TD3 : Écoulements de Couette

Florentin Daniel*, Mathilde Reyssat

1 Diffusion de la quantité de mouvement

1. Les contraintes qui s'exercent sur un volume infinitésimal de dimensions $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ dans la direction x sont
   — la contrainte tangentielle sur la face supérieure $\sigma_{xz}(z+\mathrm{d}z) = \eta\partial_z u(z+\mathrm{d}z)$;
   — la contrainte tangentielle sur la face inférieure $-\sigma_{xz}(z) = -\eta\partial_z u(z)$;
   — la pression sur la face gauche $p(x)$;
   — la pression sur la face droite $-p(x+\mathrm{d}x)$.
   Le problème étant invariant par translation dans la direction x, il n'y a pas de gradient de pression, donc les forces de pression se compensent. La quantité de mouvement du volume infinitésimal est $(\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z)\mathbf{u}$, donc le PFD s'écrit
   $$\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\partial_t u = \eta(\partial_z u(z+\mathrm{d}z) - \partial_z u(z))\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1}$$
   en faisant tendre les dimensions vers 0 on obtient l'équation demandée
   $$\partial_t u = (\eta/\rho)\partial_z^2 u, \tag{2}$$
   avec $\eta/\rho = \nu$ la viscosité dynamique. C'est une équation de diffusion pour la quantité de mouvement du fluide où la viscosité dynamique joue le rôle de coefficient de diffusion.
2. La solution de l'équation de diffusion est de la forme $f(u, V, z, t, \nu) = 0$, qui est une relation fonctionnelle entre 5 paramètres physiques. On considèrera que les vitesses ont une unité indépendante de toutes les autres, vu qu'on voudrait avoir la même analyse dimensionnelle si la quantité en diffusion était autre chose qu'une vitesse. On a alors trois unités indépendantes et on peut former deux nombres sans dimension : u/V et $\xi = z/\sqrt{\nu t}$. Alors d'après le théorème π, la solution peut également s'écrire $g(u/V, \xi) = 0$, i.e on peut chercher une solution u comme fonction de la seule variable autosimilaire ξ. Alors
   $$\partial_t u = \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\xi}{t}\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\xi}. \tag{3}$$
   De même,
   $$\partial_z^2 u = \frac{1}{\nu t}\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}\xi^2}, \tag{4}$$
   et en utilisant $\partial_t u = \nu\partial_z^2 u$ il vient
   $$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{2}\xi\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\xi} = 0. \tag{5}$$
   C'est une équation différentielle ordinaire du premier ordre pour u que l'on peut résoudre :
   $$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}\xi} = A\exp\left(-\frac{1}{4}\xi^2\right), \tag{6}$$
   avec A une constante d'intégration. On intègre une deuxième fois en introduisant une autre constante B :
   $$\tilde{u}(\xi) = A\int_0^\xi \exp\left(-\frac{1}{4}s^2\right)\mathrm{d}s + B. \tag{7}$$

*florentin.daniel@phys.ens.fr

La condition de non-glissement $\tilde{u}(0) = V$ donne $B = V$. À $t = 0$, donc $\xi \to +\infty$, la vitesse est nulle en $z \neq 0$, donc $\tilde{u}(\xi \to +\infty) = 0$. Cela donne $A\sqrt{\pi} + V = 0$, soit $A = -V/(\sqrt{\pi})$, et donc

$$u(z,t) = V \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z/\sqrt{\nu t}} \exp\left(-\frac{1}{4}s^2\right) \mathrm{d}s \right]. \tag{8}$$

Le profil de vitesse ne change pas de forme au cours du temps. Il est seulement dilaté au cours du temps d'un facteur qui varie comme $\sqrt{t}$. $\sqrt{\nu t}$ est la distance typique sur laquelle s'est propagée la vitesse au bout d'un temps t.

3. On peut réécrire l'équation de diffusion pour la vitesse sous la forme

$$\partial_t(\rho u) = \frac{\partial}{\partial z}(\eta \partial_z u). \tag{9}$$

On reconnait une équation de conservation pour la quantité de mouvement, où le flux de quantité de mouvement est $\eta \partial_z u$, soit $\eta U/L$ en ordre de grandeur.

4. La quantité de mouvement par unité de volume est ρu. Pendant un temps $\mathrm{d}t$, une surface $\mathrm{d}S$ de normale $\mathbf{e}_x$ est traversée par un volume $u\mathrm{d}t\mathrm{d}S$ de fluide, donc par une quantité de mouvement $\rho u^2 \mathrm{d}S\mathrm{d}t$. Le flux de quantité de mouvement dans la direction de l'écoulement, dû à la convection par l'écoulement lui-même, est donc ρu^2, soit ρU^2 en ordre de grandeur.

5. Le rapport entre flux convectif et flux diffusif de quantité de mouvement s'écrit en ordre de grandeur $\mathcal{R}e = \rho U L/\eta$: c'est le nombre de Reynolds.

2 Viscosimètre de Couette

cf TD3_cb.pdf