TD7 : Traînée et portance

Florentin Daniel*, Mathilde Reyssat

1 Comment arrêter une balle de Magnum

Quelle force la balle ressent-elle lorsqu'elle pénètre dans l'eau qui remplit les ballons ?
En déduire la dynamique de la balle. Peut-on estimer une longueur d'arrêt ?
Application numérique : la balle a une masse de 20 g, une vitesse initiale de l'ordre de 400 m/s, un rayon de 5 mm.

Il faut d'abord estimer $Re \sim 2.10^6$. Du coup traînée en U^2.
On n'est pas loin de la vitesse du son, mais on va quand même faire une estimation dans la limite incompressible.

$$m\frac{dU}{dt} = -C_x\frac{1}{2}\rho_l U^2 S$$

avec ici $S = \pi R^2$ et $C_x \sim 0.5$. On n'a pas tenu compte d'effet de masse ajoutée liée à l'accélération de l'eau autour de la masse qui se déplace.
On simplifie en

$$\frac{dU}{dt} = -\alpha U^2$$

avec $\alpha = \frac{C_x\rho_l S}{2m}$

$$\frac{dU}{U^2} = -\alpha dt$$

$$-\frac{1}{U} + \frac{1}{U_o} = -\alpha t$$

$$U = \frac{U_0}{1+\alpha U_0 t}$$

On en déduit :

$$z = \int \frac{U_0}{1+\alpha U_0 t}dt = \frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha U_0 t)$$

$$1+\alpha U_0 t = \frac{U_0}{U}$$

$$z = -\frac{1}{\alpha}\ln(U/U_0)$$

D'où $U = U_0\exp(-\alpha z)$. On a donc une longueur caractéristique de pénétration $\ell = 1/\alpha$.
AN : $1/\alpha \simeq 1$ m, ce qui correspond bien à l'expérience. Ce qui est remarquable est que cette longueur est indépendante de la vitesse d'impact.

*florentin.daniel@phys.ens.fr

2 Jeu de balles

Quelle est l'équation du mouvement d'une balle projetée à une vitesse U_0 ?
Quelle est la vitesse terminale U_∞ obtenue lorsque la traînée aérodynamique équilibre le poids de la balle ?
Décrire les deux configurations limites $U_0 \ll U_\infty$ et $U_0 \gg U_\infty$. Commenter les cas de la balle de basket et du volant de badminton.
En s'inspirant de l'exemple de la balle de Magnum stoppée par les ballons, déterminer une longueur d'arrêt ℓ_{max}. Commenter la comparaison de cette longueur avec celle des terrains de jeu.
Les piscines de plongeon ont généralement une profondeur de 5 m pour un plongeoir de 10 m de haut. Aurait-on besoin d'augmenter la profondeur de ces piscines pour des compétitions de Red Bull cliff diving de 28m de haut ?

On est à grand Re, donc la traînée est en U^2.

$$m\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{2}C_x\rho\pi R^2 U\mathbf{U} + m\mathbf{g}$$

La vitesse terminale est donnée par :

$$mg = \frac{1}{2}C_x\rho\pi R^2 U_\infty^2$$

soit

$$U_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{C_x\rho\pi R^2}}$$

Si $U_0 \ll U_\infty$, la traînée est négligeable par rapport à la gravité. La trajectoire est donc une parabole classique.
Si $U_0 \gg U_\infty$, c'est la gravité qui est négligeable devant la traînée (en tout cas au départ). Pour schématiser, la balle part tout droit avec sa direction initiale θ_0 selon la même équation que la balle de Magnum. Elle ralentit sur une distance typique $\ell_{max} \sim \frac{2m}{C_x\pi R^2\rho_f}$. A ce moment là, c'est la gravité qui l'emporte et la balle tombe tout droit.
Balle de basket (avec $C_x \simeq 0.5$) : $U_\infty = 24\,\mathrm{m/s}$, d'où $U_0/U_\infty = 0.29$. OK parabole.
Volant de badminton : $U_\infty = 10\,\mathrm{m/s}$, d'où $U_0/U_\infty = 5.8$. OK Tartaglia.
On observe que les terrains de jeu ne sont jamais beaucoup plus grands que ℓ_{max}. En effet cela perdrait de son intérêt s'il fallait 10 lancers de balle pour parcourir le terrain. En revanche certains sports de rapidité utilisent des terrains petits devant ℓ_{max}.
Le cas du plongeon est très proche de celui de la balle. La profondeur caractéristique de pénétration est indépendante de la vitesse initiale. Si on prend un plongeur de 100 kg qui présente une surface de $(0.25)^2\,\mathrm{cm}^2$, on obtient $\ell_{max} \sim 2\,\mathrm{m}$. On a donc de la marge.

3 Balistiques de spores

Sachant que lors de la coalescence la goutte de rayon R_D s'étale dans le film déjà présent sur le spore, quel est le gain en énergie de surface ?
En déduire une estimation de la vitesse d'éjection du spore.
L'application numérique est-elle comparable à vitesse déduite des images de la vidéo ?

Quelle est alors la dynamique du spore ?
A quelle distance de son point d'attache le spore est-il éjecté ?

En gros la surface de la goutte disparaît dans le film. Le gain est donc d'ordre $4\pi R_D^2\gamma$.
Si toute cette énergie est transformée en énergie cinétique du spore (avec sa goutte), on obtient :

$$U \sim \sqrt{\frac{8\pi R_D^2\gamma}{m_S + m_D}}$$

AN : $U \sim 4\,\mathrm{m/s}$. En réalité c'est plutôt 1 m/s ($10\,\mu$m en environ $10\,\mu$s) on a un peu surestimé le gain en énergie de surface (la surface du film augmente légèrement lors de la coalescence) et on a négligé l'énergie de rupture du pied.

Avant de foncer tête baissée, il faut commencer par estimer le nombre de Reynolds. $Re \sim 3.10^{-6}/1,4.10^{-5} \sim 0.2$. On est plutôt en régime de Stokes : $T = 6\pi\eta R_S U$.
La dynamique du spore suit alors :

$$m_S \frac{d\mathbf{U}}{dt} = -6\pi\eta R_S \mathbf{U} + m_S \mathbf{g}$$

Si on se contentente de la composante horizontale, on se retrouve avec :

$$\frac{dU_x}{dt} + \frac{6\pi\eta R_S}{m_S} U_x = 0$$

Ce qui conduit à :

$$U_x = U_{x0} \exp(-t/\tau) \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{m_S}{6\pi\eta R_S}$$

Et pour la translation :

$$x = \frac{m_S U_{x0}}{6\pi\eta R_S}(1 - \exp(-t/\tau))$$

AN : $\eta_{air} = 1,8.10^{-5}\,\mathrm{mPa.s}$, $x_{max} = 300\,\mu$m. Ce n'est pas beaucoup, mais visiblement cela suffit au spore pour éviter de se recoller sur les lamelles du champignon.

4 Ça plane pour moi

En supposant que l'angle d'attaque soit idéalement ajusté et que la contribution des forces aérodynamiques sur le corps du planeur soient négligeables, quel est l'angle de chute dans le cas le plus favorable ?
Quelle est la vitesse de translation du planeur ?
Application numérique pour l'aile illustrée pour un planeur de masse 500 kg (avec pilote à bord) et une surface ailaire de $15\,\mathrm{m}^2$.

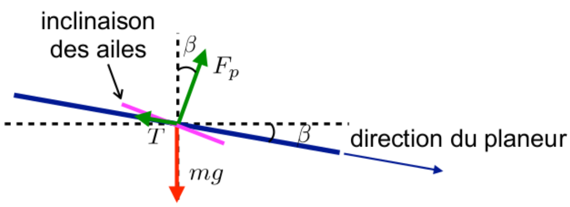
En régime stationnaire, les forces de portance traînée et poids s'équilibrent.
Projection horizontale : $F_p \sin\beta = T\cos\beta$, d'où

$$\tan\beta = \frac{T}{F_p} = \frac{C_x}{C_p}$$

Si on prend un $C_p/C_x \sim 40$, on a $\beta \sim 2.5\% \sim 1,5°$.
Projection verticale : $mg = P\cos\beta + T\sin\beta$
On peut largement négliger T et prendre $\beta = 0$, ce qui nous donne :

$$C_p \frac{1}{2}\rho U^2 S \simeq mg$$

Soit, avec $C_p \simeq 0.6$, $U \sim 33\,\mathrm{m/s} = 120\,\mathrm{km/h}$.
Le taux de chute correspondant est de 0.8 m/s ce qui correspond à peu près aux données d'un vrai planeur : www.chalons-planeur.net/planeurs


inclinaison
des ailes
β
F_p
T
β
direction du planeur
mg