TD5 : Tourbillons

Florentin Daniel[*], Mathilde Reyssat

1 Un tourbillon sans vorticité ?

Intuitivement nous associons la notion de vorticité à celle de tourbillons. Il s'agit cependant de deux notions complètement distinctes. Par exemple, l'étude des couches limites d'un écoulement visqueux parallèle de type Couette est rotationnel. Réciproquement, peut-on imaginer un tourbillon sans vorticité ?
On se place ici dans le cas d'un écoulement irrotationnel.

1. Traduire le caractère irrotationnel du champ de vitesse $\mathbf{u}$ en introduisant un potentiel de vitesse ϕ. Comment se traduit l'incompressibilité de l'écoulement ?
2. On cherche des solutions axisymétriques pour l'écoulement de la forme $\mathbf{u} = u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$. Quelle est la forme de ϕ compatible avec cette condition ?
3. Quelle est l'expression de la vitesse u_θ ? Exprimer cette dernière en introduisant la circulation correspondante Γ.
4. Retrouver cette expression en intégrant la circulation de la vitesse à un rayon donné r. Trouvez-vous une incohérence ?
5. Comment varie la pression dans l'écoulement ? Cette distribution est-elle compatible avec l'idée intuitive qu'on est attiré par "l'œil du cyclone" ?

2 Canon à vortex et Valse de tourbillons

Vous avez peut-être déjà réalisé des canons à vortex ? C'est très simple, il suffit de percer un trou circulaire dans un carton, de remplir ce dernier de fumée (pour la visualisation) et de taper dessus. Un vortex annulaire sort alors du trou et peut venir culbuter une pile de gobelets en plastique (Fig. 1).
Pour en savoir plus, n'hésitez pas à visionner les vidéos de la chaîne so cool Physics girl : `https://youtu.be/pnbJEg9r1o8` et `https://youtu.be/N7dRWyOv20`

1. Sachant que les potentiels de vitesse sont des champs additifs (comme en électrostatique), comment une paire de vortex contrarotatifs vont-ils se comporter ?
2. L'anneau de l'exemple illustré se translate à une vitesse de l'ordre de 10 m/s, pour un diamètre d'environ 20 cm. Quelle est la circulation correspondante ?
3. Il est également possible de créer des lignes de tourbillons en claquant des portes. C'est ce qu'on réalisé nos collègues marseillais (Fig. 2). Ils ont ainsi montré que deux vortex corotatifs se mettaient à valser. Si les deux vortex ont la même circulation Γ, quelle est la vitesse angulaire de leur valse ? Au bout d'un certain temps, nos deux danseurs ralentissent et fusionnent. De quel ingrédient avons-nous oublié de tenir compte dans notre description ?

[*]florentin.daniel@phys.ens.fr

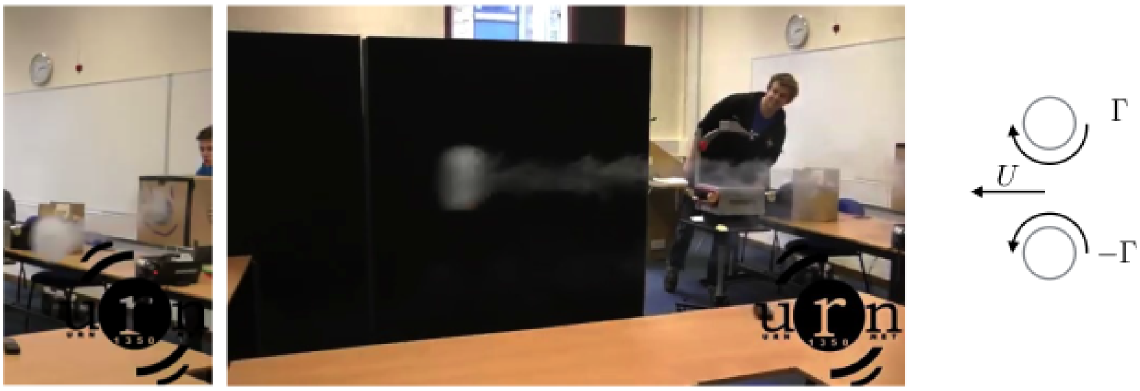

FIGURE 1 – Canon à vortex réalisé à partir d'une innocente boîte en carton. Le vortex annulaire projeté atteint ici une vitesse de l'ordre de 10 m/s. Source : `https://youtu.be/4b2SV3ASUxY`

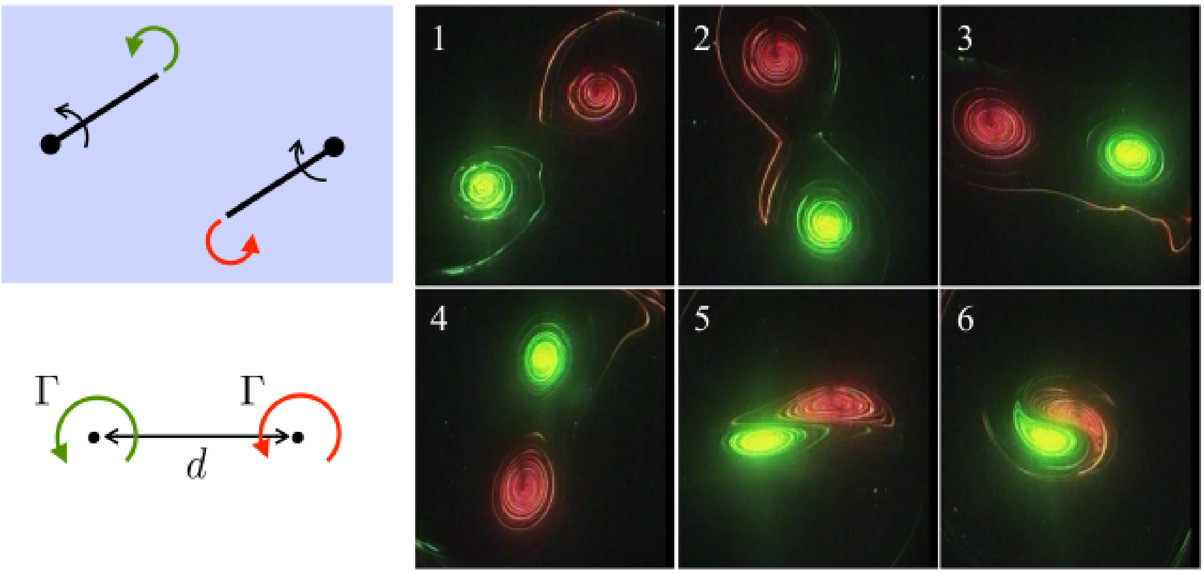

FIGURE 2 – Tourbillons corotatifs créés en claquant deux portes sous l'eau. `https://www.irphe.fr/~meunier/`

3 Le vortex de Lamb-Oseen [1]

On considère un vortex de démarrage, engendré par la mise en rotation d'une surface solide dans un fluide. Le principe de l'expérience est présenté sur la figure 3-(a) et un exemple de tourbillon vu en coupe est présenté sur la figure 3-(b).

On se propose ici d'étudier la structure spatiale de ce tourbillon et son évolution temporelle. Nous faisons les hypothèses suivantes :

— Dans le repère du laboratoire, le tourbillon peut être modélisé par un écoulement plan instationnaire à symétrie de révolution de vitesse :

$$\mathbf{U} = u_\theta(r,t)\mathbf{e}_\theta$$

— Le fluide est newtonien, incompressible, homogène et l'on néglige les forces de volume.

1. Les données expérimentales de ce sujet sont issues de la thèse de Patrice Meunier, réalisée avec Thomas Leweke.

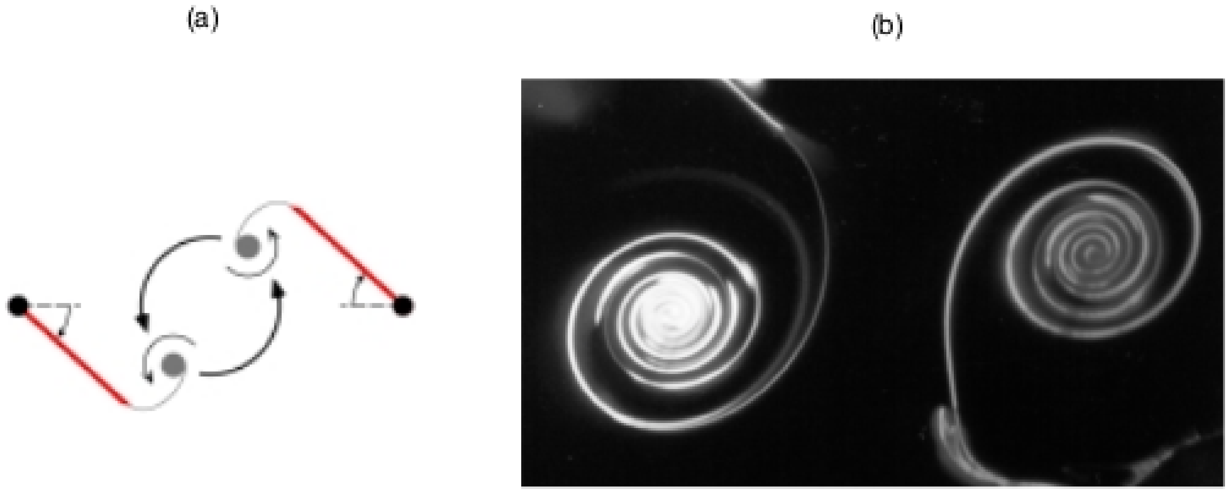

FIGURE 3 – Génération d'un vortex de Lamb-Oseen : (a) principe de l'expérience (b) Exemple de vortex vu en coupe à l'aide de colorants fluorescents.

1. Ecrire l'équation locale d'évolution de l'impulsion et en déduire le champ de pression ainsi que l'équation d'évolution de u_θ .
2. En admettant qu'il existe une solution auto-semblable pour u_θ vérifiant la condition initiale $u_\theta(r, t = 0) = \frac{\Gamma}{2\pi r}$, où Γ est la circulation du tourbillon, chercher la fonction $f(\xi = \frac{r}{\sqrt{\nu t}})$ telle que $u_\theta(r, t) = u_0 f(\xi)$.
3. A l'aide de ces résultats, commenter la Figure 4.
4. Déterminer le champ de vorticité et montrer que partant d'un champ irrotationnel, la viscosité rend l'écoulement rotationnel.

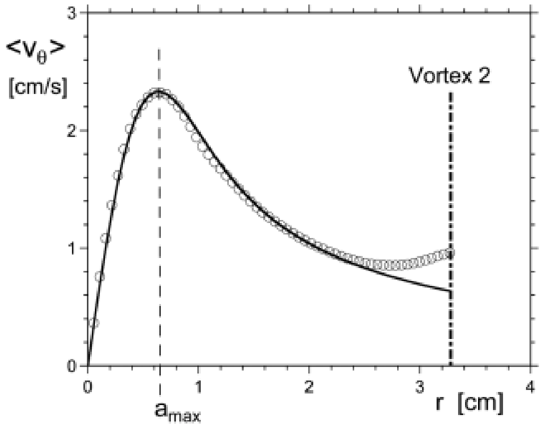

FIGURE 4 – Champ de vitesse autour d'un tourbillon. Le trait noir continu représente un fit gaussien correspondant à la solution self-similaire.

Formulaire

Coordonnées cylindriques

$$\nabla \mathbf{A} = \frac{\partial A_r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1}$$

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \begin{array}{r} \left(\nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{r}} \\ +\left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ +\nabla^2 A_z \hat{\mathbf{z}} \end{array} \tag{3}$$

$$(\mathbf{A}.\nabla)\mathbf{B} = \begin{array}{r} \left(A_r\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial B_r}{\partial \theta} + A_z\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{A_\theta B_\theta}{r}\right)\hat{\boldsymbol{r}} \\ +\left(A_r\frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + A_z\frac{\partial B_\theta}{\partial z} + \frac{A_\theta B_r}{r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ +\left(A_r\frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \theta} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{z}} \end{array} \tag{4}$$

$$\nabla.\nabla f = \nabla^2 f \tag{5}$$