# TD2 : Ascension capillaire et dynamique d'imprégnation

Hugo Delrieu*, Damien Toquer†, Mathilde Reyssat

Lorsqu'on plonge un fin tube en verre dans de l'eau, on observe que l'eau remonte dans le tube jusqu'à une hauteur limite. Le but de ce TD est d'étudier en détail ce phénomène, important notamment pour comprendre l'imprégnation par un liquide d'un milieu poreux.

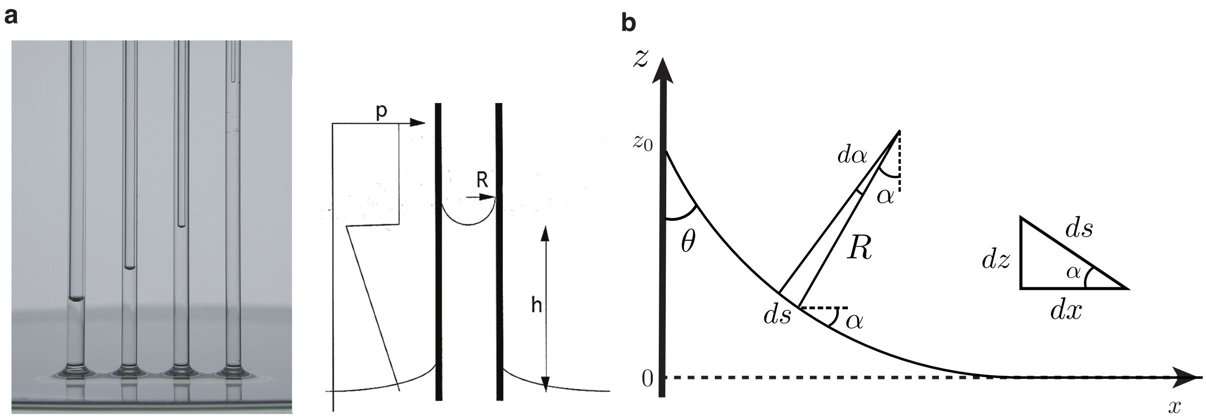


FIGURE 1 – **a.** Ascension capillaire de l'huile silicone dans des tubes de différents rayons, et dimensions du système considéré. **b.** Schéma d'un ménisque au voisinage d'une paroi solide.

## 1 Forme d'un ménisque et longueur capillaire

1. On considère une goutte de liquide de taille caractéristique $R$. Exprimer son énergie de surface et son énergie potentielle de pesanteur. Pour quelle valeur de $R$ ces deux énergies sont-elles égales ? La longueur trouvée s'appelle la longueur capillaire $\ell_c$.

Au voisinage d'une paroi solide, une surface liquide ne reste pas plane, mais remonte le long de la paroi solide pour former un ménisque avec un angle de contact $\theta$.

2. En écrivant l'expression de la pression dans le fluide, trouver la forme du ménisque $z(\alpha)$ où $\alpha$ est l'angle de l'interface avec l'horizontale. On introduira la courbure $\mathcal{C} = \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$, avec $R$ le rayon de courbure de la surface et $s$ l'abscisse curviligne.
3. En déduire la hauteur de montée $z_0$ en fonction de l'angle de contact $\theta$. Quelle est son expression en mouillage total ?

## 2 Hauteur d'équilibre : loi de Jurin

On suppose que le rayon $R$ du tube est très inférieur à la longueur capillaire $\ell_c$. Si de plus les parois du tube sont très hydrophiles, on peut supposer que l'interface eau-air est une demi-sphère de rayon $R$.

4. Utiliser alors la loi de Laplace pour déterminer la hauteur maximale $h_0$ de montée dans le tube.

On appelle ce résultat la loi de Jurin.

*hugo.delrieu@espci.fr
†damien.toquer@phys.ens.fr

## 3 Dynamique d'imprégnation : loi de Washburn

On étudie maintenant la dynamique de montée du fluide dans le tube. A l'instant initial, on immerge le tube dans le fluide.

5. Quelles sont les forces qui s'exercent sur le fluide dans le tube ?
6. Montrer que pour des temps suffisamment courts, les forces visqueuses et le poids sont négligeables devant le terme inertiel. Montrer alors que la hauteur de montée est donnée par

$$h(t) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho R}} t. \tag{1}$$

7. Déterminer l'ordre de grandeur du temps $\tau$ au bout du quel les forces visqueuses ne sont plus négligeables. A quoi correspond-t-il au regard du transport de quantité de mouvement ?

On considère des temps $t > \tau$, de façon à pouvoir maintenant négliger le terme inertiel. On va aussi négliger dans un premier temps l'action du poids, en considérant par exemple un tube immergé horizontalement. Le système considéré est maintenant très similaire à un écoulement de Poiseuille (voir TD1). En particulier, on peut retrouver :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = G, \tag{2}$$

où $G$ est une constante.

8. À l'aide de la loi de Laplace, tracez la pression le long du tube. En déduire $G$.
9. Écrire les équations de Navier Stokes. Par un raisonnement en ordre de grandeur, déterminer la vitesse de montée du fluide $V = h'(t)$.
10. Résoudre l'équation obtenue. On obtient la loi de Washburn :

$$h(t) = \sqrt{\frac{\gamma R}{2\eta}} t. \tag{3}$$

    Qualitativement, comment expliquer un tel comportement ?
11. On considère maintenant à nouveau l'action du poids. Pour quel temps caractéristique retrouve-t-on la loi de Jurin ?

### Référence

P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes.*