TD4 : Ecoulements à petit nombre de Reynolds, lubrification

Florentin Daniel[*], Mathilde Reyssat

1 Principe de la lubrification

On considère une plaque de dimension latérale L, et placée à une distance h d'une paroi solide. On supposera $L \gg h$. La plaque se déplace parallèlement à la paroi à une vitesse V, l'espace entre la paroi et la plaque étant occupé par un fluide de viscosité cinématique η, dont le champ de vitesse est noté $\mathbf{u}$.

1. *Ecrire la condition d'incompressibilité de l'écoulement. En déduire que $u_z \ll u_x$.* Pour un écoulement stationnaire incompressible, l'équation de conservation de la masse se réduit à $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Donc $\partial_x u_x + \partial_z u_z = 0$. En ordre de grandeur, $u_x/L \sim u_z/h$, donc $u_z \sim (h/L)u_x \ll u_x$.
2. *A quelle condition peut-on négliger les effets inertiels dans l'écoulement ? On supposera cette condition vérifiée dans la suite.* On calcule le nombre de Reynolds : $\mathcal{R}e = \frac{\rho \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}}{\eta\Delta\mathbf{u}}$. On va expliciter chaque terme de la fraction précédente en terme de $u_x \sim V$, h et L, en utilisant la condition d'incompressibilité.
   — $\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} \sim u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \sim \frac{V^2}{L} + \frac{h}{L}\frac{V^2}{L} \sim \frac{V^2}{L}$
   — $\Delta\mathbf{u} \sim \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \sim \frac{V}{L^2} + \frac{V}{h^2} \sim \frac{V}{h^2}$
   Ce qui donne $\mathcal{R}e = \frac{\rho V h}{\eta}\frac{h}{L}$ (on notera que le résultat précédent a été effectué en raisonnant sur la composante horizontale de $\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}$ et $\Delta\mathbf{u}$ mais on retrouverait le même résultat en passant par la composante verticale). On néglige les effets inertiels si $\mathcal{R}e \ll 1$.
3. *Ecrire l'équation de Navier-Stokes pour le fluide. La simplifier dans la limite $\mathcal{R}e \ll 1$.* A bas Reynolds, l'équation de Navier-Stokes se réduit à l'équation de Stokes $\eta\Delta\mathbf{u} = \nabla p$.
4. *En déduire en loi d'échelle le gradient de pression et la force normale F_n exercée par la plaque sur le fluide.* On a $\Delta\mathbf{u} = \partial_x^2 u_x + \partial_z^2 u_z \sim V/L^2 + V/h^2 \sim V/h^2$. Donc en ordre de grandeur l'équation de Stokes donne $p - p_0 \sim \eta LV/h^2$, et $F_n = L^2(p - p_0) \sim \eta VL(L/h)^2$.
5. *Donner en loi d'échelle la force tangentielle F_t que la plaque exerce sur le fluide. Vérifier que $F_t \sim F_n(h/L)$. Pourquoi parle-t-on de lubrification ?* La force tangentielle est égale à la contrainte tangentielle multipliée par la surface, et la contrainte tangentielle est proportionnelle au gradient de vitesse : $F_t \sim \eta L^2 V/h$, donc $F_t \sim (h/L)F_n \ll F_n$. On parle de lubrification parce que la force tangentielle est très inférieure à la force normale : le film liquide permet de pousser un objet en exerçant une force très inférieure à son poids.

2 Couteau dans un pot de miel

On plonge un couteau dans un pot de miel de masse volumique ρ. On cherche à déterminer l'épaisseur $e(z,t)$ du film de miel sur le couteau en fonction du temps. On prendra un champ de vitesse de la forme $\mathbf{u} = u_x(x,z)\mathbf{e}_x + u_z(x,z)\mathbf{e}_z$ et on supposera $\partial_z e \ll 1$.

1. *A partir de l'incompressibilité du miel, déduire qu'on peut faire l'approximation de lubrification : $\mathbf{u} = u_z(x,z)\mathbf{e}_z$.* On écrit la condition d'incompressibilité $\partial_x u_x + \partial_z u_z = 0$. Comme dans l'exercice précédent, en ordre de grandeur, $u_x \sim (e/H)u_z$, où H est la dimension caractéristique dans la direction verticale. Pour un film mince, $e \ll H$, donc $u_x \ll u_z$.

[*]florentin.daniel@phys.ens.fr

2. *Ecrire l'équation de Stokes pour le miel. Quelle est la condition aux limites en $x = 0$?* L'équation de Stokes projetée sur la direction verticale s'écrit $\eta\partial_x^2 u_z + \rho g - \partial_z p = 0$, et sur la direction horizontale $\partial_x p = 0$.
3. *Comment devrait-on écrire les conditions aux limites en $x = e$? Justifier que dans la limite $\partial_z e \ll 1$, elles se simplifient en $\partial_x v_z|_{x=e} = 0$ et $p(z, e) = p_0$.* On devrait faire un bilan de force sur un élément de volume proche de la surface en faisant intervenir les forces de tension de surface. Mais les forces de tension de surface interviennent avec des facteurs $\partial_z e$, donc considérer $\partial_z e \ll 1$ revient à négliger la tension de surface. Dans ce cas, il y a continuité de la pression et de la contrainte tangentielle à l'interface miel-air. Comme la viscosité de l'air est très inférieure à celle du miel, cela revient à imposer la contrainte tangentielle nulle à l'interface.
4. *Intégrer l'équation de Stokes et en déduire le champ de vitesse.* En intégrant on obtient que la pression est constante dans tout l'écoulement. Pour le champ de vitesse, on obtient $\partial_x u_z = (\rho g/\eta)(e - x)$, en tenant compte de l'annulation du gradient de vitesse en $x = e$. En intégrant encore, compte tenu de la condition de non-glissement, $u_z = (\rho g/\eta)(ex - x^2/2)$.
5. *En déduire le débit de miel dans le film.* On intègre le champ de vitesse :

$$Q = L \int_0^e (z) \mathrm{d}x u_z(x) = L \frac{\rho g}{3\eta} e^3, \tag{1}$$

où L est la dimension transverse du film.
6. *A partir de la conservation de la masse, montrer que l'épaisseur du film $e(z, t)$ vérifie*

$$\partial_t e = -\frac{\rho g}{\eta} e^2 \partial_z e. \tag{2}$$

Considérons l'élément de volume compris entre z et $z + \mathrm{d}z$. Entre t et $t + \mathrm{d}t$, son volume varie de $L\partial_t e \mathrm{d}t \mathrm{d}z$. Cette variation correspond à l'entrée d'un volume de fluide $-\partial_z Q \mathrm{d}z \mathrm{d}t$. On a donc $\partial_t e = -\partial_z Q$, ce qui se réduit à l'équation demandée.
7. *En cherchant une solution sous la forme $e(z, t) = f(z)g(t)$, montrer que*

$$e(z, t) = \sqrt{\frac{\eta z}{\rho g t}}. \tag{3}$$

L'équation se réduit à $g'/g^3 = -(\rho g/\eta) f f'$. Le membre de gauche ne dépend que de t alors que le membre de droite ne dépend que de x, donc les deux membres sont égaux à une constante. On en déduit $g(t) \propto 1/\sqrt{t}$ et $f(z) \propto \sqrt{z}$, ce qui amène bien la solution demandée.