TD3 : Ascension capillaire et dynamique d'imprégnation

Florentin Daniel*, Mathilde Reyssat

1 Forme d'un ménisque et longueur capillaire

1. *On considère une goutte de liquide de taille caractéristique R. Exprimer son énergie de surface et son énergie potentielle de pesanteur. Pour quelle valeur de R ces deux énergies sont-elles égales ? La longueur trouvée s'appelle la longueur capillaire ℓ_c.* L'énergie de surface est $E_s = 4\pi R^2\gamma$, l'énergie potentielle de pesanteur est $E_p \sim (4/3)\pi R^3 \rho g R$. On a $E_s = E_p$ pour $R = \sqrt{\frac{3\gamma}{\rho g}}$. Pour la longueur capillaire, on prend l'ordre de grandeur $\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$. Une goutte de rayon plus petit que la longueur capillaire minimise sa surface, alors qu'une goutte de rayon plus grand s'aplatit sous l'effet de la gravité.

Au voisinage d'une paroi solide, une surface liquide ne reste pas plane, mais remonte le long de la paroi solide pour former un ménisque.

2. *Faire un bilan des forces sur l'élément de volume représenté ci-dessus (figure 1b). En déduire une équation différentielle sur la forme du ménisque $z(x)$.* On note L la dimension transverse du système. Les forces qui s'exercent sur l'élément de volume considéré (dans la direction x) sont les forces de tension de surface et les forces de pression. On note P_0 la pression atmosphérique. Très loin de la paroi, l'interface est plane et se situe en $z = 0$, donc la pression juste en-dessous de l'interface est P_0. Comme il n'y a pas d'écoulement, il ne peut pas y avoir de gradient de pression selon x. Donc pour tout x, $P(x, z = 0) = P_0$. On veut maintenant déterminer la pression en x et z quelconque. Un bilan de forces sur un élément de volume de dimensions $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ dans la direction z donne $(P(z) - P(z + \mathrm{d}z))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho g \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, donc $\mathrm{d}P/\mathrm{d}z = -\rho g$. C'est la loi de la statique des fluides que l'on peut utiliser pour un fluide au repos sans la redémontrer. Donc la résultante des forces de pression sur l'élément de volume considéré au départ est $-\rho g z \mathrm{d}z L$. En effet, la surface à considérer est $\mathrm{d}zL$, et la résultante des forces de pression est $-\rho g z$. Les forces de tension de surface valent en norme γL. On définit $\theta(x)$ l'angle que forme la tangente à la surface avec l'horizontale. Le bilan de forces s'écrit alors

$$\rho g z L \mathrm{d}z = \gamma(\cos\theta(x + \mathrm{d}x) - \cos\theta(x)), \tag{1}$$

soit

$$\rho g z \mathrm{d}z = \gamma \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Il faut faire attention ici : le $\mathrm{d}z$ dans le membre de gauche a été considéré positif, c'est $|\mathrm{d}z|$. Donc en divisant par $\mathrm{d}x$ on obtient dans le membre de gauche $|\mathrm{d}z/\mathrm{d}x| = -z'(x)$ vu que z est décroissant. On a de plus

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + z'(x)^2}}, \tag{3}$$

donc le bilan de forces devient

$$\gamma \frac{-z'(x)z''(x)}{(1 + z'(x)^2)^{3/2}} = -\rho g z z'(x) \Leftrightarrow \gamma \frac{z''(x)}{(1 + z'(x)^2)^{3/2}} = \rho g z. \tag{4}$$

*florentin.daniel@phys.ens.fr

3. *Résoudre cette équation dans la limite* $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x \ll 1$. *Où voit-on apparaître la longueur capillaire ?* Dans la limite $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x \ll 1$, l'équation devient

$$z'' - \frac{z}{\ell_c} = 0, \tag{5}$$

qui se résout en

$$z(x) = z_0 e^{-x/\ell_c}. \tag{6}$$

La longueur capillaire correspond à la distance sur laquelle la gravité fait "oublier" la présence de la surface.

2 Hauteur d'équilibre : loi de Jurin

On suppose que le rayon R du tube est très inférieur à la longueur capillaire ℓ_c. Si de plus les parois du tube sont très hydrophiles, on peut supposer que l'interface eau-air est une demi-sphère de rayon R.

4. *Utiliser alors la loi de Laplace pour déterminer la hauteur maximale h_0 de montée dans le tube.* La pression au-dessus de la surface vaut P_0, alors que la pression en-dessous vaut $P_0 - \rho g h_0$. D'après la loi de Laplace, la différence de pression entre les deux côtés de l'interface est $2\gamma/R$, i.e.

$$P_0 - (P_0 - \rho g h_0) = \frac{2\gamma}{R} \Rightarrow h_0 = \frac{2\gamma}{\rho g R}. \tag{7}$$

On appelle ce résultat la loi de Jurin.

3 Dynamique d'imprégnation : loi de Washburn

On étudie maintenant la dynamique de montée du fluide dans le tube. A l'instant initial, on immerge le tube dans le fluide.

5. *Quelles sont les forces qui s'exercent sur le fluide dans le tube ? Lui appliquer le principe fondamental de la dynamique.* Le fluide est soumis à la force de tension superficielle F_γ qui le tire vers le haut, la force de frottement visqueux F_η et son poids W. Soit M la masse de fluide dans le tube à un instant donné et V sa vitesse. Alors le PFD s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}(MV)}{\mathrm{d}t} = F_\gamma - F_\eta - W. \tag{8}$$

6. *Montrer que pour des temps suffisamment courts, les forces visqueuses et le poids sont négligeables devant le terme inertiel. Montrer alors que la hauteur de montée est donnée par*

$$h(t) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho R}} t. \tag{9}$$

Analysons l'ordre de grandeur des différents termes dans le PFD. La hauteur de montée à l'instant t (t étant proche de l'instant initial) est $h = Vt$. L'ordre de grandeur de la contrainte visqueuse est $\eta V/R$. Alors le PFD s'écrit en ordre de grandeur

$$\frac{(\rho R^2 V t) \cdot V}{t} \sim \gamma R - \left(\eta \frac{V}{R}\right) \cdot V t R - g V t R^2, \tag{10}$$

soit

$$\rho R^2 V^2 \sim \gamma R - \eta V^2 t - g V R^2 t. \tag{11}$$

Les termes de frottement visqueux et de poids sont proportionnels à t et donc négligeables à t petit. Donc il suffit de résoudre

$$\frac{\mathrm{d}(MV)}{\mathrm{d}t} = F_\gamma \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho\pi R^2 h \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right) = 2\pi R\gamma, \tag{12}$$

qui s'intègre en

$$\frac{\rho}{2}\frac{\mathrm{d}(h^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{2\gamma}{R}t \tag{13}$$

(la constante d'intégration est nulle vu que $h(0) = 0$). Une deuxième intégration donne le résultat demandé.

7. *Déterminer l'ordre de grandeur du temps τ au bout du quel les forces visqueuses ne sont plus négligeables. A quoi correspond-t-il au regard du transport de quantité de mouvement ?* On a vu que l'ordre de grandeur des forces visqueuses est $\eta V^2 t$, ce qui donne avec l'expression de $V = \dot{h}$ qu'on vient de trouver $\eta\gamma t/(\rho R)$. Les forces visqueuses ne sont donc plus négligeables devant la force de tension de surface γR au bout d'un temps $\tau = \rho R^2/\eta = R^2/\nu$. C'est précisément le temps typique de diffusion de la quantité de mouvement dans le tube, donc le temps que l'écoulement de Poiseuille met à s'établir.

8. *On considère des temps $t > \tau$, de façon à pouvoir maintenant négliger le terme inertiel. Ecrire l'équation de Navier-Stokes pour le fluide. Sa résolution donne le champ de vitesse*

$$u(r) = G(R^2 - r^2), \tag{14}$$

avec G une constante. Vu qu'on néglige l'inertie dans le PFD, on néglige le terme instationnaire dans l'équation de Navier-Stokes. Vue la symétrie, le terme d'accélération convective est nul. On alors simplement

$$\eta\Delta u - \nabla P - \rho g = 0. \tag{15}$$

C'est la même équation que pour un simple écoulement de Poiseuille (au terme de gravité près, qui joue le même rôle qu'une surpression imposée).

9. *En déduire que la force de frottement visqueux qui s'exerce sur le fluide s'exprime en fonction de sa vitesse moyenne V comme $F_\eta = 8\pi\eta hV$.* La force de frottement visqueux est égale à la contrainte tangentielle sur les parois du tube, multipliée par la surface avec laquelle le fluide est en contact. On a $\sigma_{rz} = \eta\partial_r u$, donc avec la formule donnée $\sigma_{rz}(R) = 2\eta GR$, et la surface de contact est $2\pi Rh$, donc $F_\eta = 4\pi\eta GR^2 h$. On peut maintenant calculer la vitesse moyenne

$$V = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \mathrm{d}r 2\pi r\, u(r) = \frac{GR^2}{2}. \tag{16}$$

En remplaçant G dans l'expression de F_η on trouve bien $F_\eta = 8\pi\eta hV$.

10. *On suppose que le poids est négligeable (par exemple le tube est horizontal). Montrer que la hauteur de montée est donnée par*

$$h(t) = \sqrt{\frac{\gamma R}{2\eta}t}. \tag{17}$$

C'est la loi de Washburn. Qualitativement, comment expliquer un tel comportement ? En négligeant le poids et le terme inertiel, le PFD devient

$$0 = 2\pi R\gamma - 8\pi\eta h \mathrm{d}_t h. \tag{18}$$

En remarquant que $h\mathrm{d}_t h = \mathrm{d}_t h^2/2$, cette équation s'intègre directement pour donner la loi de Washburn. L'avancée du fluide est de plus en plus lente, vu que la force de tension superficielle qui le tire ne varie pas, alors que la force de frottement visqueux augmente lorsque le fluide avance.

11. *On ne suppose plus le poids négligeable. Déterminer une équation implicite sur $h(t)$ faisant intervenir la hauteur en régime stationnaire h_0. Retrouver la loi de Washburn dans la limite $h \ll h_0$. On donne*

$$\int_0^h \frac{\mathrm{d}z}{(h_0/z) - 1} = h_0 \ln\left(\frac{h_0}{h_0 - h}\right) - h. \tag{19}$$

Maintenant le PFD s'écrit

$$0 = 2\pi R\gamma - 8\pi\eta h \mathrm{d}_t h - \pi R^2 \rho g h. \tag{20}$$

En séparant les variables, cette équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{8\eta}{\rho g R^2} \frac{\mathrm{d}h}{h_0/h - 1} = \mathrm{d}t. \tag{21}$$

En utilisant l'intégrale donnée, on obtient

$$h_0 \ln\left(\frac{h_0}{h_0 - h}\right) - h = \frac{\rho g R^2 t}{8\eta}. \tag{22}$$

Il faut développer le logarithme à l'ordre 2 en h/h_0 pour retrouver la loi de Washburn.

Référence

P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes.*