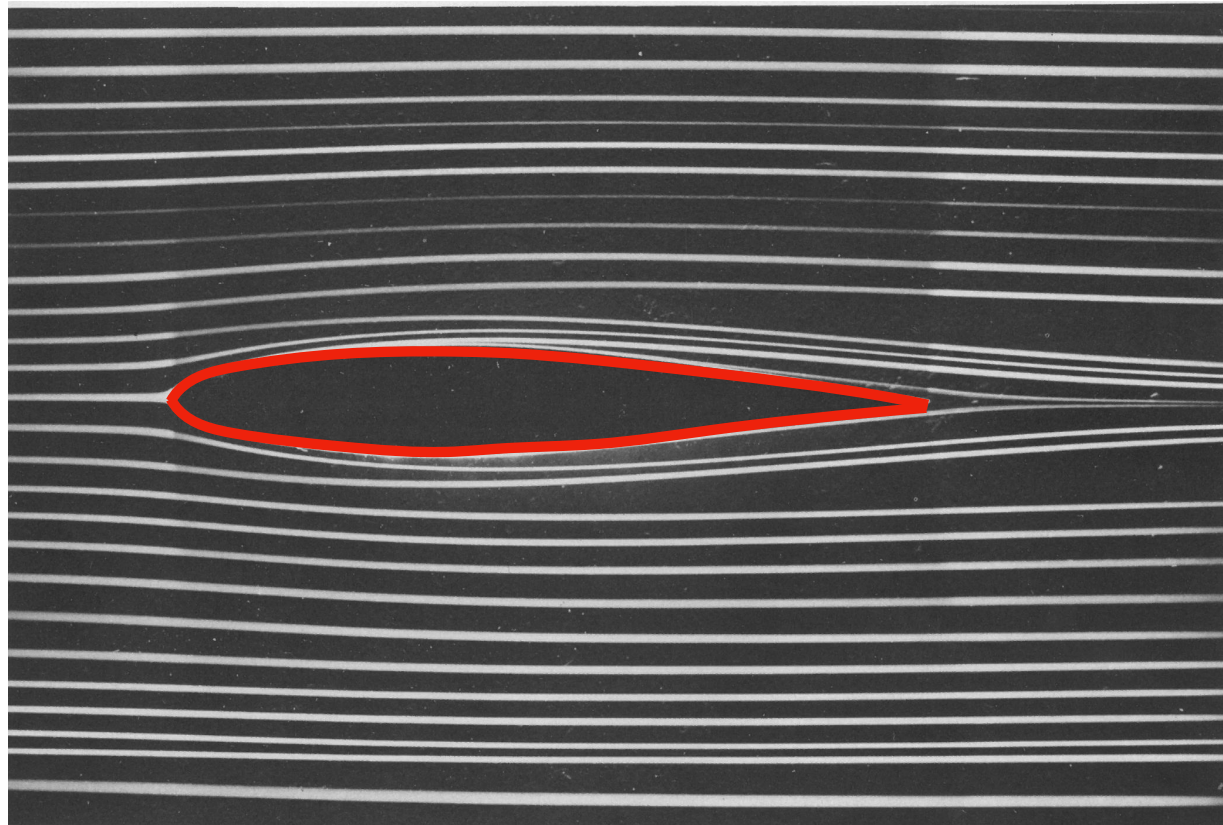
$$Re = \frac{\rho U R^2}{\eta L} = \frac{L^*}{L}$$

$$Re \ll 1 \Leftrightarrow L \gg L^*$$



$Re=7000$

Visualisation de la couche limite autour d'un profil d'aile



$Re=7000$


Écoulements irrotationnels (potentiels) en dehors des couches limites

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \nabla \phi$$

Le champ de vitesse dérive d'un potentiel

Loi de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} + \rho \mathbf{f}$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$


Loi de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} + \rho \mathbf{f}$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \nabla \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) - \rho \mathbf{u} \wedge (\cancel{\nabla \wedge \mathbf{u}})$$

Loi de Bernoulli :

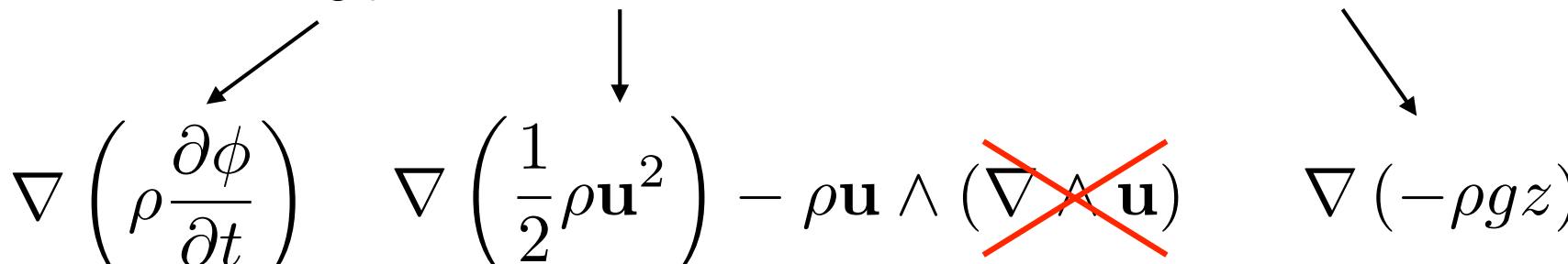
$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} + \rho \mathbf{f} \\
 & \swarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \searrow \\
 & \nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \nabla \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) - \rho \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) \quad \nabla (-\rho g z)
 \end{aligned}$$

Loi de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} + \rho \mathbf{f}$$
$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \nabla \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) - \rho \mathbf{u} \wedge (\cancel{\nabla \wedge \mathbf{u}}) \quad \nabla (-\rho g z)$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g z \right) = 0$$

Loi de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} + \rho \mathbf{f}$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \nabla \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) - \rho \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) \quad \nabla (-\rho g z)$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g z \right) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g z = cte(t)$$

Loi de Bernoulli instationnaire

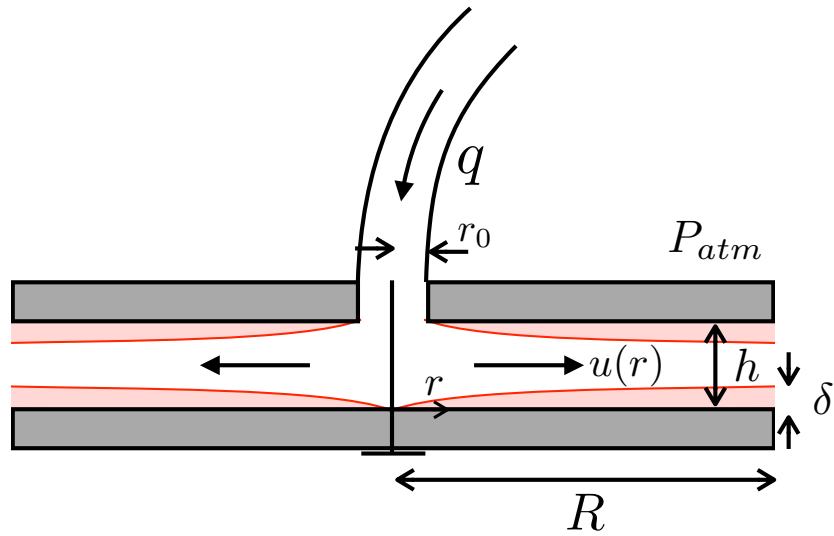
Loi de Bernoulli :

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z = C$$

Loi de Bernoulli en écoulement stationnaire

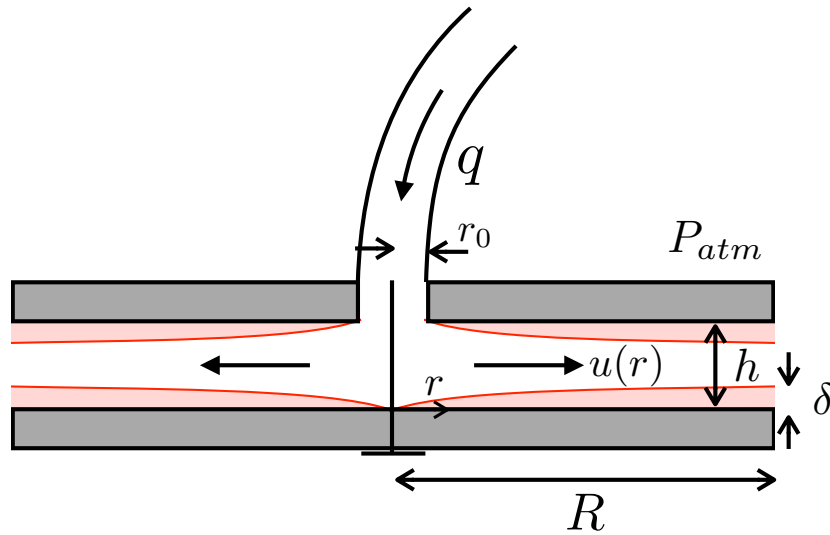
Clap

L'explication à la Bernoulli



Clap

L'explication à la Bernoulli

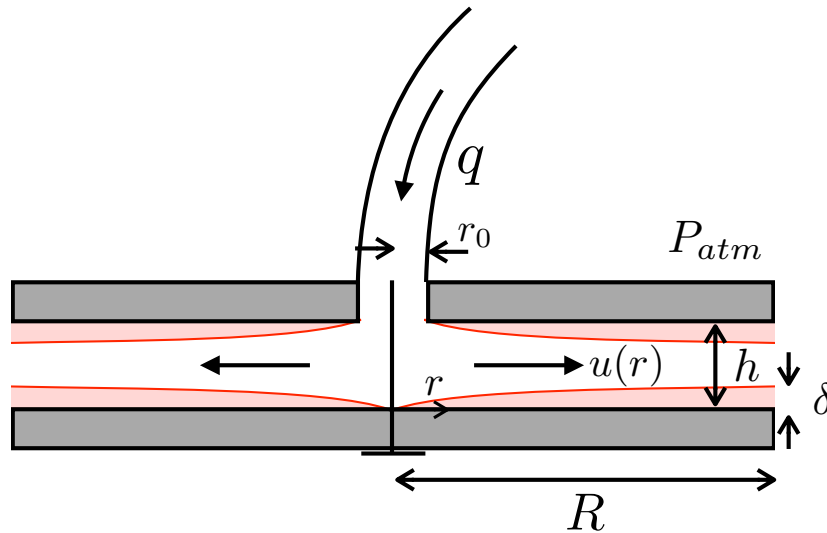


couche limite: $\delta \sim \sqrt{\nu R/U}$

si $h \gg \delta$ couche limite négligeable

Clap

L'explication à la Bernoulli



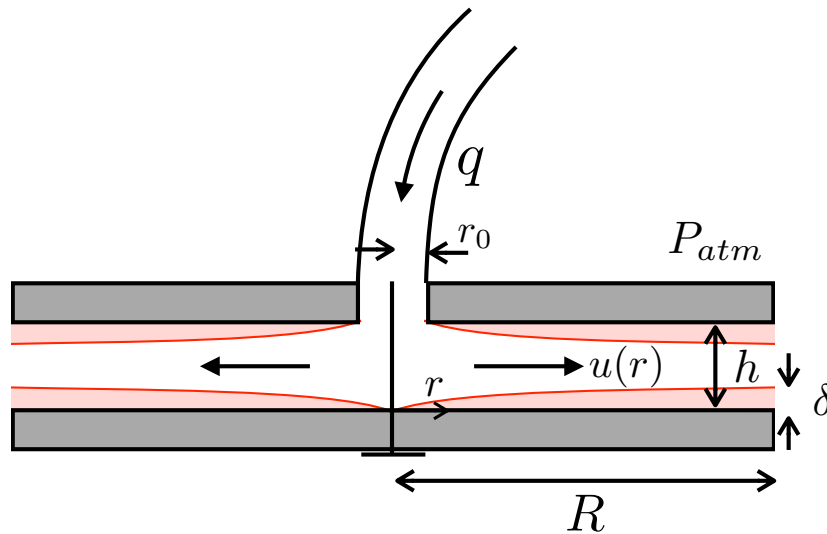
couche limite: $\delta \sim \sqrt{\nu R/U}$

si $h \gg \delta$ couche limite négligeable

conservation du débit: $u(r) = \frac{q}{2\pi r h}$

Clap

L'explication à la Bernoulli



couche limite: $\delta \sim \sqrt{\nu R/U}$

si $h \gg \delta$ couche limite négligeable

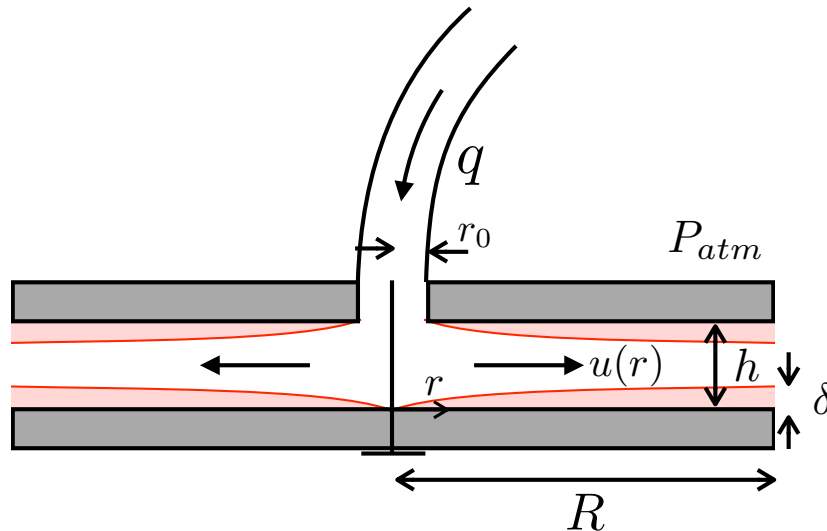
conservation du débit: $u(r) = \frac{q}{2\pi r h}$

Bernoulli: $P(r) + \frac{1}{2}\rho u^2(r) = P_{atm}$

$$P(r) = P_{atm} - \frac{\rho}{8\pi^2} \left(\frac{q}{hr} \right)^2$$

Clap

L'explication à la Bernoulli



couche limite: $\delta \sim \sqrt{\nu R/U}$

si $h \gg \delta$ couche limite négligeable

conservation du débit: $u(r) = \frac{q}{2\pi r h}$

Bernoulli: $P(r) + \frac{1}{2}\rho u^2(r) = P_{atm}$

$$P(r) = P_{atm} - \frac{\rho}{8\pi^2} \left(\frac{q}{hr} \right)^2$$

Force:

$$F = \int_{r_0}^R 2\pi r (P(r) - P_{atm}) dr = -\frac{\rho q^2}{4\pi h^2} \int_{r_0}^R \frac{dr}{r} = -\frac{\rho q^2}{4\pi h^2} \ln(R/r_0)$$

\Rightarrow attraction