TD2 : Ascension capillaire et dynamique d'imprégnation

Hugo Delrieu*, Damien Toquer†, Mathilde Reyssat

1 Forme d'un ménisque et longueur capillaire

1. *On considère une goutte de liquide de taille caractéristique R. Exprimer son énergie de surface et son énergie potentielle de pesanteur. Pour quelle valeur de R ces deux énergies sont-elles égales ? La longueur trouvée s'appelle la longueur capillaire ℓ_c.* L'énergie de surface est $E_s = 4\pi R^2\gamma$, l'énergie potentielle de pesanteur est $E_p \sim (4/3)\pi R^3 \rho g R$. On a $E_s = E_p$ pour $R = \sqrt{\frac{3\gamma}{\rho g}}$. Pour la longueur capillaire, on prend l'ordre de grandeur $\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$. Une goutte de rayon plus petit que la longueur capillaire minimise sa surface, alors qu'une goutte de rayon plus grand s'aplatit sous l'effet de la gravité.

Au voisinage d'une paroi solide, une surface liquide ne reste pas plane, mais remonte le long de la paroi solide pour former un ménisque.

2. *En écrivant l'expression de la pression dans le fluide, trouver la forme du ménisque $z(\alpha)$ où α est l'angle de l'interface avec l'horizontale. On introduira la courbure $\mathcal{C} = \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$, avec R le rayon de courbure de la surface et s l'abscisse curviligne.*

   A l'interface, on peut relier le saut de pression à la courbure via la loi de Laplace : $\Delta P = \gamma\mathcal{C} = P_0 - P_s = P_0 - (P_0 - \rho g z(\alpha))$. Soit l'équation suivante :

   $$\gamma\mathcal{C} = \rho g z(\alpha) \tag{1}$$

   On cherche maintenant à déterminer $\mathcal{C} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$. On a :

   $$ds = R d\alpha$$
   $$dz = \sin\alpha ds$$

   donc

   $$dz = \sin\alpha R d\alpha$$
   $$\Leftrightarrow \mathcal{C} = \sin\alpha \frac{d\alpha}{dz}$$

   On peut alors remplacer dans (1) :

   $$zdz = l_c^2 \sin\alpha d\alpha$$
   $$\int_0^z zdz = \int_0^\alpha \sin\alpha d\alpha$$
   $$\Leftrightarrow z(\alpha) = \sqrt{2} l_c \sqrt{1 - \cos\alpha}$$

3. *En déduire la hauteur de montée z_0 en fonction de l'angle de contact θ. Quelle est son expression en mouillage total ?*

*hugo.delrieu@espci.fr
†damien.toquer@phys.ens.fr

Très proche du contact, on a $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$ et donc :

$$z_0 = \sqrt{2} l_c \sqrt{1 - \sin\theta} \tag{2}$$

En mouillage total, on a $\theta = 0$ et on obtient finalement :

$$z_0 = \sqrt{2} l_c \tag{3}$$

On constate que la longueur capillaire joue ici un rôle important : elle est en effet directement reliée à la hauteur de montée du ménisque, ce qui traduit le fait que cette forme de l'interface résulte de la compétition entre la force de gravité et la force de tension de surface.

2 Hauteur d'équilibre : loi de Jurin

On suppose que le rayon R du tube est très inférieur à la longueur capillaire ℓ_c. Si de plus les parois du tube sont très hydrophiles, on peut supposer que l'interface eau-air est une demi-sphère de rayon R.

4. *Utiliser alors la loi de Laplace pour déterminer la hauteur maximale h_0 de montée dans le tube.*
   La pression au-dessus de la surface vaut P_0, alors que la pression en-dessous vaut $P_0 - \rho g h_0$. D'après la loi de Laplace, la différence de pression entre les deux côtés de l'interface est $2\gamma/R$, i.e.

$$P_0 - (P_0 - \rho g h_0) = \frac{2\gamma}{R} \Rightarrow h_0 = \frac{2\gamma}{\rho g R}. \tag{4}$$

On appelle ce résultat la loi de Jurin.

3 Dynamique d'imprégnation : loi de Washburn

On étudie maintenant la dynamique de montée du fluide dans le tube. A l'instant initial, on immerge le tube dans le fluide.

5. *Quelles sont les forces qui s'exercent sur le fluide dans le tube ?*
   Le fluide est soumis à la force de tension superficielle F_γ qui le tire vers le haut, la force de frottement visqueux F_η et son poids W
6. *Montrer que pour des temps suffisamment courts, les forces visqueuses et le poids sont négligeables devant le terme inertiel. Montrer alors que la hauteur de montée est donnée par*

$$h(t) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho R}} t. \tag{5}$$

   Analysons l'ordre de grandeur des différents termes dans le PFD. La hauteur de montée à l'instant t (t étant proche de l'instant initial) est $h = Vt$. L'ordre de grandeur de la contrainte visqueuse est $\eta V/R$. Alors le PFD s'écrit en ordre de grandeur

$$\frac{(\rho R^2 V t) \cdot V}{t} \sim \gamma R - \left(\eta \frac{V}{R}\right) \cdot V t R - g V t R^2, \tag{6}$$

   soit

$$\rho R^2 V^2 \sim \gamma R - \eta V^2 t - g V R^2 t. \tag{7}$$

   Les termes de frottement visqueux et de poids sont proportionnels à t et donc négligeables à t petit. Donc il suffit de résoudre

$$\frac{\mathrm{d}(MV)}{\mathrm{d}t} = F_\gamma \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho \pi R^2 h \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right) = 2\pi R \gamma, \tag{8}$$

qui s'intègre en

$$\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}(h^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{2\gamma}{R}t \tag{9}$$

(la constante d'intégration est nulle vu que $h(0) = 0$). Une deuxième intégration donne le résultat demandé.

7. *Déterminer l'ordre de grandeur du temps τ au bout du quel les forces visqueuses ne sont plus négligeables. A quoi correspond-t-il au regard du transport de quantité de mouvement ?*
   On a vu que l'ordre de grandeur des forces visqueuses est $\eta V^2 t$, ce qui donne avec l'expression de $V = \dot{h}$ qu'on vient de trouver $\eta\gamma t/(\rho R)$. Les forces visqueuses ne sont donc plus négligeables devant la force de tension de surface γR au bout d'un temps $\tau = \rho R^2/\eta = R^2/\nu$. C'est précisément le temps typique de diffusion de la quantité de mouvement dans le tube, donc le temps que l'écoulement de Poiseuille met à s'établir.

8. *On considère des temps $t > \tau$, de façon à pouvoir maintenant négliger le terme inertiel. On va aussi négliger dans un premier temps l'action du poids, en considérant par exemple un tube immergé horizontalement. Le système considéré est maintenant très similaire à un écoulement de Poiseuille (voir TD1). En particulier, on peut retrouver :*

$$\frac{\partial p}{\partial z} = G, \tag{10}$$

   où G est une constante. À l'aide de la loi de Laplace, tracez la pression le long du tube. En déduire G.

   En bas du tube (à $z = 0$), la pression est égale à la pression extérieure. En haut du tube (à $z = h(t)$), on a une discontinuité de la pression donnée par la loi de Laplace $\frac{2\gamma}{R}$. On en déduit :

$$G = \frac{2\gamma}{Rh(t)}. \tag{11}$$

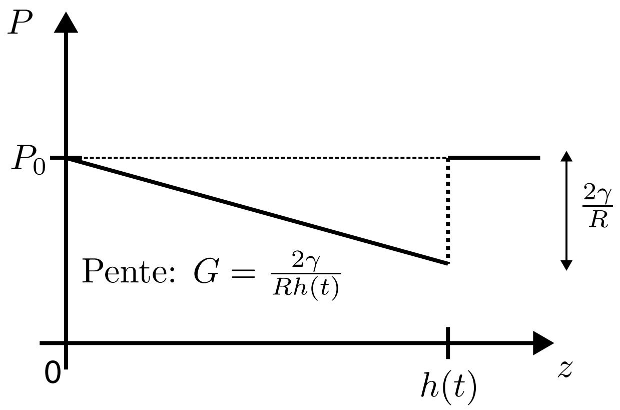

FIGURE 1 – Pression le long du tube.

9. *Écrire les équations de Navier Stokes. Par un raisonnement en ordre de grandeur, déterminer la vitesse de montée du fluide $V = h'(t)$.*
   En l'absence de terme inertiel, et en négligeant le poids, on obtient :

$$\eta\Delta u = \frac{\partial P}{\partial z} = G. \tag{12}$$

   (comme au TD1). Le champ de vitesse varie selon $\vec{e}_r$, sur une longueur typique donnée par R. On a donc en ordre de grandeur :

$$\eta\Delta u \sim \frac{V}{R^2}. \tag{13}$$

On obtient donc :

$$hV \sim \frac{2\gamma}{\eta} R, \tag{14}$$

avec :

$$hV = h \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{dt}} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}h^2}{\mathrm{dt}}. \tag{15}$$

Ce qui nous donne finalement l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}h^2}{\mathrm{dt}} \sim \frac{2\gamma}{\eta} R. \tag{16}$$

10. *Résoudre l'équation obtenue. On obtient la loi de Washburn :*

$$h(t) = \sqrt{\frac{\gamma R}{2\eta} t}. \tag{17}$$

Qualitativement, comment expliquer un tel comportement ? La solution de l'équation est :

$$h^2(t) \sim \frac{4\gamma R}{\eta} t + B, \tag{18}$$

où B est une constante. À l'instant initial $h(t = 0) = 0$, donc $B = 0$. On obtient finalement :

$$h(t) \sim \sqrt{\frac{4\gamma R}{\eta} t}. \tag{19}$$

On retrouve bien la loi de Washburn à un facteur géométrique près. Ce facteur peut être calculé en résolvant exactement l'équation (12), comme au TD1 (bon exercice pour réviser le TD1 !). Physiquement parlant, lorsque le fluide monte, la tension superficielle qui fait monter le fluide ne change pas. Par contre les forces visqueuses augmente, car l'interface entre le fluide et les parois augmentent. Le fluide est de plus en plus freiné, et donc de plus en plus lent, d'où l'évolution en racine carrée.

11. *On considère maintenant à nouveau l'action du poids. Pour quel temps caractéristique retrouve-t-on la loi de Jurin ?*
Le fluide étant de plus en plus lent, la force visqueuse devient de plus en plus faible, et on ne peux plus négliger le poids. Le fluide atteinds alors un équilibre (hydrostatique), et on retrouve la loi de Jurin :

$$h(t \to \infty) = \frac{2\gamma}{\rho g R}. \tag{20}$$

On peut estimer le temps caractéristique τ pour atteindre l'équilibre en égalisant la loi de Washburn et la loi de Jurin :

$$\sqrt{\frac{\gamma R}{2\eta} \tau} = \frac{2\gamma}{\rho g R}, \tag{21}$$

ce qui donne :

$$\tau = \frac{8\eta\gamma}{\rho^2 g^2 R^3}. \tag{22}$$

Référence

P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes.*