TD1 : Bilans de forces, écoulement de Poiseuille

Florentin Daniel[*], Mathilde Reyssat

1. L'incompressibilité impose que le volume de fluide ne varie pas au cours du temps, et donc que la somme des flux de vitesse à travers chaque surface du volume est nulle. On calcule alors le flux à travers chaque surface de cet élément de volume infinitésimal :
   — Flux dans la direction x : $d\Phi_x = [u_x(x+dx) - u_x(x)]rdrd\theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} rdrd\theta dx = \frac{\partial u_x}{\partial x} d\tau$
   — Direction θ : $d\Phi_\theta = [u_\theta(\theta + d\theta) - u_\theta(\theta)]drdx = \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} drd\theta dx = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\tau$
   — Direction r : $d\Phi_r = [(r+dr)u_r(r+dr) - ru_r(r)]d\theta dx = \frac{1}{r}\frac{\partial (ru_r)}{\partial r} d\tau$
   On a donc :

$$d\Phi_r + d\Phi_\theta + d\Phi_x = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$
$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

   On retrouve la condition d'incompressibilité $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, ce qui est attendu car la divergence d'un champ de vecteur est définie comme étant la somme des flux de ce champ dans un élément de volume infiinitésimal. Cette méthode permet également d'obtenir l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques.

   Le système est invariant par rotation selon θ, donc $\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$. Le champ de vitesse est selon la direction x, donc $u_r = 0$. Finalement, on a :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

   et donc le champ de vitesse ne dépend pas de x.
2. Les forces qui s'exercent sur l'élément de volume considéré sont, en projection sur l'axe x :
   — la pression sur la face de gauche : $2\pi r\, p(r,x)\, \mathrm{d}r$;
   — la pression sur la face de droite : $-2\pi r\, p(r, x + \mathrm{d}x)\, \mathrm{d}r$;
   — la contrainte tangentielle sur la face du haut : $2\pi(r + \mathrm{d}r)\mathrm{d}x\, \sigma_{xr}(r + dr)$;
   — la contrainte tangentielle sur la face du bas : $-2\pi r\mathrm{d}x\, \sigma_{xr}(r)$.
   (on a bien fait attention que σ_{xr} est la contrainte exercée par le fluide dans lequel pointe $\mathbf{e}_r$. On se place en régime stationnaire, donc l'accélération de l'élément de volume considéré est nulle. En égalant à 0 la somme des forces que l'on vient d'énumérer, il vient

$$\frac{1}{r}\partial_r(r\sigma_{xr}(r)) = \partial_x p. \tag{2}$$

3. En utilisant la définition de la viscosité, il vient immédiatement

$$\frac{\eta}{r}\partial_r(r\partial_r u) = \partial_x p. \tag{3}$$

4. On effectue un bilan des forces sur le volume infinitésimal dans la direction radiale. Le champ de vitesse n'ayant pas de composante radiale, il n'y a pas de contrainte de cisaillement dans cette direction, il suffit donc de prendre en compte les forces de pression sur les différentes faces. On obtient

$$r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x\, p(r,x) - (r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x\, p(r+\mathrm{d}r, x) + 2\mathrm{d}r\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2} p(r,x) = 0, \tag{4}$$

[*] florentin.daniel@phys.ens.fr

où les deux premiers termes proviennent des pressions exercées sur les faces cylindriques en r et $r + \mathrm{d}r$ et le dernier terme provient des pressions exercées sur les faces radiales en θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$. On en déduit $p(r) - \partial_r(rp(r)) = 0$, donc $\partial_r p = 0$. On peut alors intégrer l'équation (3). Comme le membre de gauche ne dépend que de r et le membre de droite que de x, les deux membres doivent être égaux à une constante G. Une première intégration donne

$$\partial_r u = G\frac{r}{2\eta} + \frac{A}{r}. \tag{5}$$

Pour assurer la continuité du gradient de vitesse (et donc des contraintes) en $r = 0$, il faut prendre la constante d'intégration A nulle. La constante G peut être reliée au gradient de pression constant le long du tube : $G = -\Delta P/L$. On obtient donc

$$\partial_r u = -\Delta P\frac{r}{2\eta L}. \tag{6}$$

5. Une deuxième intégration, assortie de la condition aux limites en $r = R$, donne un profil parabolique pour le champ de vitesse :

$$u(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2). \tag{7}$$

6. Le débit volumique Q est obtenu par intégration du champ de vitesse :

$$Q = \int_0^R \mathrm{d}r\, 2\pi r\, u(r) = \frac{\pi\Delta P}{2\eta L}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{R^4}{8\eta L}\Delta P. \tag{8}$$

Cette formule, connue sous le nom de 'loi de Poiseuille', est l'analogue de la loi d'Ohm en électricité. Ici, la différence de pression ΔP joue le rôle de la tension et le débit Q le rôle du courant. On appelle la quantité $R_h = 8\eta L/R^4$ la résistance hydrodynamique : on note sa dépendance en puissance quatrième du rayon du tube, conséquence du profil de vitesse parabolique qui est lui-même une conséquence de la condition de non glissement sur la paroi. La situation est très différente pour le transport des électrons dans un conducteur électrique : la vitesse moyenne des électrons est la même dans toute la section du conducteur ; la résistance du conducteur est simplement inversement proportionnelle à sa section (πR^2).

7. La longueur de glissement est la profondeur dans la paroi à laquelle l'extrapolation linéaire du profil de vitesse s'annule.

8. On a maintenant

$$u(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}(R^2 - r^2 + 2bR). \tag{9}$$

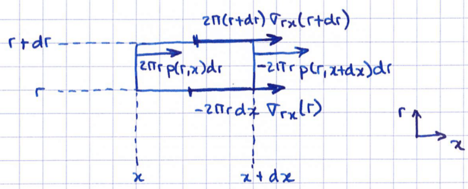
9. L'effet de la condition de glissement partiel est l'ajout d'une vitesse de glissement u_s, constante à travers le tube, au profil de vitesse parabolique :

$$u_s = \Delta P\frac{bR}{2\eta L}. \tag{10}$$

On peut comparer cette vitesse de glissement à la vitesse moyenne sans glissement : $u_0 = Q/\pi R^2$. On a

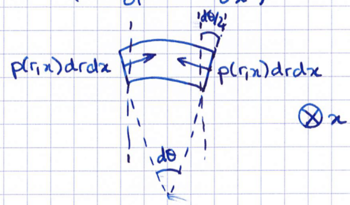
$$\frac{u_s}{u_0} = 4b/R. \tag{11}$$

L'effet du glissement est significatif quand le rayon du tube devient comparable à la longueur de glissement (en général de l'ordre de $1 - 100$ nm).

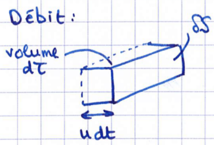


$$2\pi dx\,\big((r+dr)\tau_{rx}(r+dr) - r\tau_{rx}(r)\big) - 2\pi r\,dr\,\big(p(r,x+dx) - p(r,x)\big) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi\,dr\,dx\left(\frac{\partial(r\tau_{rx})}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0.$$



Débit :



$$\delta Q = \frac{d\tau}{dt} = u\,\delta S$$