TD5 : Impact d'un jet sur une plaque

Florentin Daniel[*], Mathilde Reyssat

On souhaite calculer la force $\vec{F}$ exercée par un jet d'eau sur une plaque inclinée (voir schéma ci-dessous). On considère un jet d'eau bidimensionnel, stationnaire, de densité ρ, d'épaisseur h, de profondeur L arbitraire (selon l'axe z) et de vitesse uniforme $\vec{U}$ selon $\vec{e}_x$. On note p_0 la pression de l'air. On néglige la gravité, ainsi que les effets de tension de surface et de frottement visqueux.

1. *En l'absence de viscosité, quelle est la direction de la force $\vec{F}$?* Un fluide parfait n'exerce pas de force tangentielle, donc la force exercée par le jet sur la plaque est perpendiculaire à la plaque.
2. *Exprimer la conservation de la masse de fluide.* On peut écrire la conservation de la masse à l'échelle du système ouvert en gris foncé sur le schéma. La masse qui rentre pendant dt est $\rho hUL\mathrm{d}t$, et la masse qui sort est $\rho L\mathrm{d}t(U_1h_1 + U_2h_2)$. On en déduit $Uh = U_1h_1 + U_2h_2$.
3. *Utiliser une relation de Bernoulli pour déterminer U_1 et U_2.* On peut écrire une relation des relations de Bernoulli pour les lignes de courant AA_1 et BA_2. L'écoulement à travers la section AB est parallèle, les sections A_1B_1 et A_2B_2 sont placées assez loin du point d'impact pour que l'écoulement à travers elles puisse aussi être considéré parallèle. Donc la pression sur toutes ces sections vaut P_0. Les relations de Bernoulli donnent alors simplement $U^2 = U_1^2$ et $U^2 = U_2^2$.
4. *En déduire que $h = h_1 + h_2$.* Avec la conservation de la masse on en déduit bien $h = h_1 + h_2$.
5. *On considère le système fermé délimité par le contour $AA_1B_1B_2A_2B$. Effectuer un bilan de quantité de mouvement. Calculer la résultante des forces de pression sur ce système.* On reprend l'équation de bilan de quantité de mouvement en régime stationnaire (cf cours) :

$$\int\int \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})dS + \int\int p\mathbf{n}dS = 0 \tag{1}$$

   car on n'a pas de force en volume et qu'on a considéré le fluide comme parfait. La résultante d'une pression uniforme sur une surface fermée étant nulle, la contribution du dernier terme correspond en fait à : $\int\int(p - p_0)\mathbf{n}dS$, que l'on identifie à l'action sur la plaque $\vec{F}$.
6. *A partir du bilan précédent, trouver la force $\vec{F}$ du jet sur la plaque.* On projette l'équation précédente selon $\mathbf{e_x}$ et $\mathbf{e_y}$:
   — $F_x/L = \rho U^2(h + (h_1 - h_2)\sin\alpha)$
   — $F_y/L = \rho U^2(h_2 - h_1)\cos\alpha$
7. *En projetant sur $\vec{e}_\parallel$, déterminer les épaisseurs h_1 et h_2.* En projection sur $\vec{e}_\parallel$ on obtient $h_1 - h_2 + h\sin\alpha = 0$. Sachant qu'on a aussi $h = h_1 + h_2$ on en déduit

$$\begin{aligned} h_1 &= h(1 - \sin\alpha)/2 \\ h_2 &= h(1 + \sin\alpha)/2. \end{aligned} \tag{2}$$

8. *Application numérique* En projetant sur $\vec{e}_\perp$, on trouve $F_\perp = \rho U^2 h\cos\alpha$. A.N :$F_\perp \approx mg$ $\rightarrow$U$\sim$ $7m.s^{-1}$

[*]florentin.daniel@phys.ens.fr