TD1 : Bilans de forces, écoulement de Poiseuille

Hugo Delrieu*, Damien Toquer†, Mathilde Reyssat

On considère un tube cylindrique de rayon R et de longueur $L \gg R$, rempli d'un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique η. Le fluide est mis en mouvement par l'application d'une surpression ΔP à l'entrée du tube. On suppose qu'un régime stationnaire est atteint ; on cherche dans ce cas à déterminer la relation entre le débit volumique Q et la surpression ΔP. On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, x).

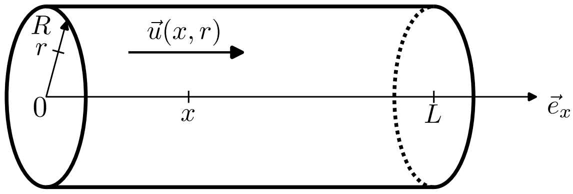


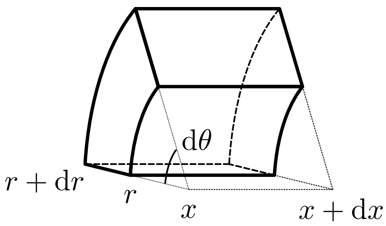
Figure 1 – Schéma du tube cylindrique.

On cherche le champ de vitesse sous la forme $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(r, x)\mathbf{e}_x$.

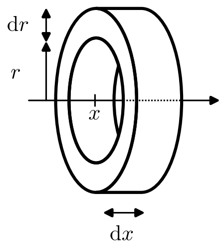
1. On considère un élément de volume infinitésimal compris entre x et $x + \mathrm{d}x$, r et $r + \mathrm{d}r$, θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$, comme sur le schéma 2.(a). À l'aide d'un bilan de quantité de fluide, montrer que l'incompressibilité du fluide impose l'absence de dépendance en x du champ de vitesse. Comparer à l'expression de la divergence en coordonée cylindrique.

On note $p(r, x)$ la pression dans le fluide, et $\sigma_{xr}(r_0)$ la contrainte tangentielle en $r = r_0$, c'est-à-dire la force exercée dans la direction x sur une surface unité de normale $\mathbf{e}_r$ par le fluide situé en $r > r_0$.

2. On considère un élément de volume infinitésimal compris entre x et $x+\mathrm{d}x$, r et $r+\mathrm{d}r$, comme sur le schéma 2.(b). Faire un bilan de forces dans la direction x sur cet élément de volume.



(a) Q.1. et 4.



(b) Q.2.

Figure 2 – Schéma des éléments de volume considérés.

La viscosité dynamique est le coefficient de proportionnalité entre la contrainte tangentielle et le gradient de vitesse : $\sigma_{xr} = \eta \partial_r u$.

3. En déduire une équation différentielle reliant p et u.

4. On reconsidère maintenant l'élément de volume défini sur le schéma 2.(a). À l'aide d'un bilan de force dans la direction r, montrer que la pression ne dépend pas de r. Intégrer alors une première fois l'équation obtenue à la question 3. On exprimera la constante qui apparaît en fonction de ΔP et L.

*hugo.delrieu@espci.fr
†damien.toquer@phys.ens.fr

5. On suppose une condition de non-glissement aux parois : $u(R) = 0$. En déduire l'expression du champ de vitesse.
6. Montrer que le débit volumique Q est donné par

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{L}.$$

On suppose maintenant qu'il y a du glissement aux parois : on introduit une longueur de glissement b, et la condition sur la vitesse à la paroi est alors donnée par $u(R) = -b\partial_r u|_R$.

7. Interpréter géométriquement cette condition.
8. Trouver la nouvelle expression du champ de vitesse.
9. En calculant le nouveau débit volumique, discuter de la taille du canal à partir de laquelle le glissement affecte significativement le champ de vitesse.