

TD5 : Tourbillons

Florentin Daniel*, Mathilde Reyssat

1 Un tourbillon sans vorticit e ?

Intuitivement nous associons la notion de vorticit e à celle de tourbillons. Il s'agit cependant de deux notions compl etement distinctes. Par exemple, l'étude des couches limites d'un écoulement visqueux parallèle de type Couette est rotationnel. Réciproquement, peut-on imaginer un tourbillon sans vorticit e ?

On se place ici dans le cas d'un écoulement irrotationnel.

1. Traduire le caractère irrotationnel du champ de vitesse \mathbf{u} en introduisant un potentiel de vitesse ϕ . Comment se traduit l'incompressibilité de l'écoulement ?

Irrotationnel : $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{u} = \nabla \phi$

Incompressible : $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \rightarrow \nabla \cdot (\nabla \phi) = \Delta \phi = 0$

2. On cherche des solutions axisymétriques pour l'écoulement de la forme $\mathbf{u} = u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$. Quelle est la forme de ϕ compatible avec cette condition ?

$\mathbf{u} = \nabla \phi$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u_\theta(r) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \rightarrow \phi = u_\theta(r)r\theta + B = A\theta + B \quad (1)$$

3. Quelle est l'expression de la vitesse u_θ ? Exprimer cette dernière en introduisant la circulation correspondante Γ .

De l'équation précédente : $\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \rightarrow u_\theta(r) = A/r$. On exprime ici la conservation du moment cinétique.

4. Retrouver cette expression en intégrant la circulation de la vitesse sur une couronne fendue de fluide.

Si on intègre sur une couronne fendue, ou simplement un arc de cercle d'ouverture $\Delta\theta$, on retrouvera la conservation du moment cinétique, à savoir que $u_\theta(r)r = \text{constante}$. Pour introduire la notion de circulation Γ , on considère que le fluide est mis en mouvement par une singularité en $r = 0$ avec une circulation $\Gamma = 0$. Le calcul sur un cercle de rayon r donne alors :

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} u_\theta(r)r d\theta = 2\pi r u_\theta(r) = \Gamma \quad (2)$$

(De manière intéressante, on peut appliquer le théorème de Stokes à l'équation précédente : $\int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$. La dernière intégrale est nulle partout (fluide irrotationnel) sauf en $r = 0$ où l'on considère que l'on a un Dirac).

5. Comment varie la pression dans l'écoulement ? Cette distribution est-elle compatible avec l'idée intuitive qu'on est attiré par "l' il du cyclone" ?

Bernoulli : $P + \frac{1}{2}\rho u^2 = P_0 \rightarrow P(r) = P_0 - \rho \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r^2}$. Gradient de pression dirigé vers l'intérieur du cyclone ; on est attiré.

*florentin.daniel@phys.ens.fr

Commentaire Pour un fluide parfait, Bernoulli peut s'appliquer dans deux cas :

- Pour un écoulement stationnaire, si les forces volumiques dérivent d'un potentiel φ , on a le long d'une ligne de courant :

$$\frac{\rho u^2}{2} + p + \rho\varphi = cste \quad (3)$$

(Pour $\varphi = gz$ on retrouve l'action du poids par exemple)

- Pour un écoulement irrotationnel dans tout le volume. En effet, partant de l'équation d'Euler, on a :

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u\right) = -\nabla p + \rho f \quad (4)$$

On note maintenant les hypothèses nécessaires pour la suite, ainsi qu'une relation vectorielle :

- $u = \nabla\phi$ (du caractère irrotationnel de l'écoulement)
 - $f = -\nabla\varphi$ (f dérive d'un potentiel)
 - $u \cdot \nabla u = \nabla \frac{u^2}{2} - (\nabla \times u) \times u = \nabla \frac{u^2}{2}$ ici car $\nabla \times u = 0$
- Eq.(4) se réécrit alors :

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{u^2}{2} + p + \rho\varphi \right) = 0 \quad (5)$$

Cette équation ressemble fortement au premier cas, mais la différence fondamentale vient du fait (au delà du terme non stationnaire) qu'elle est vraie dans tout le volume, et non plus seulement selon une ligne de courant. On peut donc appliquer Bernoulli ici, même s'il n'existe pas de ligne de courant allant de $r = \infty$ à un r donné.

2 Canon à vortex et Valse de tourbillons

Vous avez peut-être déjà réalisé des canons à vortex ? C'est très simple, il suffit de percer un trou circulaire dans un carton, de remplir ce dernier de fumée (pour la visualisation) et de taper dessus. Un vortex annulaire sort alors du trou et peut venir culbuter une pile de gobelets en plastique.

Pour en savoir plus, n'hésitez pas à visionner les vidéos de la chaîne so cool Physics girl : <https://youtu.be/pnbJEg9r1o8> et <https://youtu.be/N7dRWy0v20>

1. Sachant que les potentiels de vitesse sont des champs additifs (comme en électrostatique), comment une paire de vortex contrarotatifs vont-ils se comporter ?

Composition des vitesses. Notons O_1 et O_2 les centres respectifs des deux vortex. Le champ de vitesse au coeur des axes passant par O_1 et O_2 est dû uniquement à la vitesse induite par l'autre tourbillon ; elle est dirigée suivant la normale au segment O_1O_2 , et a un module égal respectivement à $v_1 = \Gamma_2/2\pi d$ et $v_2 = \Gamma_1/2\pi d$. Deux cas particuliers nous intéressent ici :

- $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$. L'ensemble des deux lignes de déplace à la même vitesse dans la direction perpendiculaire aux lignes. Dans ce cas, la vitesse commune est égale en norme à $\Gamma/2\pi d$.
- $\Gamma_1 = \Gamma_2$ L'ensemble des deux lignes tourne autour du milieu de O_1O_2 avec une vitesse angulaire $\Gamma/\pi d^2$

Ref : *Hydrodynamique physique*, E.Guyon, J-P. Hulin, L.Petit

2. L'anneau de l'exemple illustré se translate à une vitesse de l'ordre de 10 m/s, pour un diamètre d'environ 20 cm. Quelle est la circulation correspondante ?

$U = \frac{\Gamma}{2\pi d} \rightarrow \Gamma \sim 12m^2/s$. (d : distance entre les vortex).

3. Il est également possible de créer des lignes de tourbillons en claquant des portes. C'est ce qu'on réalisé nos collègues marseillais. Ils ont ainsi montré que deux vortex corotatifs se mettaient à valser. Si les deux vortex ont la même circulation Γ , quelle est la vitesse angulaire de leur valse ? Au bout d'un certain temps, nos deux danseurs ralentissent et fusionnent. De

quel ingrédient avons-nous oublié de tenir compte dans notre description ?

$\Omega d/2 = u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi d}$. On a oublié la dissipation. La vorticité est concentrée sur une ligne singuliere (cf vidéo Physics girl).

3 Le vortex de Lamb-Oseen ¹

On considère un vortex de démarrage, engendré par la mise en rotation d'une surface solide dans un fluide.

On se propose ici d'étudier la structure spatiale de ce tourbillon et son évolution temporelle. Nous faisons les hypothèses suivantes :

- Dans le repère du laboratoire, le tourbillon peut ˆtre modélisé par un écoulement plan instationnaire   symétrie de révolution de vitesse :

$$\mathbf{U} = u_\theta(r, t)\mathbf{e}_\theta$$

- Le fluide est newtonien, incompressible, homogène et l'on néglige les forces de volume.

1. *Ecrire l'équation locale d'évolution de l'impulsion et en déduire le champ de pression ainsi que l'équation d'évolution de u_θ .*

Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Coordonnées cylindriques (divergence de \mathbf{u} vérifiée) :

$$\begin{cases} -\frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} & (\mathbf{e}_r) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} \right) & (\mathbf{e}_\theta) \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) \end{cases} \quad (7)$$

NS selon \mathbf{e}_r indique que la pression sera minimale au centre du vortex (gradient de pression dirigé vers l'intérieur du vortex).

NS selon \mathbf{e}_θ indique que le champ de pression peut s'écrire comme : $p(r, \theta, t) = A(r, t)\theta + B(r, t)$. La périodicité $p(r, \theta, t) = p(r, \theta + 2\pi, t)$ donne $A(r, t) = 0$, donc NS selon \mathbf{e}_θ peut se simplifier en :

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) \quad (8)$$

2. *Chercher une solution auto-semblable pour u_θ vérifiant la condition initiale $u_\theta(r, t = 0) = \frac{\Gamma}{2\pi r}$, où Γ est la circulation du tourbillon.*

On regarde sous quelle condition l'équation précédente pour u_θ , vérifiant :

$$u_\theta(r, t = 0) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (9)$$

est invariante par transformation linéaire :

$$u_\theta = A u'_\theta, t = B t', \nu = C \nu', r = D r', \Gamma = E \Gamma' \quad (10)$$

Eq. 11 devient :

$$\frac{\partial u'_\theta}{\partial t'} = \frac{BC}{D^2} \nu' \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' u'_\theta) \right) \quad (11)$$

Eq. 12 devient :

$$u_\theta(r', t' = 0)' = \frac{E}{AD} \frac{\Gamma'}{2\pi r'} \quad (12)$$

1. Les données expérimentales de ce sujet sont issues de la thèse de Patrice Meunier, réalisée avec Thomas Leweke.

Les deux systèmes sont identiques si $BC = D^2$ et $E = AD$, ie :

$$\frac{u_\theta r}{\Gamma} = \frac{u'_\theta r'}{\Gamma'}, \quad \frac{r^2}{\nu t} = \frac{r'^2}{\nu' t'} \quad (13)$$

On cherche donc $u_\theta(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} f\left(\frac{r}{\sqrt{\nu t}}\right) = u_\theta^0(r) f(\eta)$. On réinjecte l'expression précédente dans l'équation 11 :

$$\eta f'' - \left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right) f' = 0 \quad (14)$$

On intègre une fois :

$$f' = A\eta e^{-\frac{\eta^2}{4}} + B \quad (15)$$

Finalement :

$$f = -2Ae^{-\frac{\eta^2}{4}} + B \quad (16)$$

Les conditions initiales (en $t = 0$ et en $t = +\infty$ par exemple (non divergence de la vitesse en $r = 0$)) se traduisent $f(0) = 0$ et $f(\infty) = 1$. Finalement :

$$u_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} f(\eta), \quad \text{avec} \quad f(\eta) = 1 - e^{-\frac{\eta^2}{4}} \quad (17)$$

3. *A l'aide de ces résultats, commenter la Figure 1. On peut effectuer un développement limité du résultat précédent quand r tend vers 0 :*

$$u_\theta(r) \underset{r \sim 0}{\sim} \frac{\Gamma}{8\pi} \frac{r}{\nu t} = \Omega r \quad (18)$$

Dans la partie du domaine proche du centre, le vortex est en rotation solide (i.e aucune des particules de fluide n'a de déplacement relatif par rapport à ses voisines). Il s'agit de la partie pour r entre 0 et a_{max} sur la Figure. A l'inverse, loin du centre,

$$u_\theta(r) \underset{r \sim \infty}{\sim} \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (19)$$

ce qui correspond à la deuxième partie de la courbe. Le coeur du vortex est alors rotationnel, tandis que l'extérieur ne l'est pas.

4. *Déterminer le champ de vorticité et montrer que partant d'un champ irrotationnel, la viscosité rend l'écoulement rotationnel.*

$\omega_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) \rightarrow \omega_z = \frac{\Gamma}{4\pi \nu t} e^{-\frac{\eta^2}{4}}$ On a une solution initiale irrotationnelle (cf exercice 1), et on obtient à la fin une vorticité non nulle. La viscosité rend un écoulement initialement irrotationnel, rotationnel.

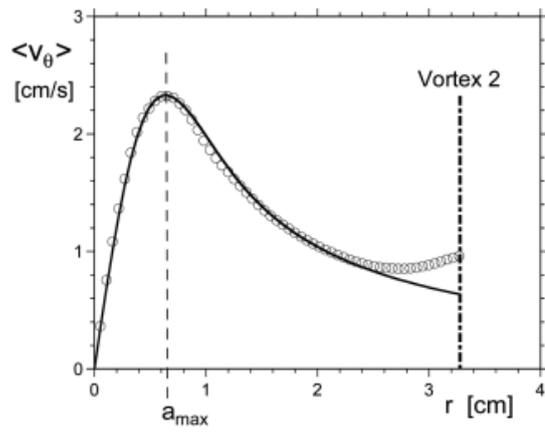


FIGURE 1 – Champ de vitesse autour d’un tourbillon. Le trait noir continu représente un fit gaussien correspondant à la solution self-similaire.