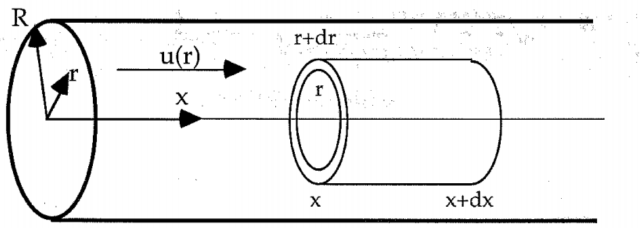
TD1 : Bilans de forces, écoulement de Poiseuille

Florentin Daniel*, Mathilde Reyssat

On considère un tube cylindrique de rayon R et de longueur $L \gg R$, rempli d'un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique η. Le fluide est mis en mouvement par l'application d'une surpression ΔP à l'entrée du tube. On suppose qu'un régime stationnaire est atteint ; on cherche dans ce cas à déterminer la relation entre le débit volumique Q et la surpression ΔP. On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, x).



On cherche le champ de vitesse sous la forme $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(r, x)\mathbf{e}_x$.

1. Montrer que l'incompressibilité du fluide impose l'absence de dépendance en x du champ de vitesse.

On note $p(r, x)$ la pression dans le fluide, et $\sigma_{xr}(r_0)$ la contrainte tangentielle en $r = r_0$, c'est-à-dire la force exercée dans la direction x sur une surface unité de normale $\mathbf{e}_r$ par le fluide situé en $r > r_0$.

2. On considère un élément de volume infinitésimal compris entre x et $x + \mathrm{d}x$, r et $r + \mathrm{d}r$, comme sur le schéma ci-dessus. Faire un bilan de forces dans la direction x sur cet élément de volume.

La viscosité dynamique est le coefficient de proportionnalité entre la contrainte tangentielle et le gradient de vitesse : $\sigma_{xr} = \eta \partial_r u$.

3. En déduire une équation différentielle reliant p et u.
4. En limitant maintenant l'élément de volume entre θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$, montrer que la pression ne dépend pas de r. Intégrer alors une première fois l'équation obtenue. On exprimera la constante qui apparaît en fonction de ΔP et L.
5. On suppose une condition de non-glissement aux parois : $u(R) = 0$. En déduire l'expression du champ de vitesse.
6. Montrer que le débit volumique Q est donné par

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{L}.$$

On suppose maintenant qu'il y a du glissement aux parois : on introduit une longueur de glissement b, et la condition sur la vitesse à la paroi est alors donnée par $u(R) = -b\partial_r u|_R$.

7. Interpréter géométriquement cette condition.
8. Trouver la nouvelle expression du champ de vitesse.
9. En calculant le nouveau débit volumique, discuter de la taille du canal à partir de laquelle le glissement affecte significativement le champ de vitesse.

*florentin.daniel@phys.ens.fr