

A l'autre bout du spectre en nombre de Reynolds

La notion de couche limite

Écoulements rotationnels et irrotationnels

Écoulements potentiels et loi de Bernoulli



Développement d'une couche limite sur une plaque plane mise en mouvement

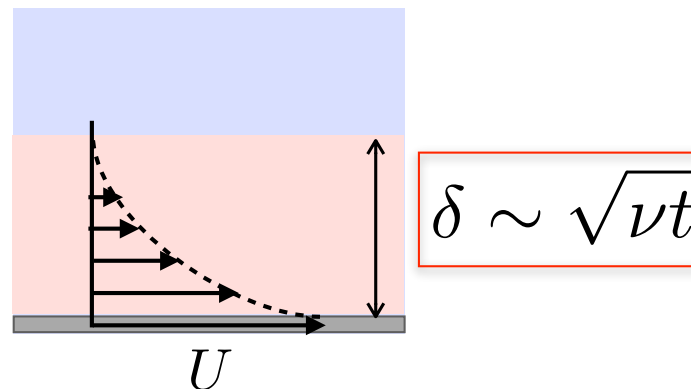
Navier Stokes

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

$$\rho \frac{U}{t} \sim \eta \frac{U}{\delta^2}$$

Épaisseur de couche de
diffusion de la quantité de
mouvement

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\eta}{\rho} t}$$



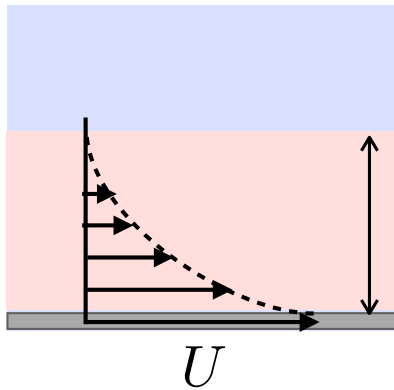
La même expérience du point de vue de la vorticité

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{u}$$

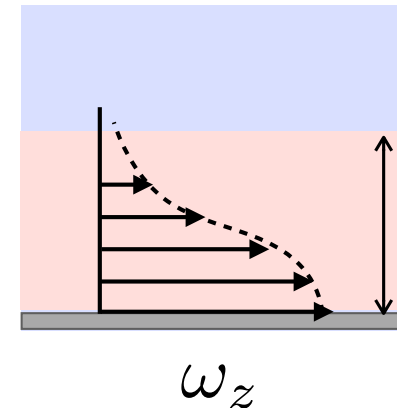
$$\omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Navier Stokes (ici)

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}$$



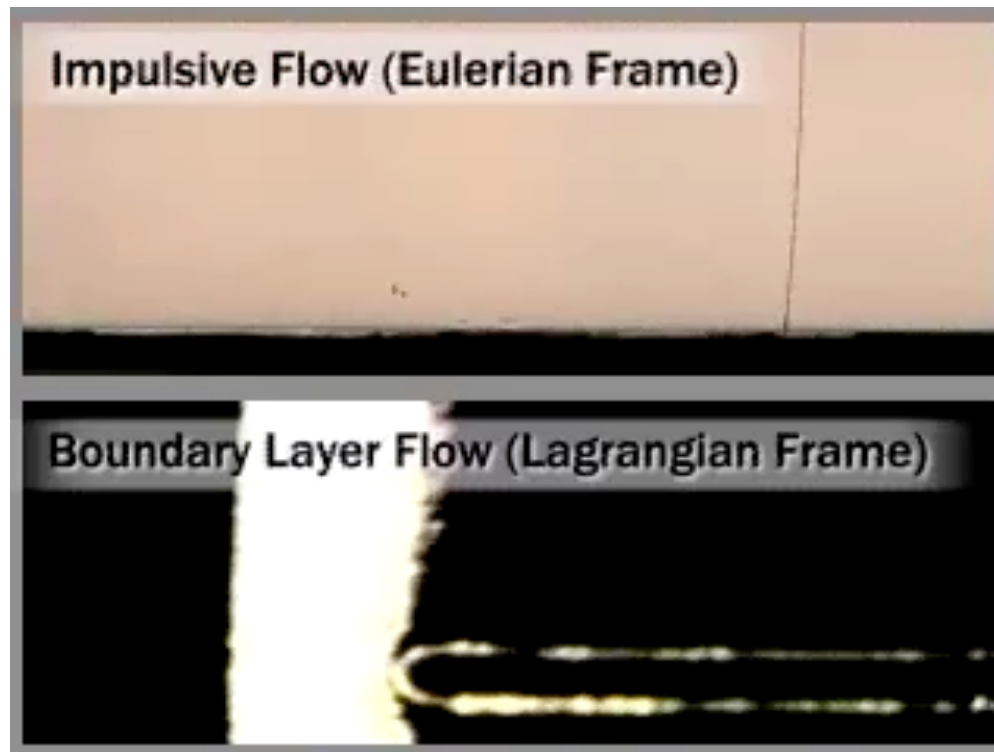
$$\delta \sim \sqrt{\nu t}$$



irrotationnel

$$\omega_z \sim 0$$

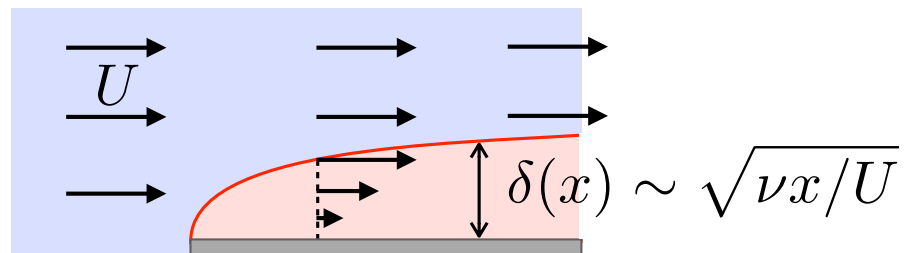
rotationnel

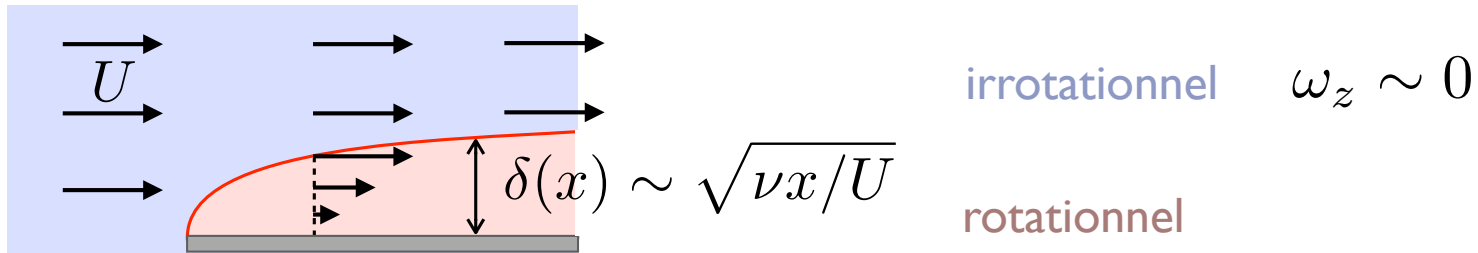


Développement d'une couche limite sur une plaque plane

$$t_d \sim \frac{\delta^2}{\nu}$$

$$t_c \sim \frac{x}{U}$$





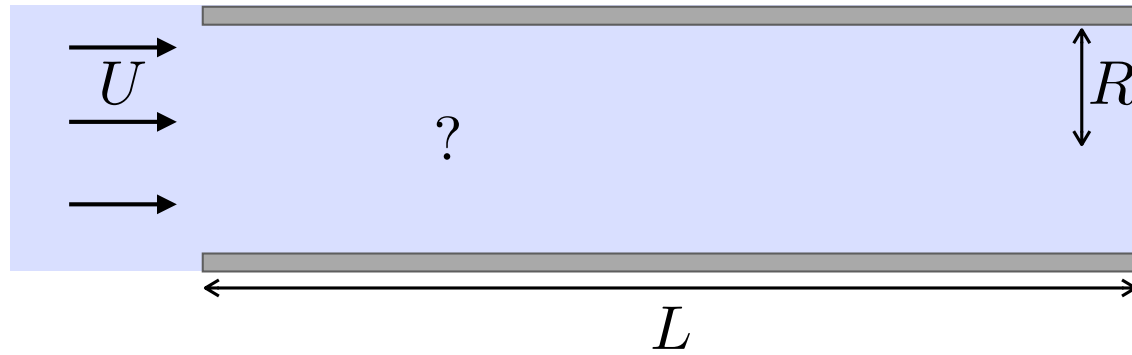
$$\delta(L) \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = L \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = L Re_L^{-1/2}$$

$$Re_L \gg 1 \rightarrow \frac{\delta(L)}{L} \ll 1$$

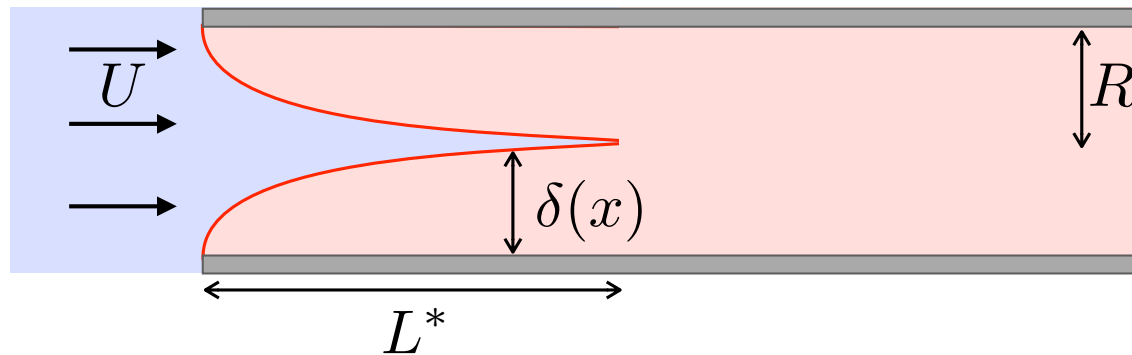
En dehors de la couche limite :
la viscosité ne joue pas de rôle, l'écoulement est irrotationnel

Dans la couche limite :
la viscosité joue un rôle, l'écoulement est rotationnel

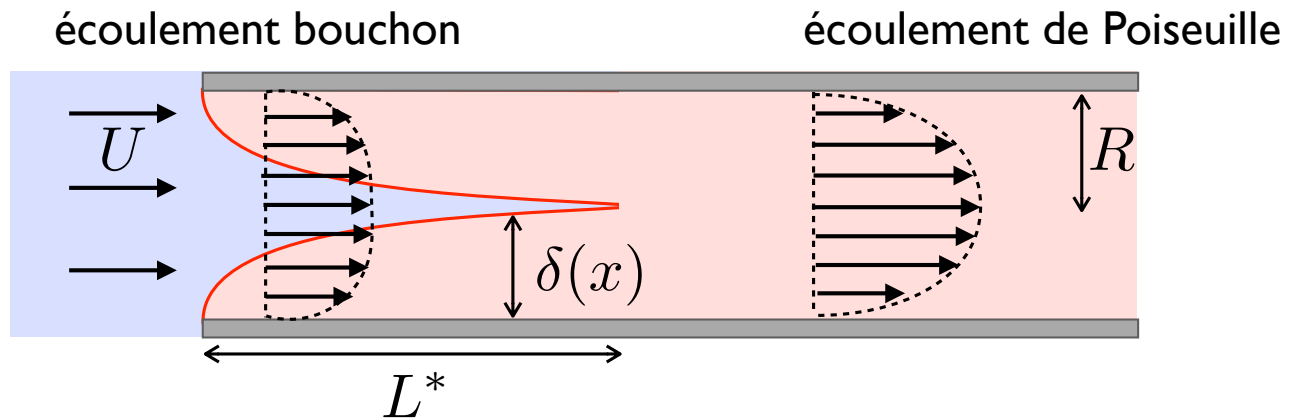
Bonus: longueur d'entrée dans un tube



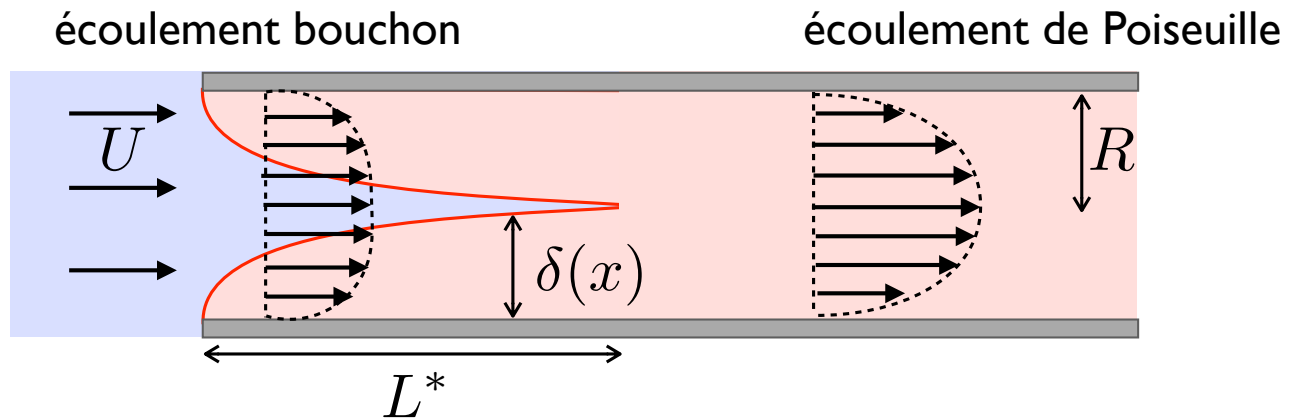
Bonus: longueur d'entrée dans un tube



Bonus: longueur d'entrée dans un tube



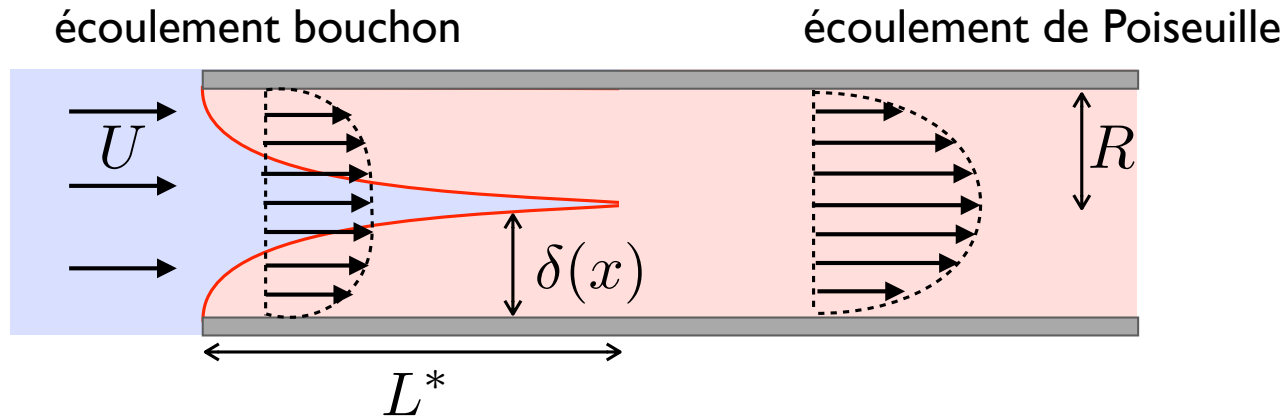
Bonus: longueur d'entrée dans un tube



$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



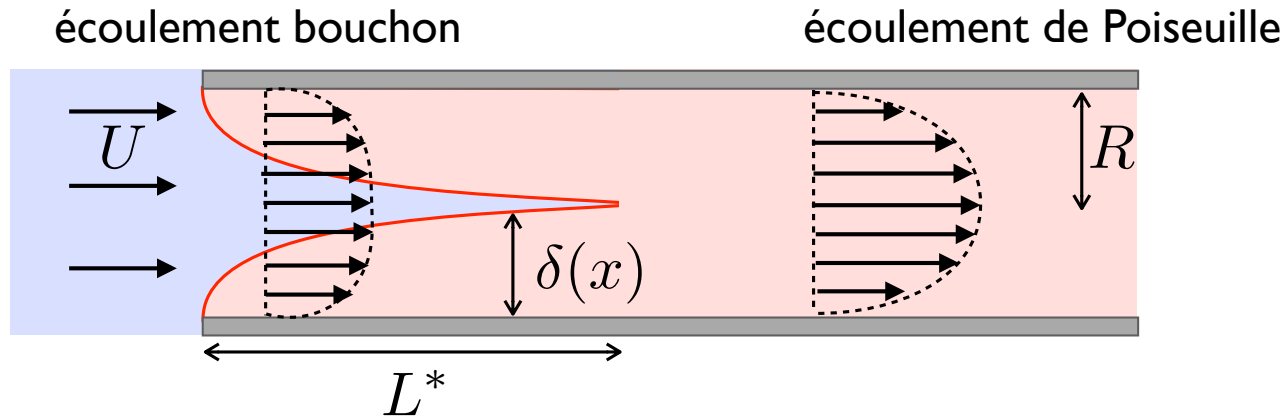
$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

Lien avec Re ?

$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



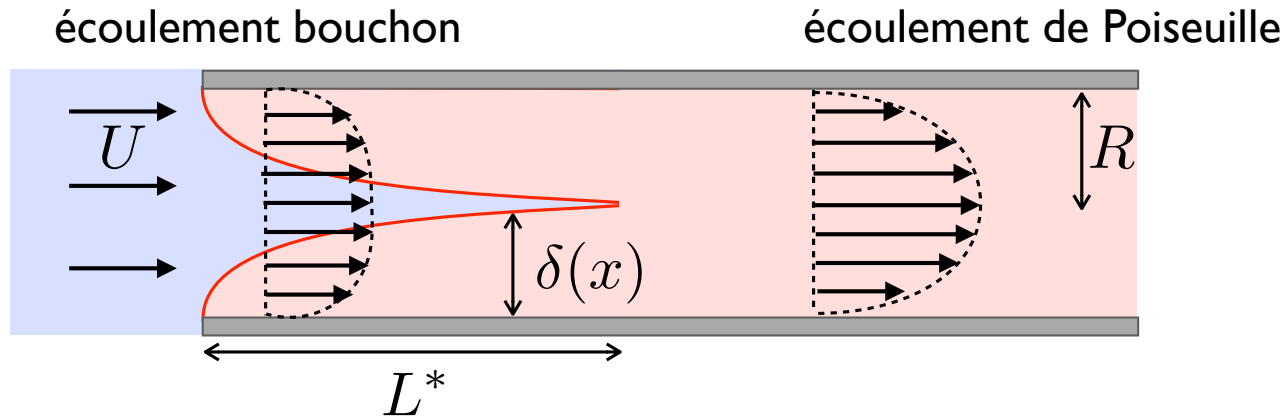
$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

Lien avec Re ?

$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u} \quad \leftarrow \quad u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

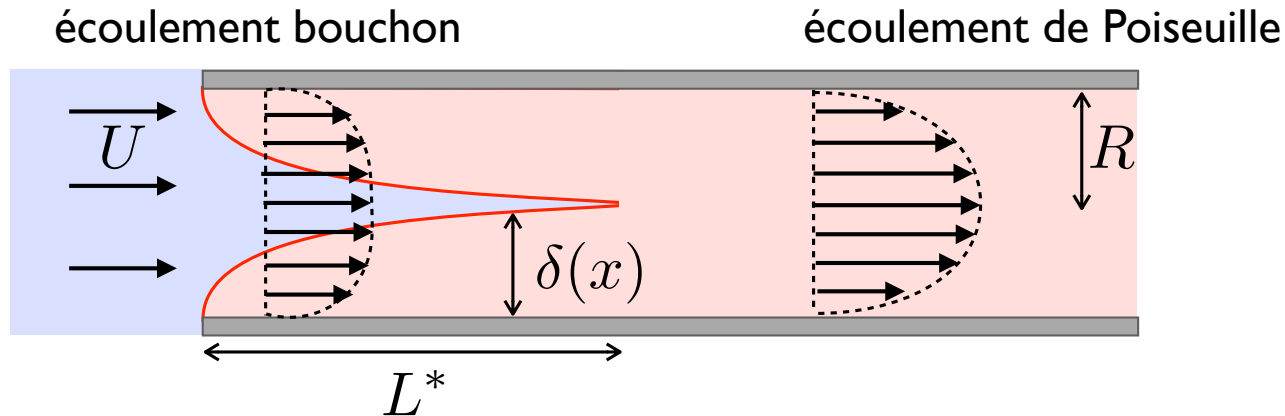
Lien avec Re ?

$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u}$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}$$

$$\Delta u \sim \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} \sim \frac{U}{R^2}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

Lien avec Re ?

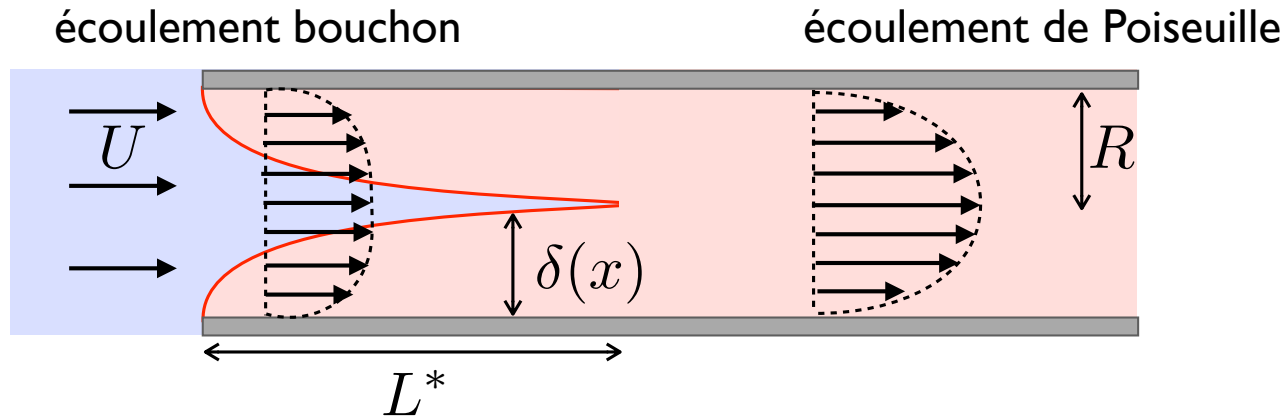
$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u}$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}$$

$$\Delta u \sim \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} \sim \frac{U}{R^2}$$

$$Re = \frac{\rho U R^2}{\eta L} = \frac{L^*}{L}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

Lien avec Re ?

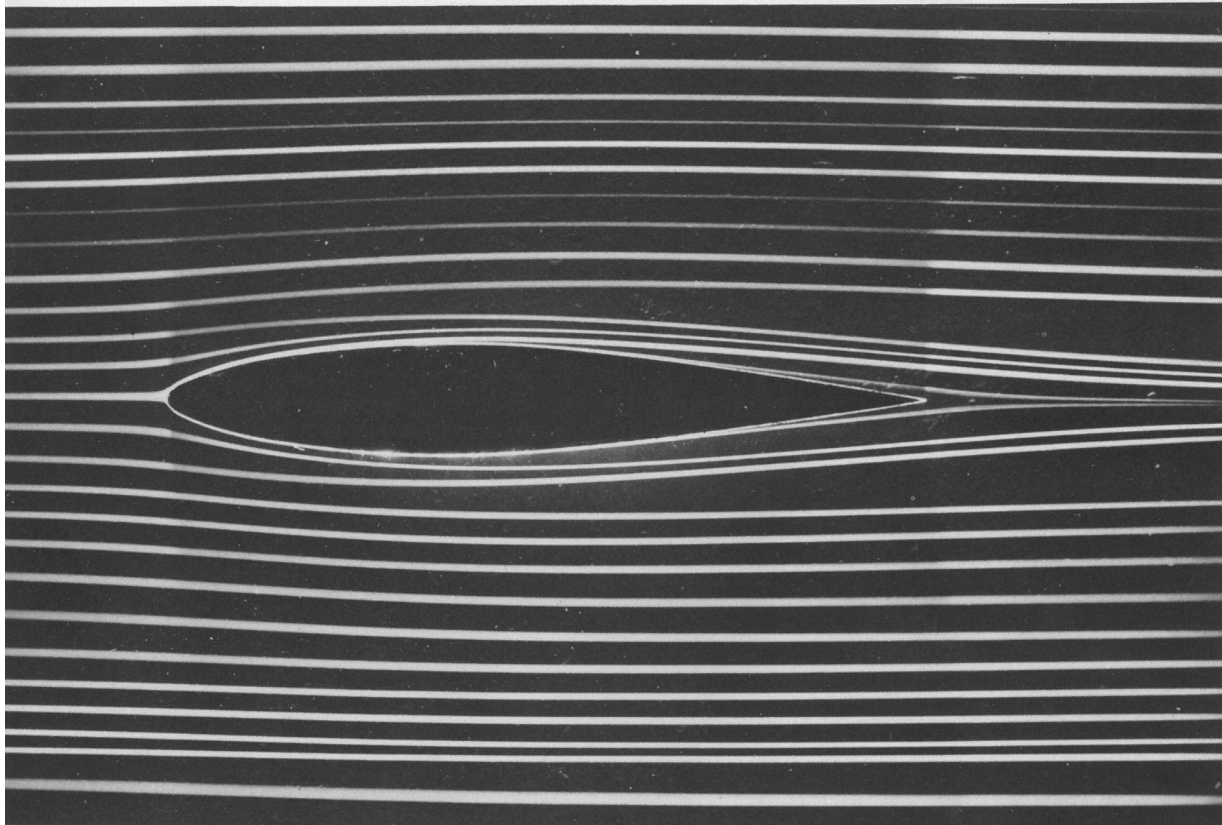
$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u}$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}$$

$$\Delta u \sim \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} \sim \frac{U}{R^2}$$

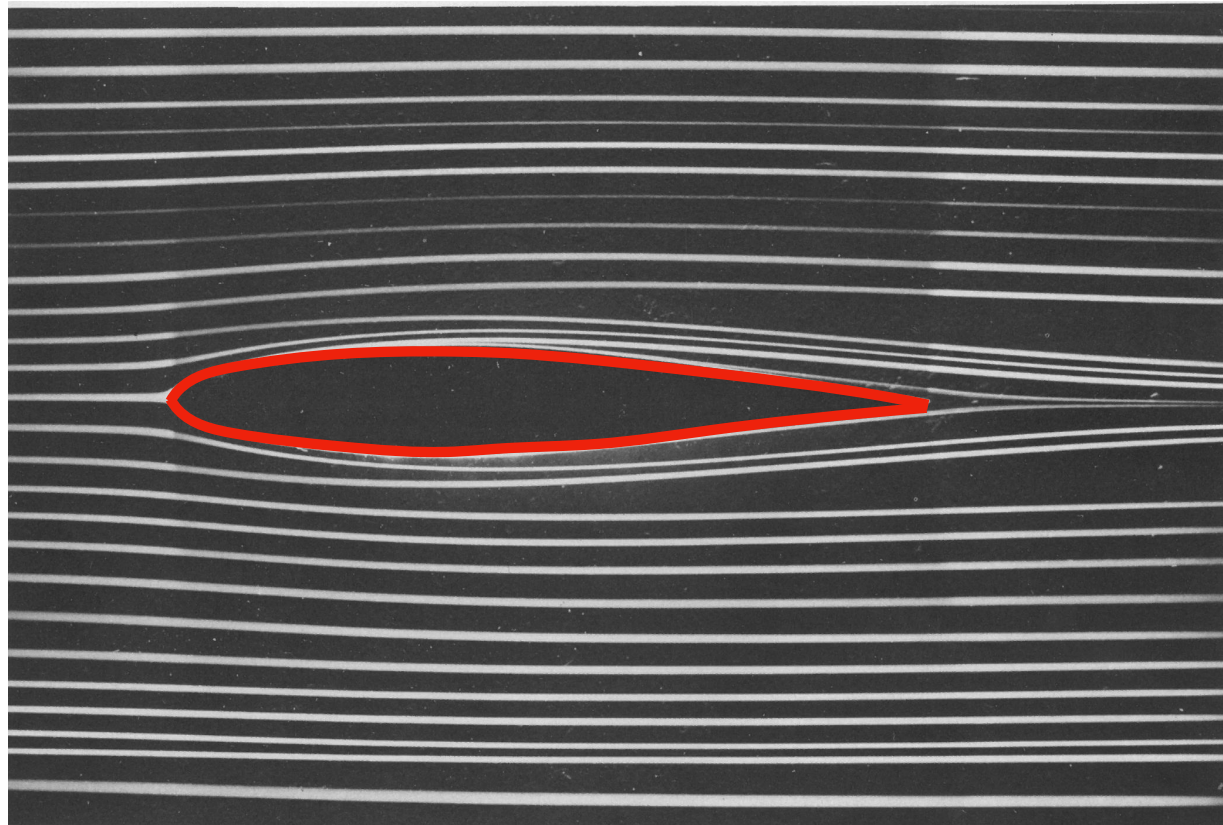
$$Re = \frac{\rho U R^2}{\eta L} = \frac{L^*}{L}$$

$$Re \ll 1 \Leftrightarrow L \gg L^*$$



$Re=7000$

Visualisation de la couche limite autour d'un profil d'aile



$Re=7000$

Écoulements irrotationnels (potentiels) en dehors des couches limites

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \nabla \phi$$

Le champ de vitesse dérive d'un potentiel

Loi de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} + \rho \mathbf{f}$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$


Loi de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} + \rho \mathbf{f}$$

$$\swarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \nabla \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) - \rho \mathbf{u} \wedge (\cancel{\nabla \wedge \mathbf{u}})$$

Loi de Bernoulli :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} & = & -\nabla p & + & \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} & + & \rho \mathbf{f} \\
 \swarrow & & \downarrow & & & & \searrow \\
 \nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) & & \nabla \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) & - & \cancel{\rho \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u})} & & \nabla (-\rho g z)
 \end{array}$$

Loi de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} + \rho \mathbf{f}$$

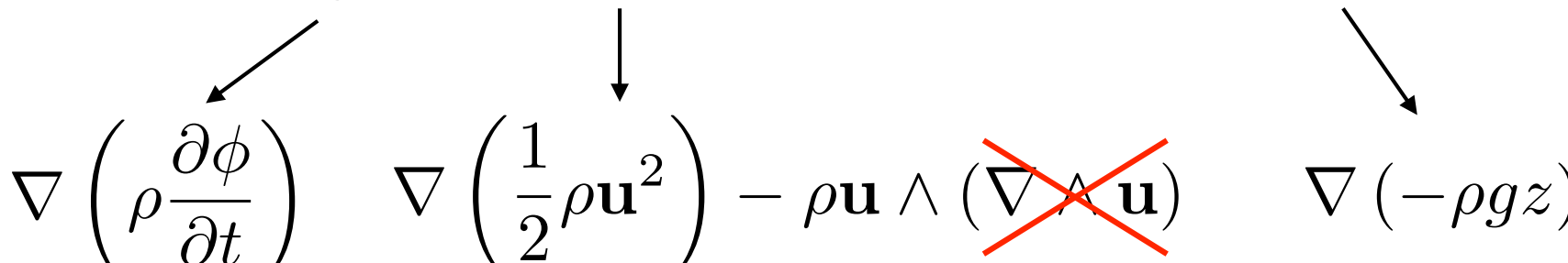
$$\swarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \searrow$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \nabla \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) - \cancel{\rho \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u})} \quad \nabla (-\rho g z)$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g z \right) = 0$$

Loi de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} + \rho \mathbf{f}$$



$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \nabla \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) - \rho \mathbf{u} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) \quad \nabla (-\rho g z)$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g z \right) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g z = cte(t)$$

Loi de Bernoulli instationnaire

Loi de Bernoulli :

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z = C$$

Loi de Bernoulli en écoulement stationnaire