

la vitesse est positive; l'écoulement se fait bien de la région de forte pression vers la région de faible pression. Le débit de fluide à travers le tube est donné par l'intégration du profil de vitesse :

$$Q = 2\pi \int_0^R u_x r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{L} \quad (3.11)$$

Ce résultat, souvent appelé "loi de Poiseuille¹", montre que le débit est proportionnel au gradient de pression $\Delta p/L$ et inversement proportionnel à la viscosité dynamique du fluide. Il dépend très fortement du diamètre du tube; cette dépendance en puissance quatrième du diamètre est une conséquence du profil de vitesse parabolique qui est lui-même une conséquence de la condition de non glissement sur la paroi du tube. Une situation physique très différente est le transport des électrons dans un conducteur électrique : la vitesse moyenne des électrons est la même dans toute la section du conducteur ; la résistance du conducteur est simplement inversement proportionnelle à sa section (πR^2).

3.2.2 Écoulement entre deux cylindres (écoulement de Couette)

Un autre écoulement simple est celui réalisé dans l'espace compris entre deux cylindres coaxiaux animés d'une vitesse de rotation constante dans le temps. Le cylindre extérieur (resp. intérieur) a un rayon R_e (resp. R_i) et il est entraîné à la vitesse angulaire Ω_e (resp. Ω_i). Nous supposons que les cylindres sont suffisamment longs (dans la direction axiale) pour que les effets dûs aux extrémités soient négligeables et pour qu'il n'y ait pas de composante axiale de la vitesse (le problème, tridimensionnel dans la réalité, est ramené à un problème plan). Si l'écoulement reste stable, nous pouvons supposer que le champ de vitesse conserve la symétrie cylindrique : la vitesse est indépendante de la coordonnée azimuthale θ . La condition d'incompressibilité impose alors que la composante radiale de la vitesse soit nulle. Considérons en effet un élément de volume délimité par les rayons θ et $\theta + d\theta$ et par les cercles r et $r + dr$. Le volume net de fluide qui entre dans cet élément de volume est :

$$r u_r(r) d\theta - (r + dr) u_r(r + dr) d\theta + u_\theta(\theta) dr - u_\theta(\theta + d\theta) dr$$

Lorsque le fluide est incompressible, cet accroissement de volume est nul, ce qui conduit à :

$$\frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (3.12)$$

Le champ de vitesse étant indépendant de θ pour une raison de symétrie, l'équation 3.12 conduit à : $u_r = C/r$. Sur les parois solides en $r = R_e$ et $r = R_i$ la vitesse radiale est nulle (le fluide ne peut traverser ces parois), elle est donc nulle dans tout l'écoulement.

Nous pouvons maintenant écrire l'équilibre des forces qui s'exercent sur l'élément de volume que nous avons considéré ci-dessus. Si l'écoulement reste stable, nous pouvons supposer que chaque élément de fluide se déplace avec une vitesse tangentielle constante sur une trajectoire circulaire. Un tel élément a une accélération centripète égale à u_θ^2/r . Dans la direction radiale, le gradient de pression équilibre cette accélération centripète. Ecrivons la résultante des forces sur l'élément de volume projetée sur la direction radiale :

$$-(r + dr) p(r + dr) d\theta + r p(r) d\theta + 2p(r) dr \frac{d\theta}{2} = -\rho \frac{u_\theta^2}{r} r dr d\theta$$

Les deux premiers termes du membre de gauche proviennent de la pression exercée sur les faces cylindriques en r et $r + dr$. Le troisième terme provient de la pression exercée sur les faces radiales en θ et $\theta + d\theta$. D'où :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{u_\theta^2}{r} \quad (3.13)$$

¹du nom du médecin français qui fut le premier à montrer expérimentalement la dépendance du débit en puissance quatrième du rayon.

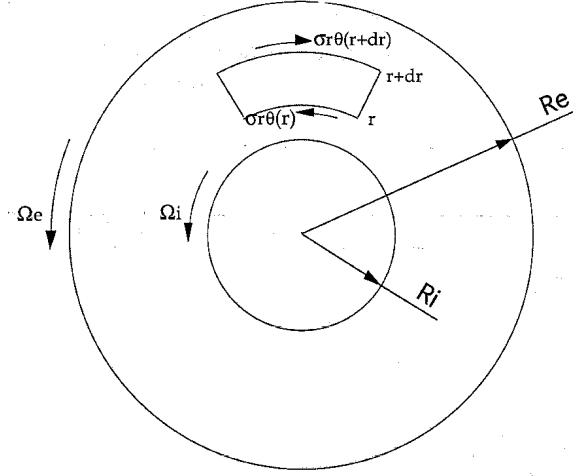


FIG. 3.5 – Schéma de l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux.

Dans la direction tangentielle, écrivons le couple résultant de l'action des contraintes tangentielles, couple qui est nul puisque l'élément de volume se déplace à vitesse angulaire constante (notons que la pression est indépendante de θ , elle n'apparaît donc pas dans l'équation ci-dessous) :

$$-(r + dr)^2 \sigma_{r\theta}(r + dr) d\theta + r^2 \sigma_{r\theta}(r) d\theta = 0$$

soit :

$$\frac{\partial(r^2 \sigma_{r\theta})}{\partial r} = 0 \quad (3.14)$$

Soit, $\sigma_{r\theta} = C/r^2$ La contrainte tangentielle est proportionnelle à la vitesse de déformation :

$$\sigma_{r\theta} = \eta \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \eta r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right)$$

Il faut soustraire u_θ/r au gradient de vitesse pour tenir compte du fait qu'une rotation en bloc (rotation solide avec $u_\theta = \omega r$) ne provoque pas de déformation. L'intégration de l'équation de mouvement donne : $u_\theta = A/r + Br$, les constantes d'intégration A et B étant déterminées par les conditions aux limites sur les parois : $u_\theta(R_i) = \Omega_i R_i$ et $u_\theta(R_e) = \Omega_e R_e$:

$$u_\theta = \frac{(\Omega_i - \Omega_e) R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \frac{1}{r} + \frac{\Omega_e R_e^2 - \Omega_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} r \quad (3.15)$$

La contrainte tangentielle sur le cylindre extérieur est donc :

$$\sigma_{r\theta}(R_e) = 2\eta \frac{(\Omega_e - \Omega_i) R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}$$

et le couple induit par cette contrainte est :

$$\Gamma = 4\pi\eta \frac{(\Omega_e - \Omega_i) R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \quad (3.16)$$

Ce couple est proportionnel à la viscosité dynamique du fluide et à la différence de vitesse de rotation des deux cylindres. Dans le cas où le rayon des deux cylindres est très grand devant leur séparation : ($R_e - R_i = h \ll R_i$), on retrouve un écoulement identique à celui observé entre deux plaques planes parallèles, c'est-à-dire un profil de vitesse linéaire. Lorsque le cylindre extérieur est seul en mouvement ($\Omega_i = 0$), le couple exercé sur le cylindre extérieur devient alors $\Gamma = 2\pi\eta\Omega R^3/h$

, où $\Omega = \Omega_e$ et $R_e \approx R_i \approx R$. Ce type d'écoulement entre deux cylindres coaxiaux de diamètres proches est utilisé couramment pour la mesure des viscosités. La réalisation d'un viscosimètre de Couette est très délicate mécaniquement : il faut assurer une parfaite concentricité des deux cylindres et éliminer les frottements au maximum. Il faut également apporter des corrections empiriques aux formules données ci-dessus pour tenir compte des effets de l'écoulement à l'extrémité des cylindres. Les appareils les plus sophistiqués peuvent travailler à vitesse de rotation imposée ou à contrainte imposée.

3.3 L'équation de Navier-Stokes

Nous avons trouvé l'équation de mouvement du fluide dans quelques cas simples. Passons maintenant à l'établissement de cette équation dans le cas général pour un fluide visqueux incompressible. La relation fondamentale de la dynamique peut s'exprimer de la manière suivante : la variation temporelle de la quantité de mouvement d'un élément de volume V est égale à la somme des forces qui s'exercent sur cet élément de volume, soit :

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_V \rho \mathbf{u} d\tau \right] = \int_V \mathbf{f} d\tau + \int_{\Sigma} \sigma \mathbf{n} dS \quad (3.17)$$

où Σ est la surface délimitant le volume V , dS est un élément de surface de normale \mathbf{n} , \mathbf{f} est la force exercée par unité de volume et σ le tenseur des contraintes. La dérivée temporelle du premier membre est une dérivée lagrangienne, c'est-à-dire, en suivant le mouvement des particules de fluide. La masse de l'élément de fluide $\rho d\tau$ reste constante dans ce mouvement. Il est donc possible d'écrire le premier terme : $\int_V \rho \mathbf{u} / Dt d\tau$. L'intégrale des forces de surface peut s'écrire, à l'aide du théorème d'Ostrogradsky sous la forme : $\int_V \nabla \cdot \sigma d\tau$ où $\nabla \cdot \sigma$ est la divergence du tenseur des contraintes, un vecteur dont la composante i est : $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j$. En faisant tendre le volume V vers zéro l'équation de mouvement devient :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} + \nabla \cdot \sigma \quad (3.18)$$

Maintenant, utilisons la décomposition de la dérivée lagrangienne de la vitesse en la somme de la dérivée eulérienne et de l'accélération convective (équation 2.1) En tenant compte de l'expression du tenseur des contraintes pour un fluide newtonien en mouvement (équation 3.6), la contribution des forces de surface à la composante i de l'équation de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

et l'équation de mouvement prend la forme :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (3.19)$$

C'est l'équation de Navier-Stokes qui décrit le comportement des fluides newtoniens. Réécrivons cette équation sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f} \quad (3.20)$$

où ν est la viscosité cinématique du fluide. L'expression de cette équation en coordonnées cylindriques et sphériques est donnée en annexe. Notons, qu'en l'absence d'écoulement, si la seule force en volume présente est la gravité, nous retrouvons à partir de l'équation de Navier-Stokes la loi de la statique des fluides : $\nabla p = \rho \mathbf{g}$.