TD6 : Crevettes et cavitation

Florentin Daniel*, Mathilde Reyssat

1. *Quelle doit-être la vitesse du jet d'eau dû au claquement de la pince pour qu'il y ait formation d'une bulle de cavitation ?* On peut utiliser la relation de Bernoulli : $\frac{1}{2}\rho u^2 + p = P_0$ pour un écoulement parfait irrotationnel, avec P_0 la pression dans l'eau immobile autour de la crevette qu'on supposera égale à la pression atmosphérique (ces crevettes habitent en eau peu profonde). Pour qu'il y ait cavitation il faut que la pression p devienne inférieure à la pression de vapeur saturante, donc $u \sim \sqrt{P_0/\rho} \sim 10~\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
2. *A partir de la figure 2, déterminer le temps d'implosion de la bulle. En déduire le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement.* Le temps d'implosion est $\tau \sim 0.3$ ms, le rayon de la bulle est $R_0 \sim 3$ mm, ce qui donne $Re = \rho R^2/(\eta\tau) = 40000$. On peut négliger les effets visqueux.
3. *Pourquoi l'écoulement peut-il être considéré incompressible et irrotationnel ?* La vitesse typique de l'écoulement est $U \sim 10~\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, bien inférieure à la vitesse du son ($1000~\mathrm{m \cdot s^{-1}}$), donc on peut négliger les effets de compressibilité. L'écoulement est généré par un gradient de pression et on néglige les effets visqueux, donc il est irrotationnel.
4. *Dans ce régime, rappeler les équations qui décrivent le mouvement de l'eau.* L'équation d'Euler
$$\rho\partial_t u + \rho(u\cdot\nabla)u = -\nabla p, \tag{1}$$
et la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot u = 0$.
5. *Trouver par un raisonnement en loi d'échelle le temps d'implosion de la bulle τ.* L'implosion de la bulle est due à l'action des forces de pression, auxquelles s'oppose l'inertie de l'eau qui va remplacer la vapeur dans la bulle. Donc en loi d'échelle $R_0^2 P_0 \sim \rho R_0^3 R_0/\tau^2$, donc $\tau \sim R_0\sqrt{\rho/P_0}$.

On étudie maintenant le problème de façon quantitative. On considère une bulle sphérique de rayon $R = R_0$ à $t = 0$. On fait l'hypothèse qu'elle commence à s'effondrer à vitesse nulle ($\dot{R}(t = 0) = 0$). La pression de vapeur dans la bulle P_a est petite devant la pression P_0 dans le liquide loin de la bulle. On note γ la tension de surface eau-air.

6. *Déterminer le potentiel des vitesses ϕ et en déduire le champ de vitesse $u(r,t)$ en fonction de $R(t)$.* Le potentiel des vitesses vérifié l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$. En symétrie sphérique, cela donne $\phi(r,t) = A(t)/r + B(t)$. La symétrie sphérique impose $\vec{u} = u(r,t)\vec{e}_r$, et donc $u(r,t) = -A(t)/r^2$. On a $u(R(t),t) = \dot{R}$, donc $u(r,t) = R^2\dot{R}/r^2$.
7. *En intégrant l'équation d'Euler, montrer que $R(t)$ vérifie l'équation de Rayleigh-Plesset :*
$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{2\gamma}{\rho R} = -\frac{P_0}{\rho}. \tag{2}$$
On injecte dans l'équation d'Euler :
$$\rho\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{R^2\dot{R}}{r^2}\right) + \rho\left(\frac{R^2\dot{R}}{r^2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{R^2\dot{R}}{r^2}\right) = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}. \tag{3}$$
En développant, on obtient
$$\frac{1}{r^2}(R^2\ddot{R} + 2R\dot{R}^2) - \frac{2R^4\dot{R}^2}{r^5} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}. \tag{4}$$

*florentin.daniel@phys.ens.fr

On peut intégrer entre $r = R(t)$ et $r = +\infty$:

$$-\frac{P_0 - p(R,t)}{\rho} = R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 - \frac{\dot{R}^2}{2} \tag{5}$$

La loi de Laplace donne la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la bulle : $P_a = P(R,t) + \frac{2\gamma}{R}$. En négligeant P_a devant P_0, on obtient l'équation demandée.

8. *Montrer que le terme de tension de surface est négligeable dans les conditions considérées. En déduire que*

$$\frac{\mathrm{d}(\dot{R}^2 R^3)}{\mathrm{d}t} = -\frac{2P_0}{3\rho}\frac{\mathrm{d}R^3}{\mathrm{d}t}. \tag{6}$$

On compare les ordres de grandeurs des termes $R\ddot{R}$ ($10\ \mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$) et $2\gamma/\rho R$ ($0.01\ \mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$). Ensuite, on multiplie les deux membres par $2R^2\dot{R}$ pour reconnaitre à gauche $\mathrm{d}R^3/\mathrm{d}t$, et à droite on se retrouve avec $2R^3\dot{R}\ddot{R} + 3R^2\dot{R}^3$, qui n'est autre que $\mathrm{d}(\dot{R}^2R^3)/\mathrm{d}t$.

9. *Calculer le temps τ d'implosion de la bulle et vérifier la cohérence avec les données expérimentales. On donne*

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}}\,\mathrm{d}x \approx 0.747. \tag{7}$$

On peut intégrer une fois :

$$\dot{R}^2 R^3 = -\frac{2P_0}{3\rho}(R^3 - R_0^3). \tag{8}$$

En séparant les variables et en posant $x = R/R_0$ on obtient le temps d'implosion

$$\tau = R_0\sqrt{\frac{3\rho}{2P_0}}\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}}\,\mathrm{d}x \approx 0.915 \times R_0\sqrt{\frac{\rho}{P_0}}. \tag{9}$$

Numériquement on trouve 270 μs ce qui est cohérent avec la valeur expérimentale.