

A l'autre bout du spectre en nombre de Reynolds

La notion de couche limite

Écoulements rotationnels et irrotationnels

Écoulements potentiels et loi de Bernoulli



Développement d'une couche limite sur une plaque plane mise en mouvement

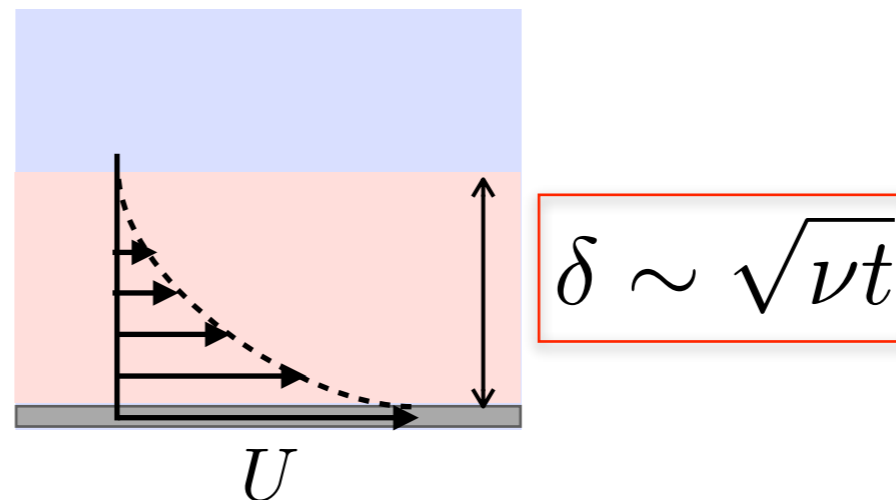
Navier Stokes

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

$$\rho \frac{U}{t} \sim \eta \frac{U}{\delta^2}$$

Épaisseur de couche de diffusion de la quantité de mouvement

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\eta}{\rho} t}$$



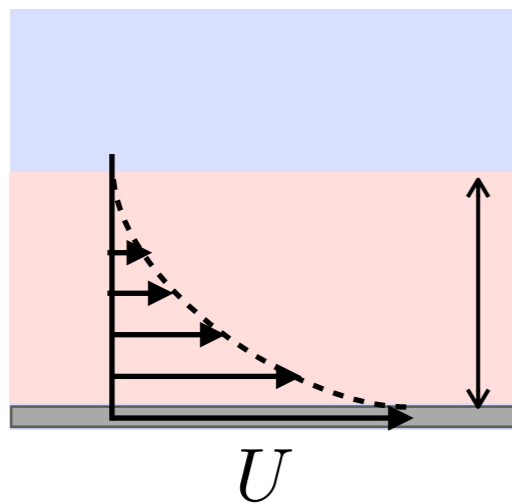
La même expérience du point de vue de la vorticité

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{u}$$

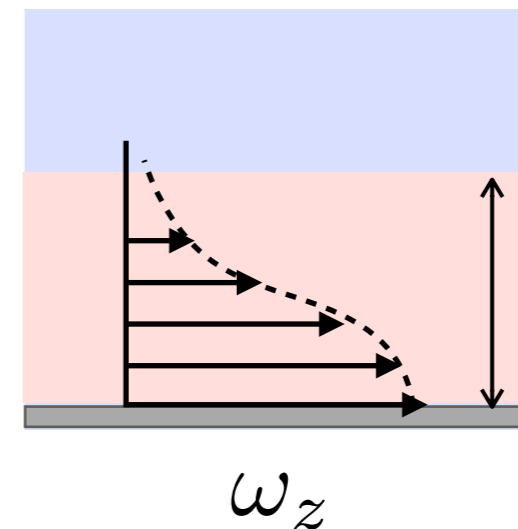
$$\omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Navier Stokes (ici)

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}$$



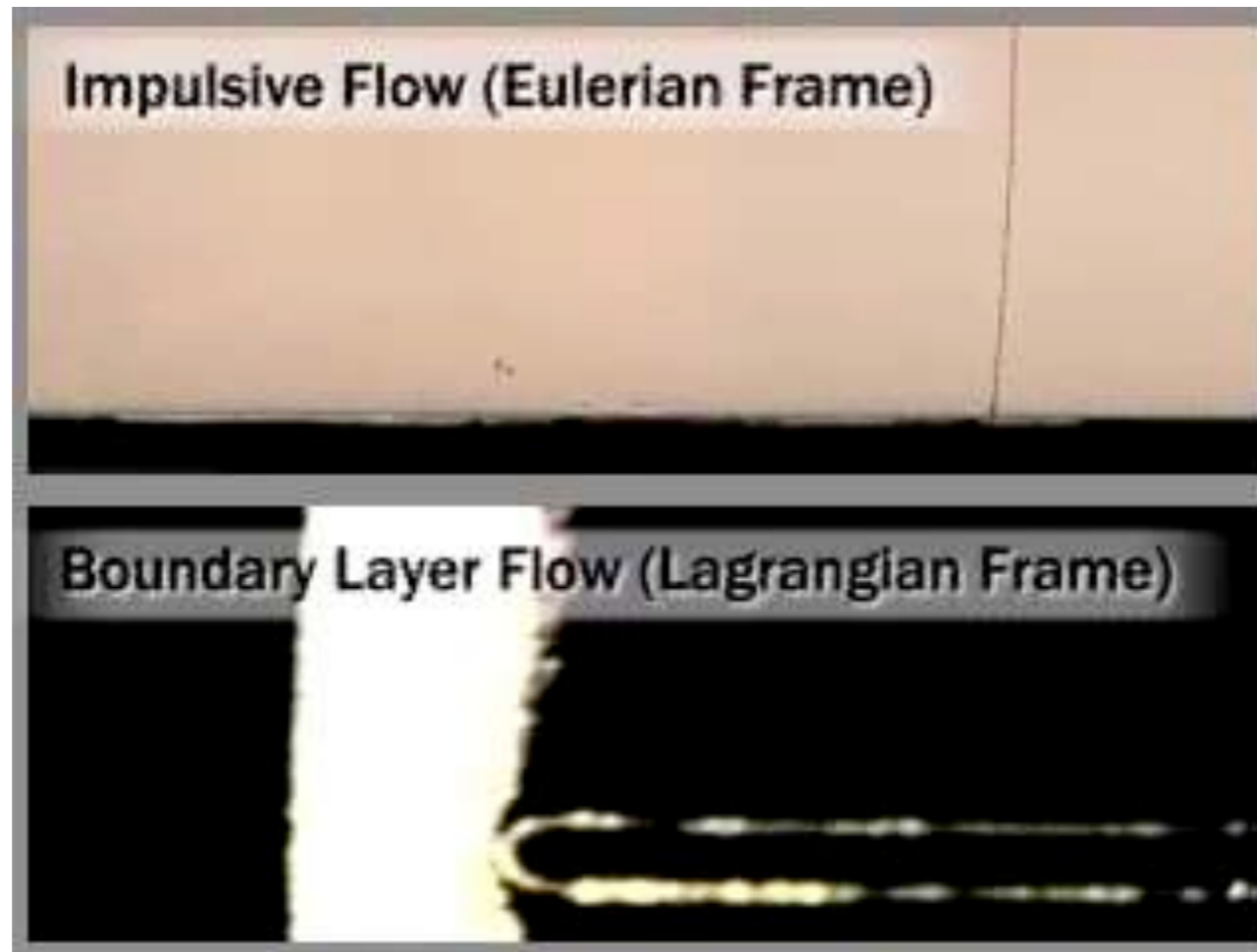
$$\delta \sim \sqrt{\nu t}$$



irrotationnel

$$\omega_z \sim 0$$

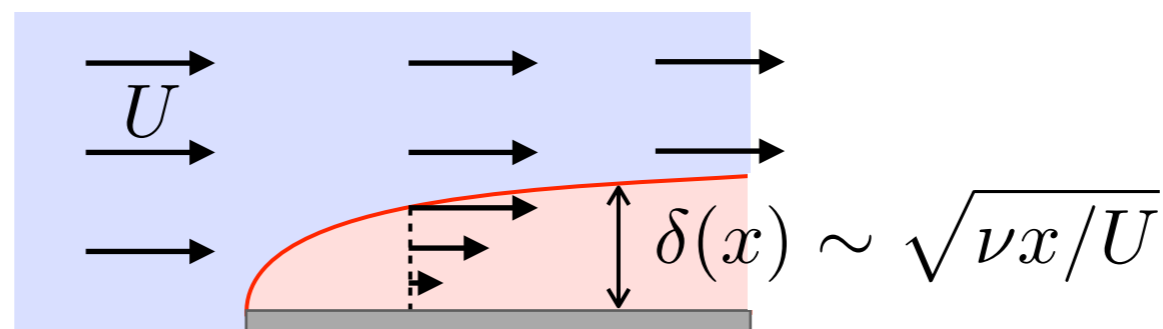
rotationnel

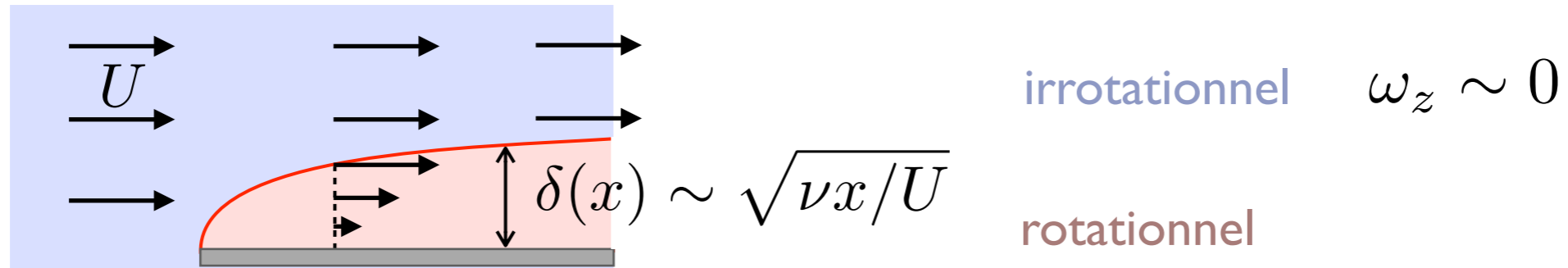


Développement d'une couche limite sur une plaque plane

$$t_d \sim \frac{\delta^2}{\nu}$$

$$t_c \sim \frac{x}{U}$$





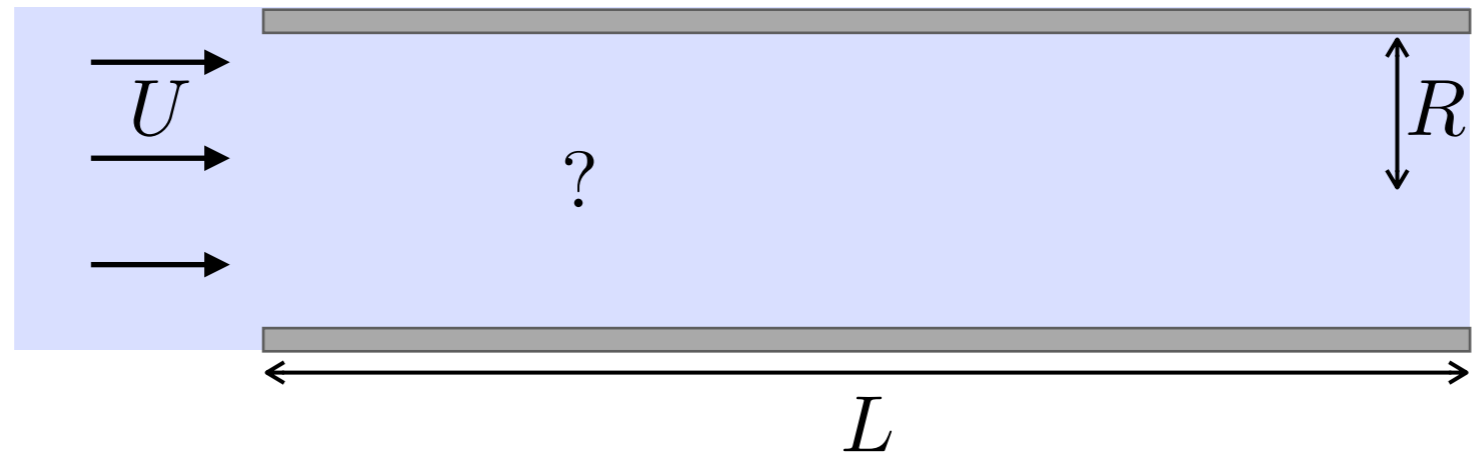
$$\delta(L) \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = L \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = L Re_L^{-1/2}$$

$$Re_L \gg 1 \rightarrow \frac{\delta(L)}{L} \ll 1$$

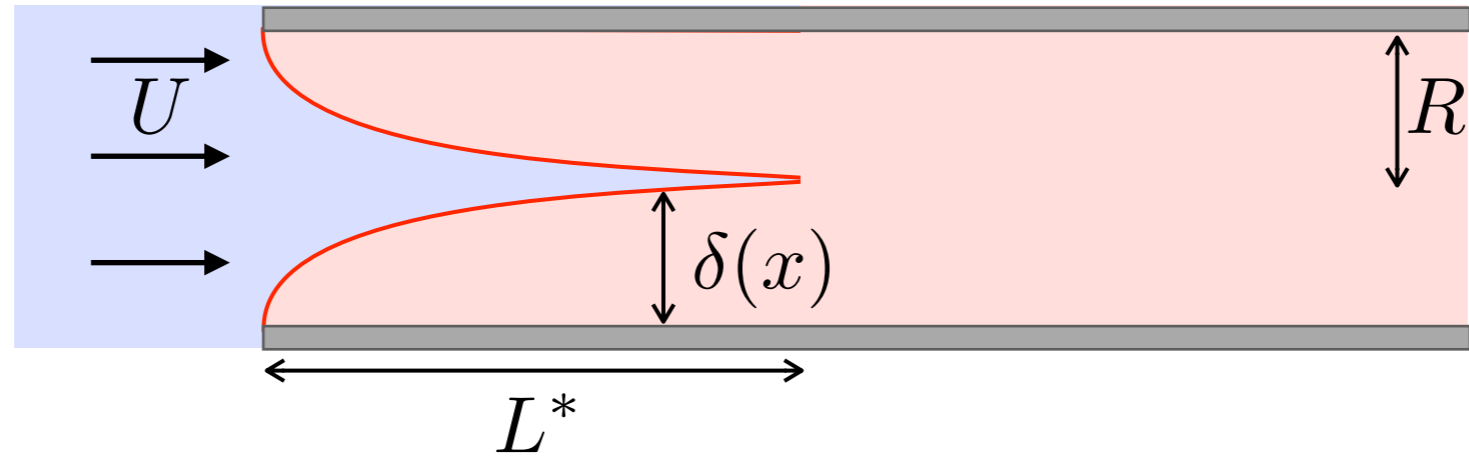
En dehors de la couche limite :
la viscosité ne joue pas de rôle, l'écoulement est irrotationnel

Dans la couche limite :
la viscosité joue un rôle, l'écoulement est rotationnel

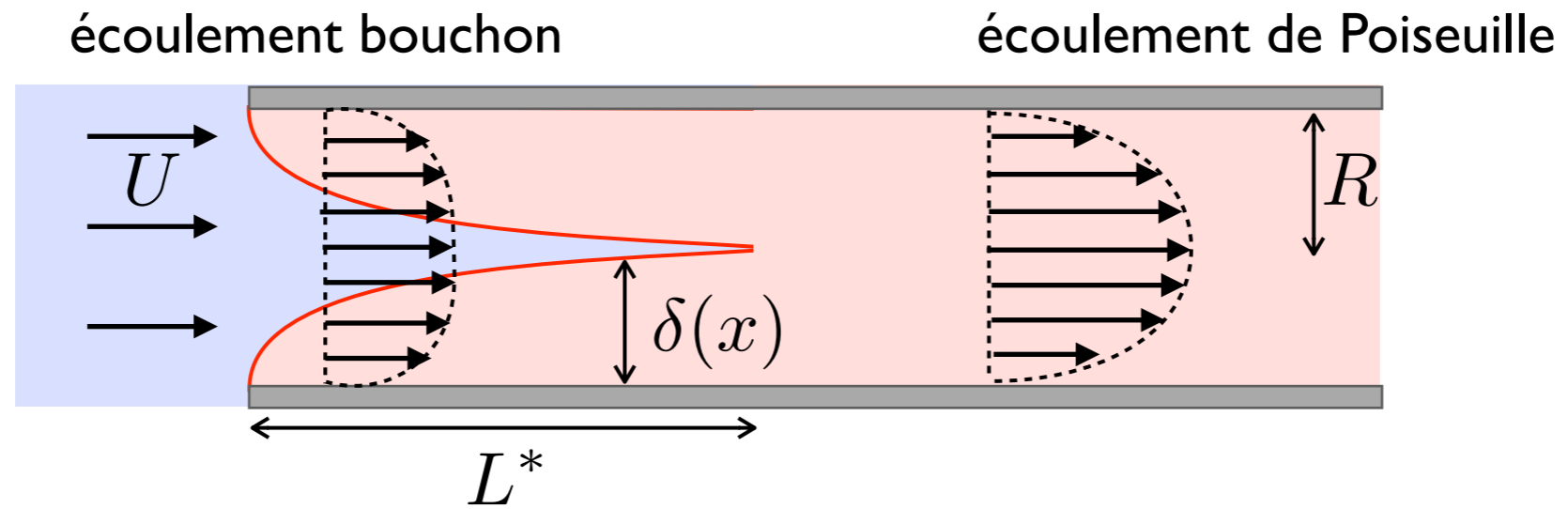
Bonus: longueur d'entrée dans un tube



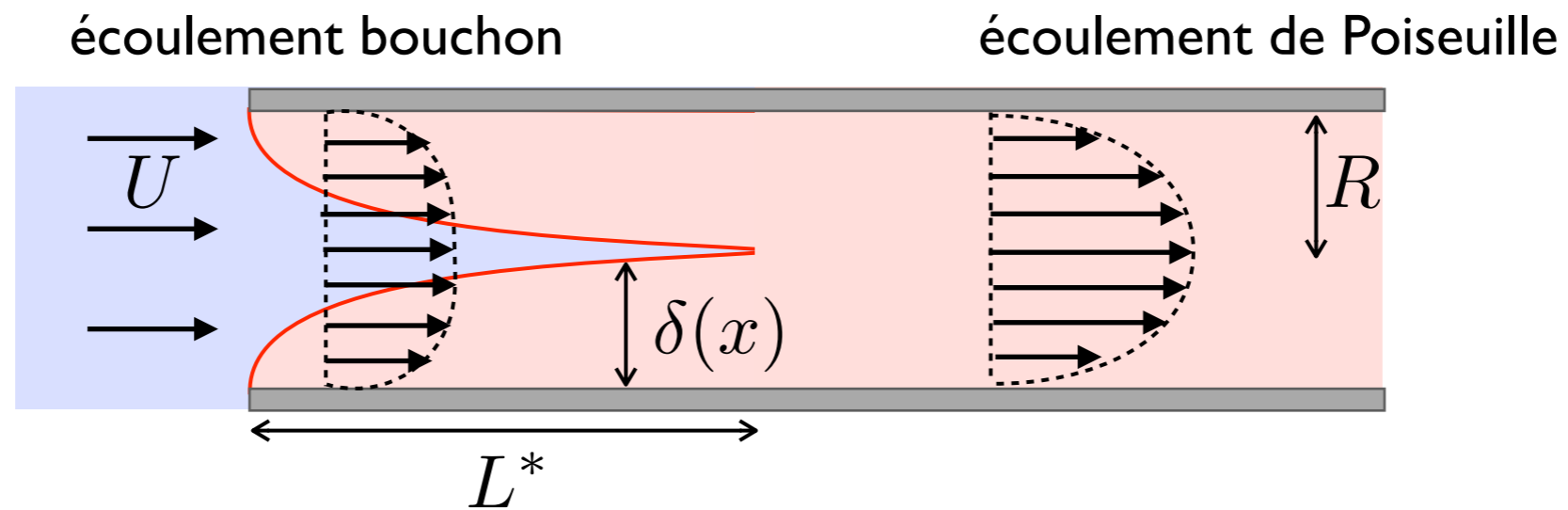
Bonus: longueur d'entrée dans un tube



Bonus: longueur d'entrée dans un tube



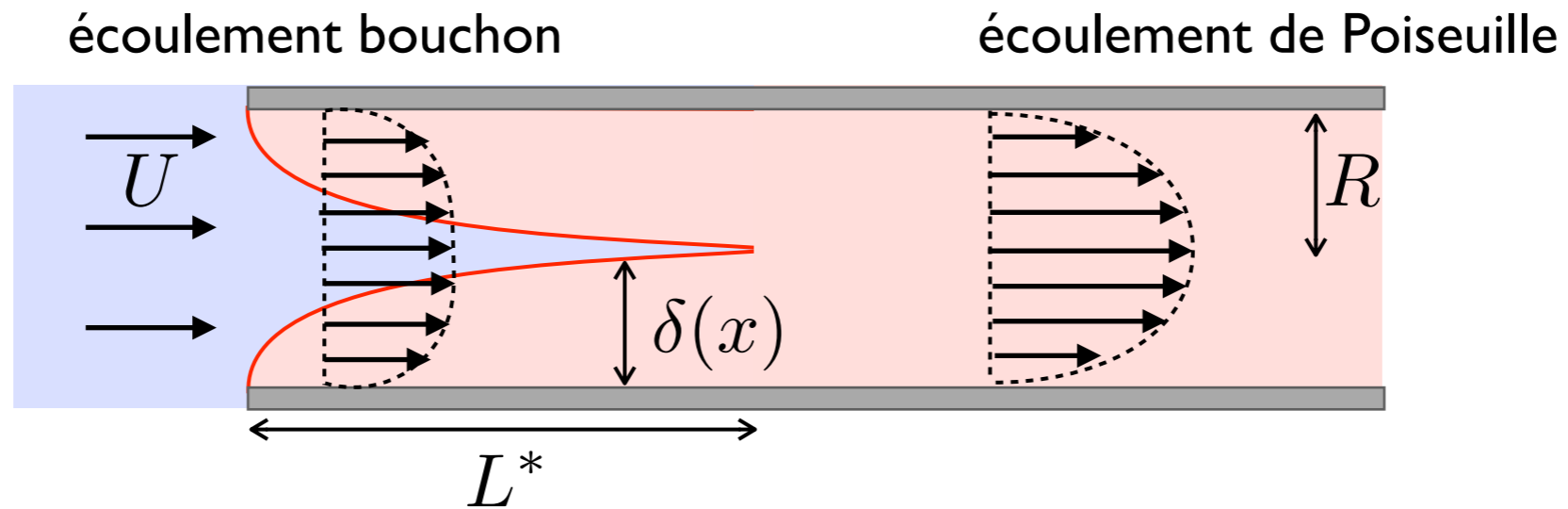
Bonus: longueur d'entrée dans un tube



$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



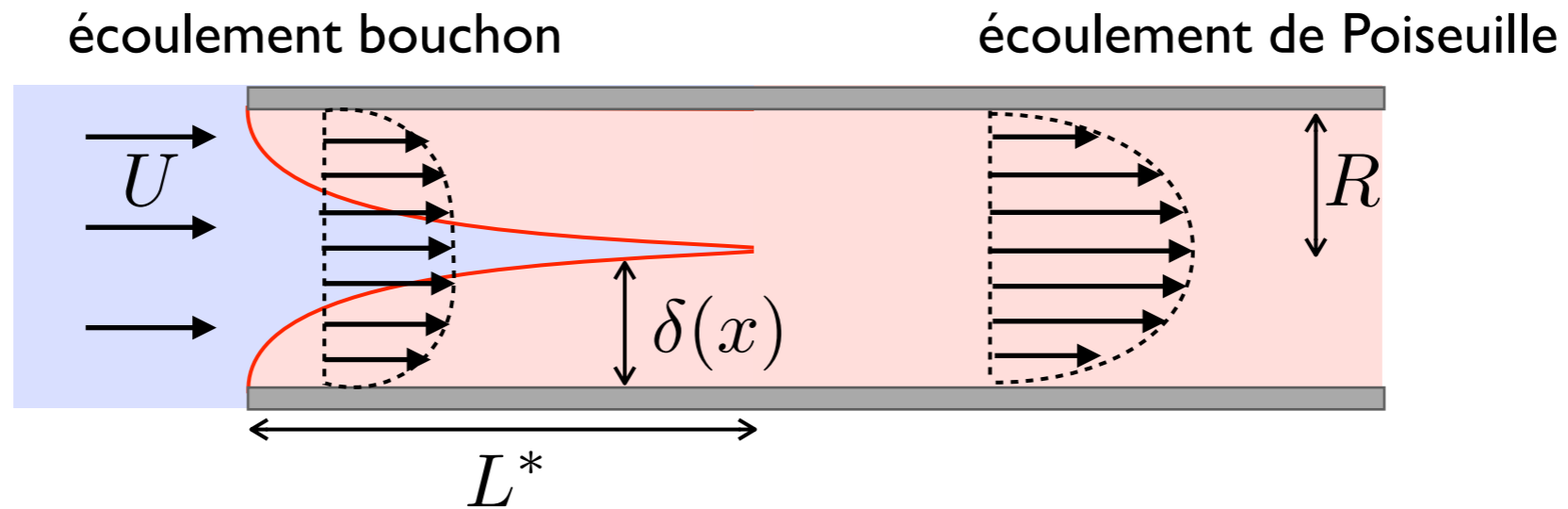
$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

Lien avec Re ?

$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



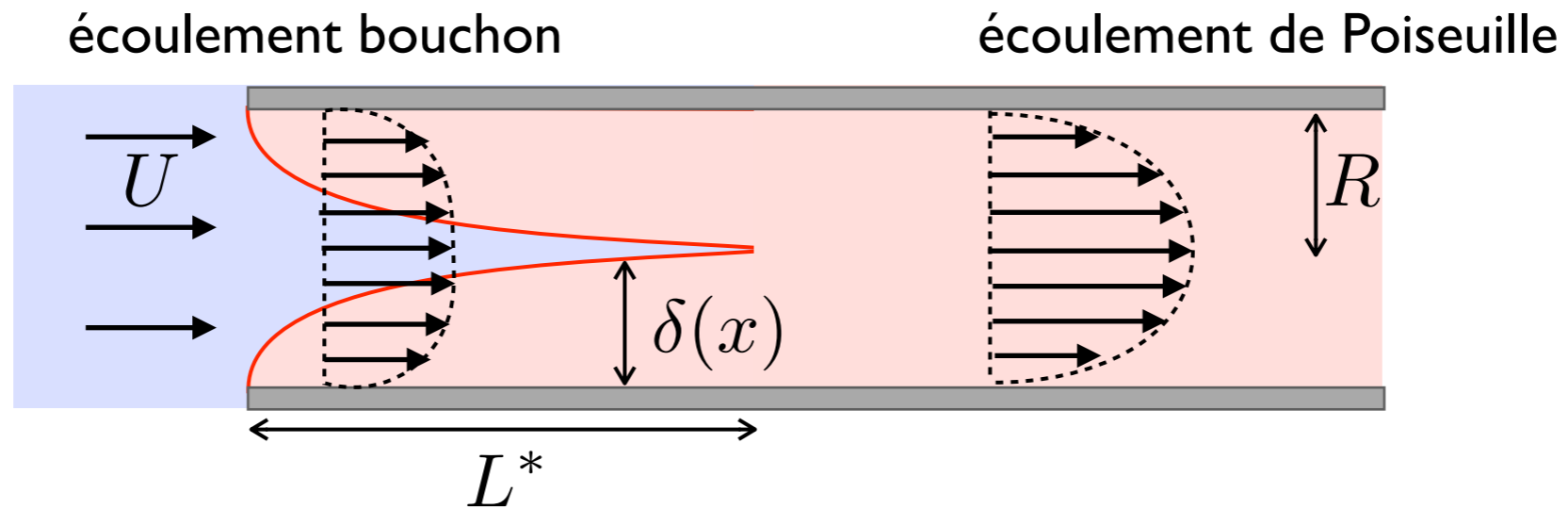
$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

Lien avec Re ?

$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u} \quad \leftarrow \quad u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



$$\delta(L^*) \sim R$$

$$L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

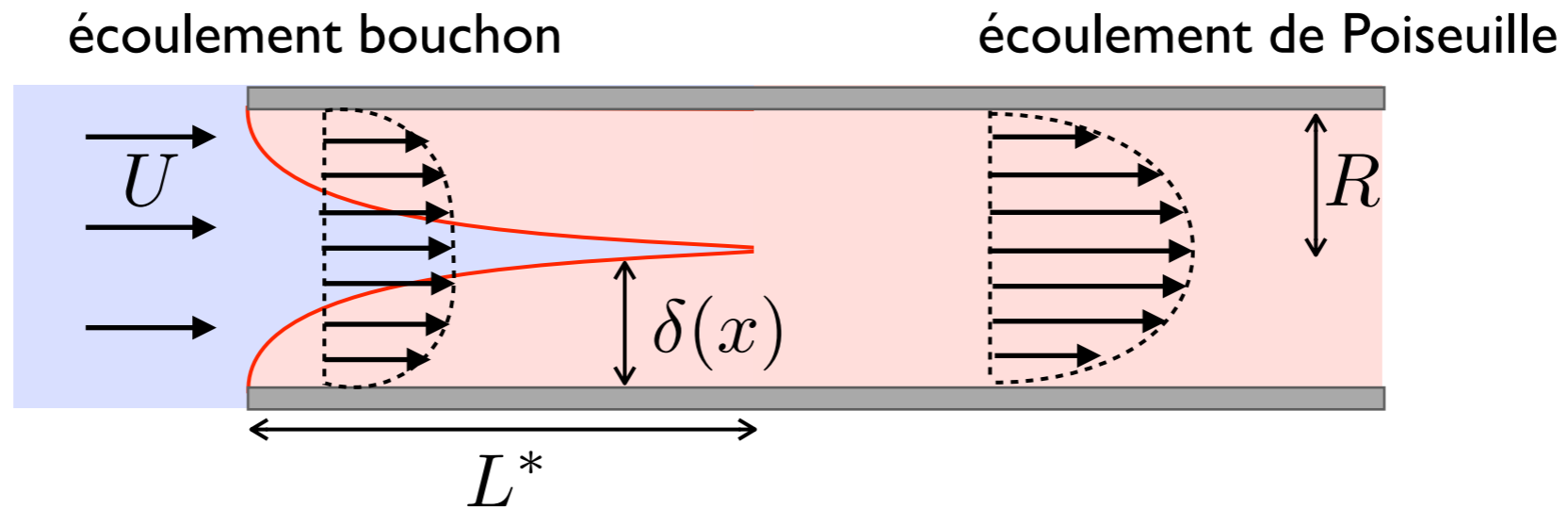
Lien avec Re ?

$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u}$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}$$

$$\Delta u \sim \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} \sim \frac{U}{R^2}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



$$\delta(L^*) \sim R \quad L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

Lien avec Re ?

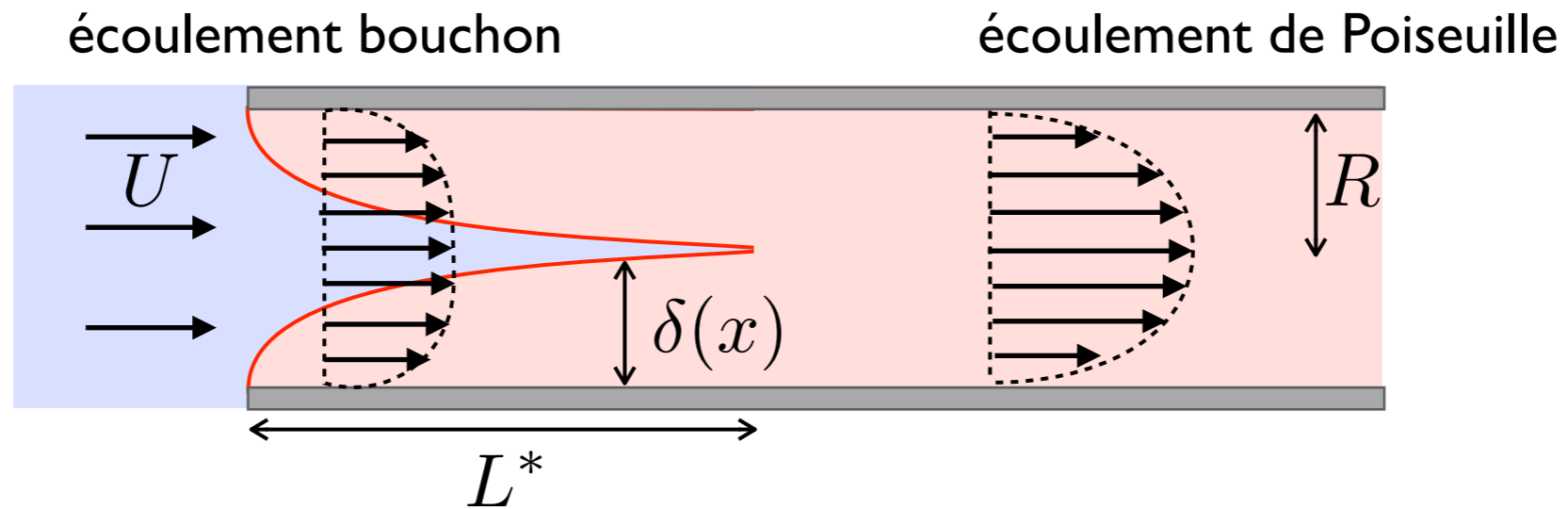
$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u}$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}$$

$$\Delta u \sim \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} \sim \frac{U}{R^2}$$

$$Re = \frac{\rho U R^2}{\eta L} = \frac{L^*}{L}$$

Bonus: longueur d'entrée dans un tube



$$\delta(L^*) \sim R \quad L^* \sim \frac{UR^2}{\nu}$$

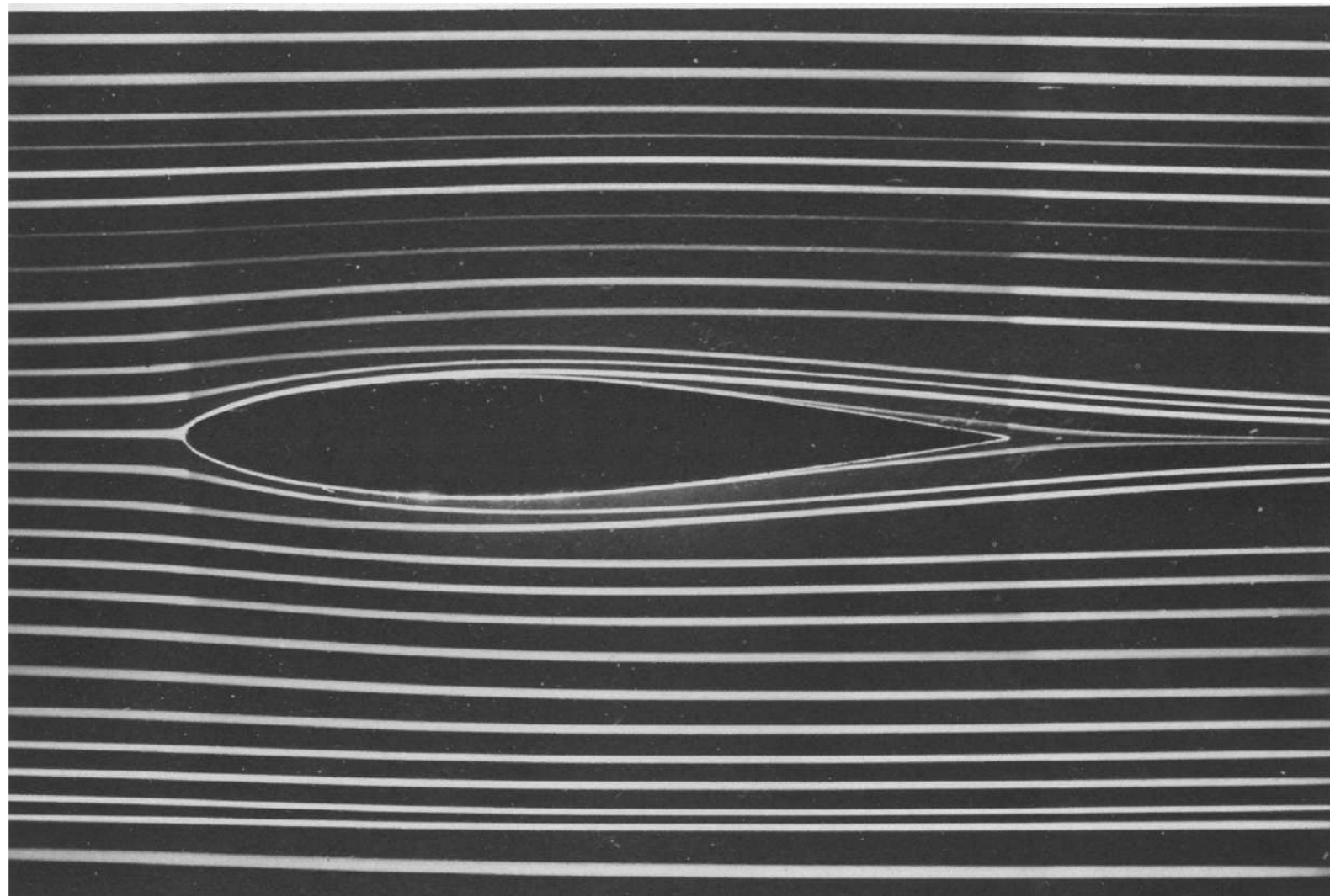
Lien avec Re ?

$$Re \sim \frac{\rho(u \cdot \nabla)u}{\eta \Delta u}$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}$$

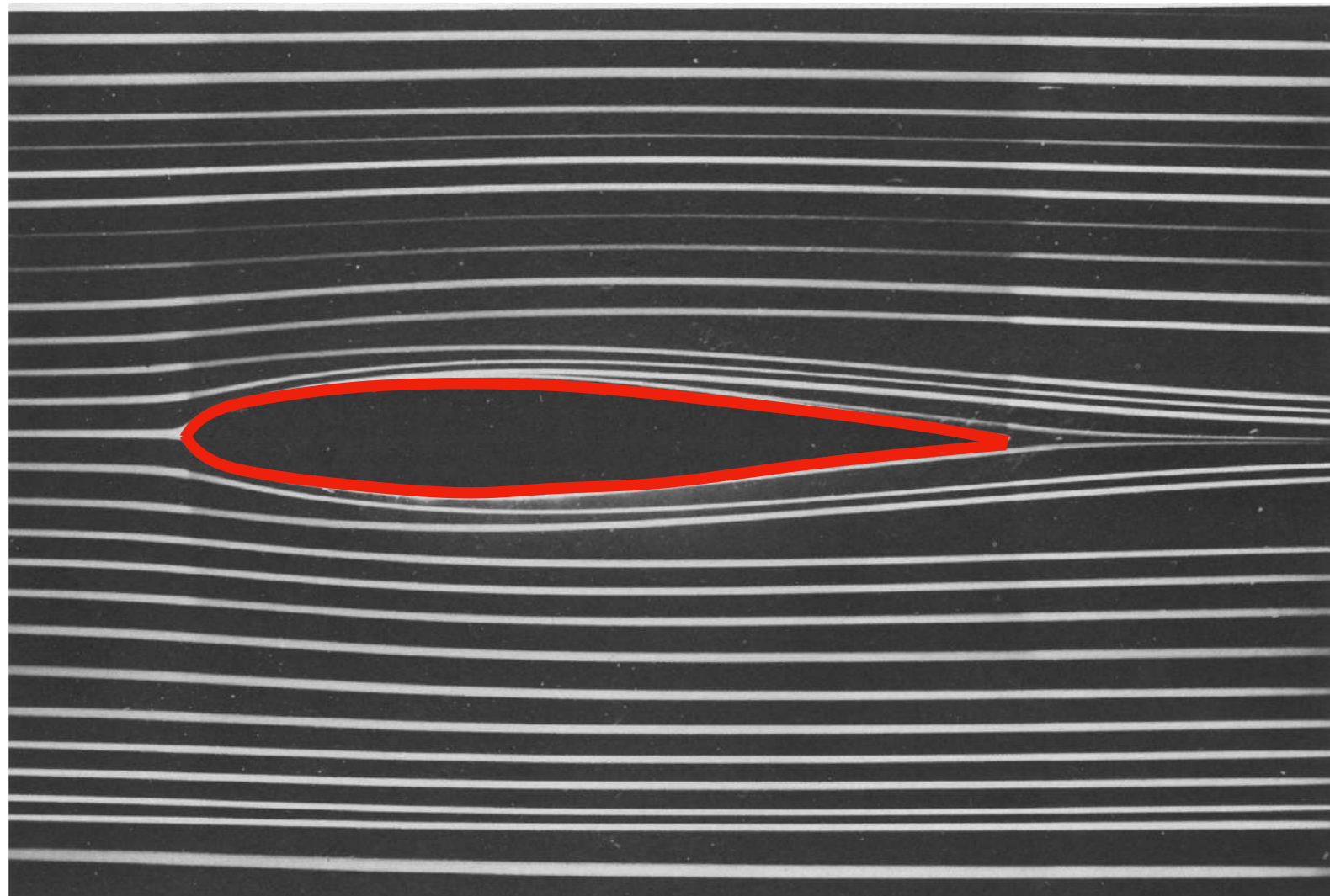
$$\Delta u \sim \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} \sim \frac{U}{R^2}$$

$$Re = \frac{\rho U R^2}{\eta L} = \frac{L^*}{L} \quad Re \ll 1 \Leftrightarrow L \gg L^*$$



Re=7000

Visualisation de la couche limite autour d'un profil d'aile



$Re=7000$

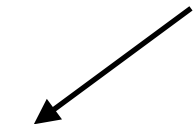
Écoulements irrotationnels (potentiels) en dehors des couches limites

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \nabla \phi$$

Le champ de vitesse dérive d'un potentiel

Loi de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} + \rho \mathbf{f}$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$


Loi de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} + \rho \mathbf{f}$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \nabla \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) - \rho \mathbf{u} \wedge (\cancel{\nabla \wedge \mathbf{u}})$$

Loi de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} + \rho \mathbf{f}$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \nabla \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) - \rho \mathbf{u} \wedge (\cancel{\nabla \wedge \mathbf{u}}) \quad \nabla (-\rho g z)$$

Loi de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} + \rho \mathbf{f}$$
$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \nabla \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) - \rho \mathbf{u} \wedge (\cancel{\nabla \wedge \mathbf{u}}) \quad \nabla (-\rho g z)$$
$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g z \right) = 0$$

Loi de Bernoulli :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \cancel{\eta \Delta \mathbf{u}} + \rho \mathbf{f}$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \nabla \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) - \rho \mathbf{u} \wedge (\cancel{\nabla \wedge \mathbf{u}}) \quad \nabla (-\rho g z)$$

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g z \right) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g z = cte(t)$$

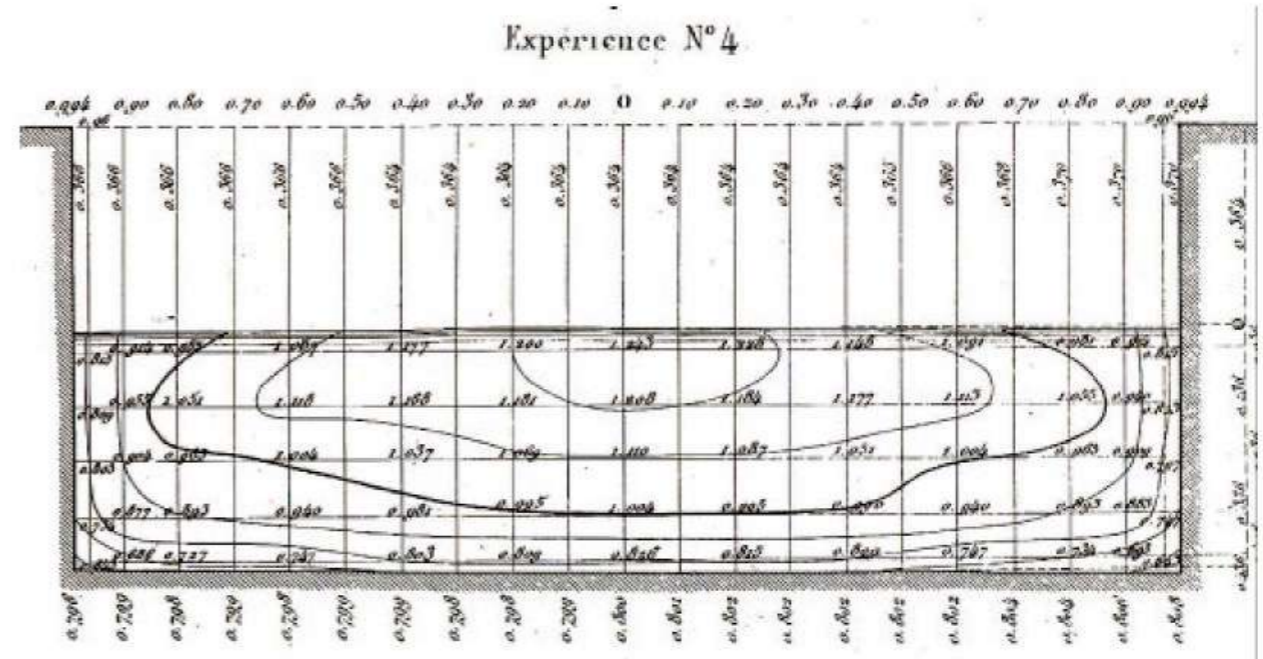
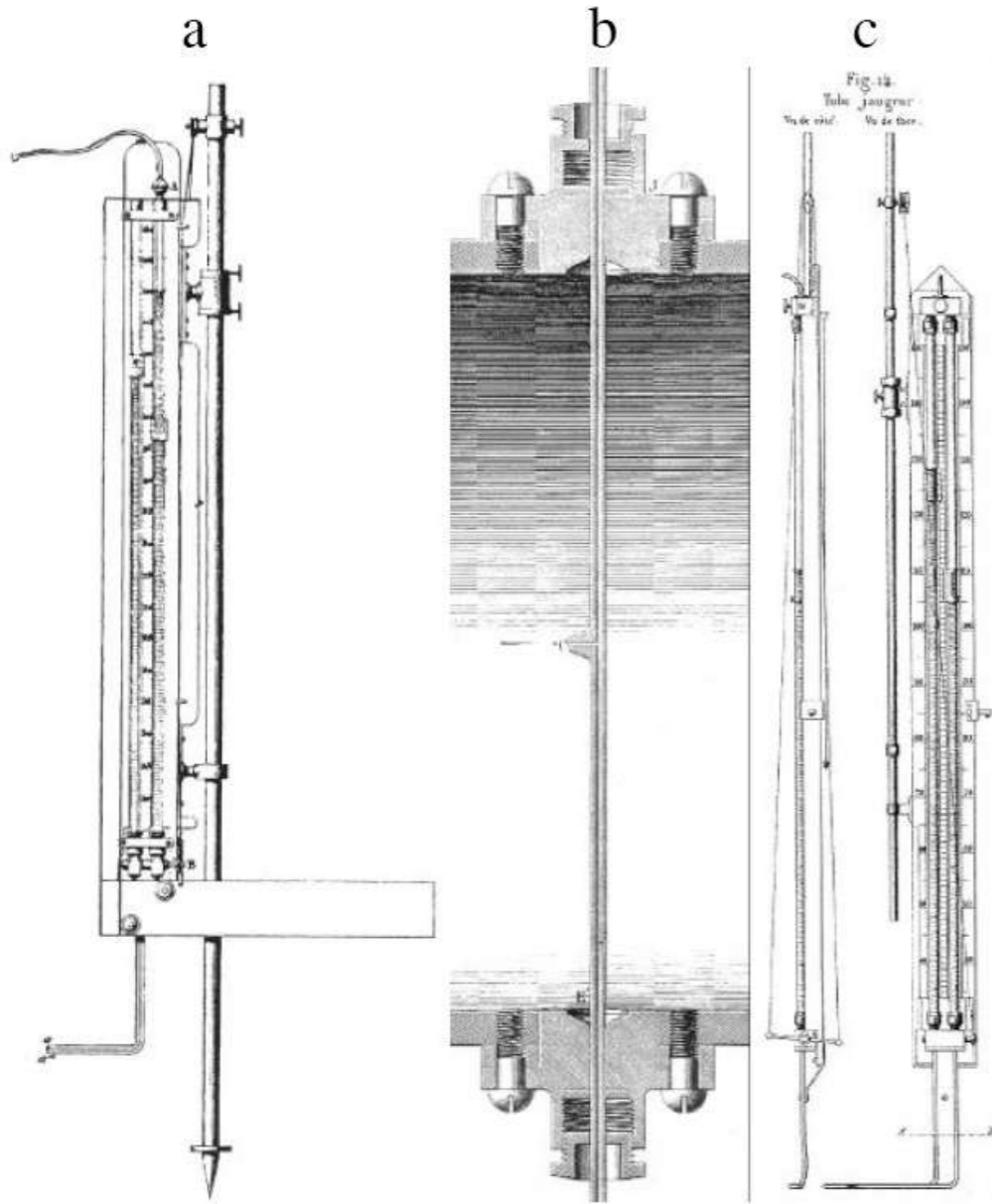
Loi de Bernoulli instationnaire

Loi de Bernoulli :

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z = C$$

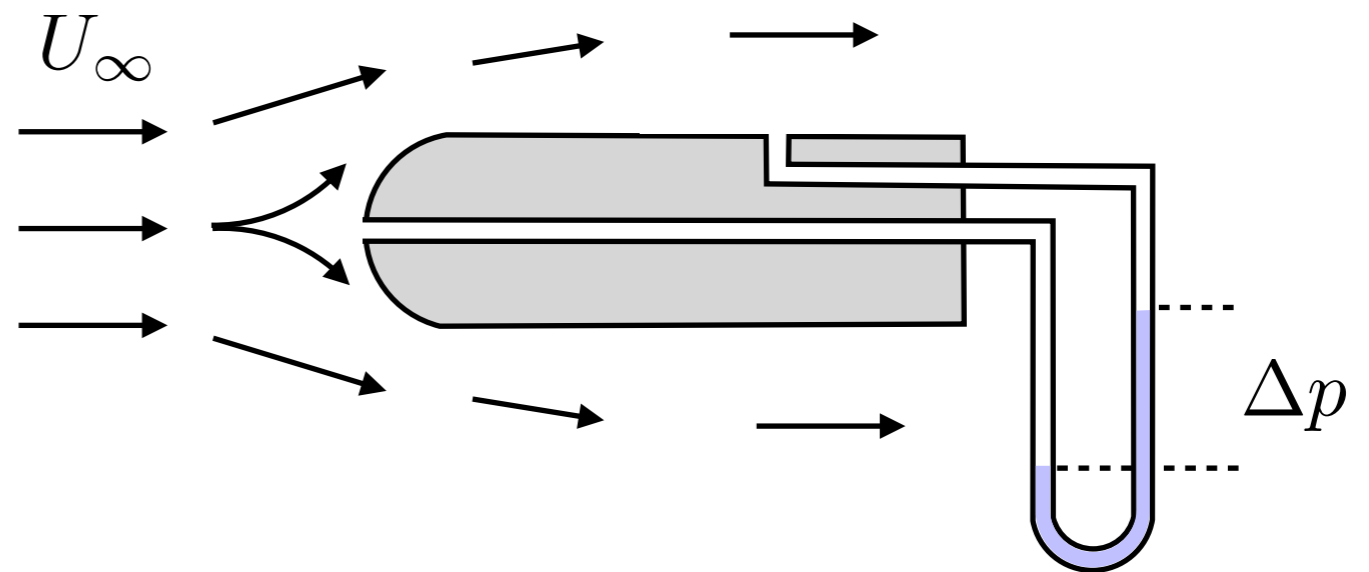
Loi de Bernoulli en écoulement stationnaire

Tube de Pitot (1732) -Darcy(~1855)



Tube de Pitot

Comment ça marche ?

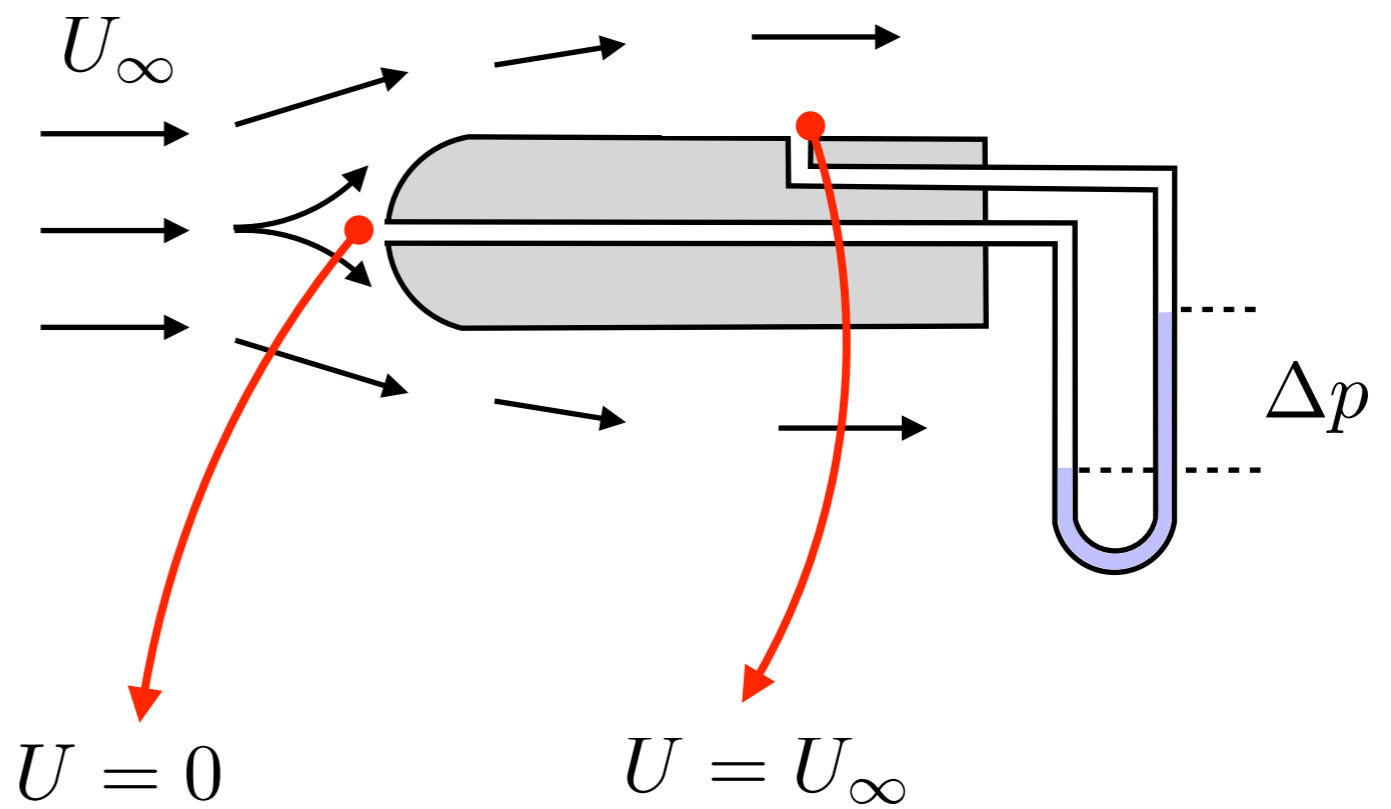


Tube de Pitot

Comment ça marche ?



Explication classique

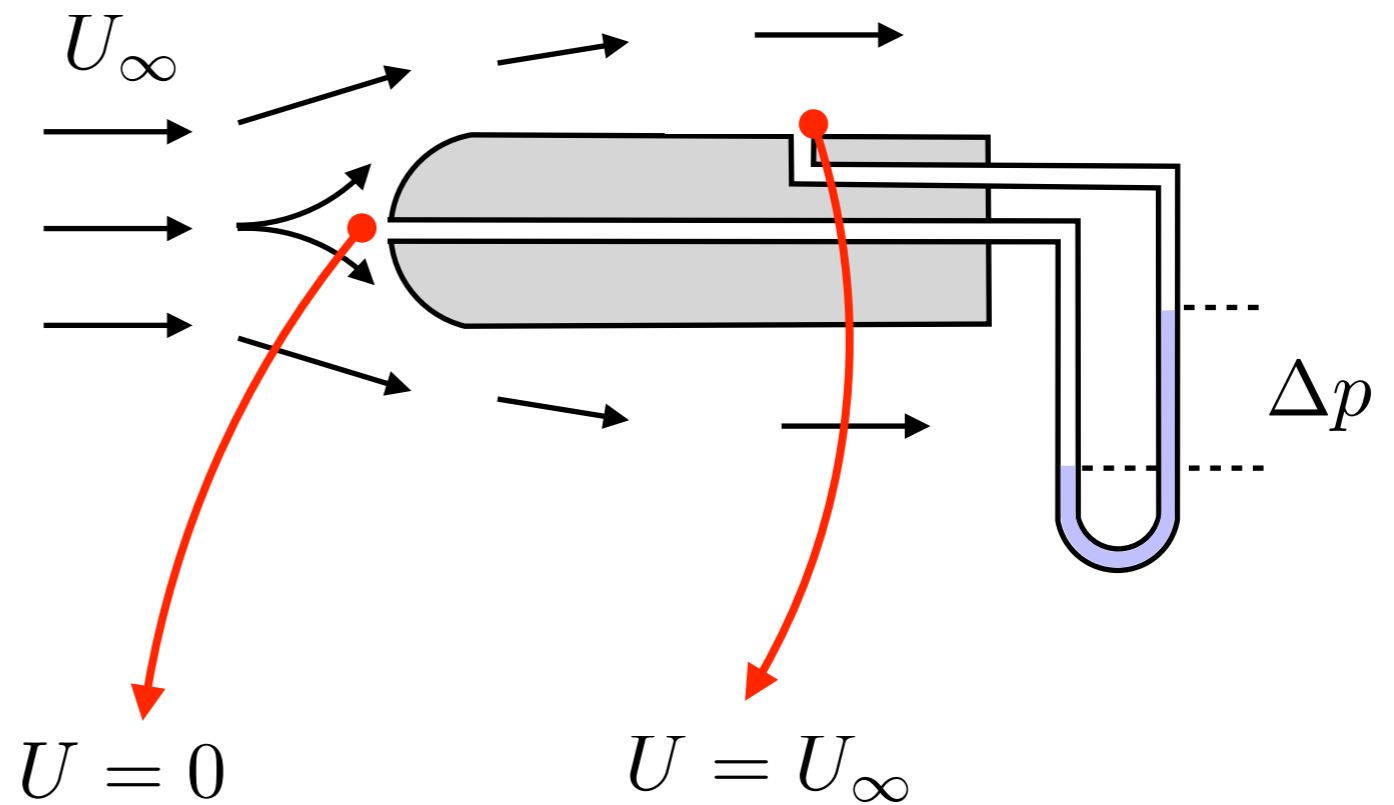


Tube de Pitot

Comment ça marche ?



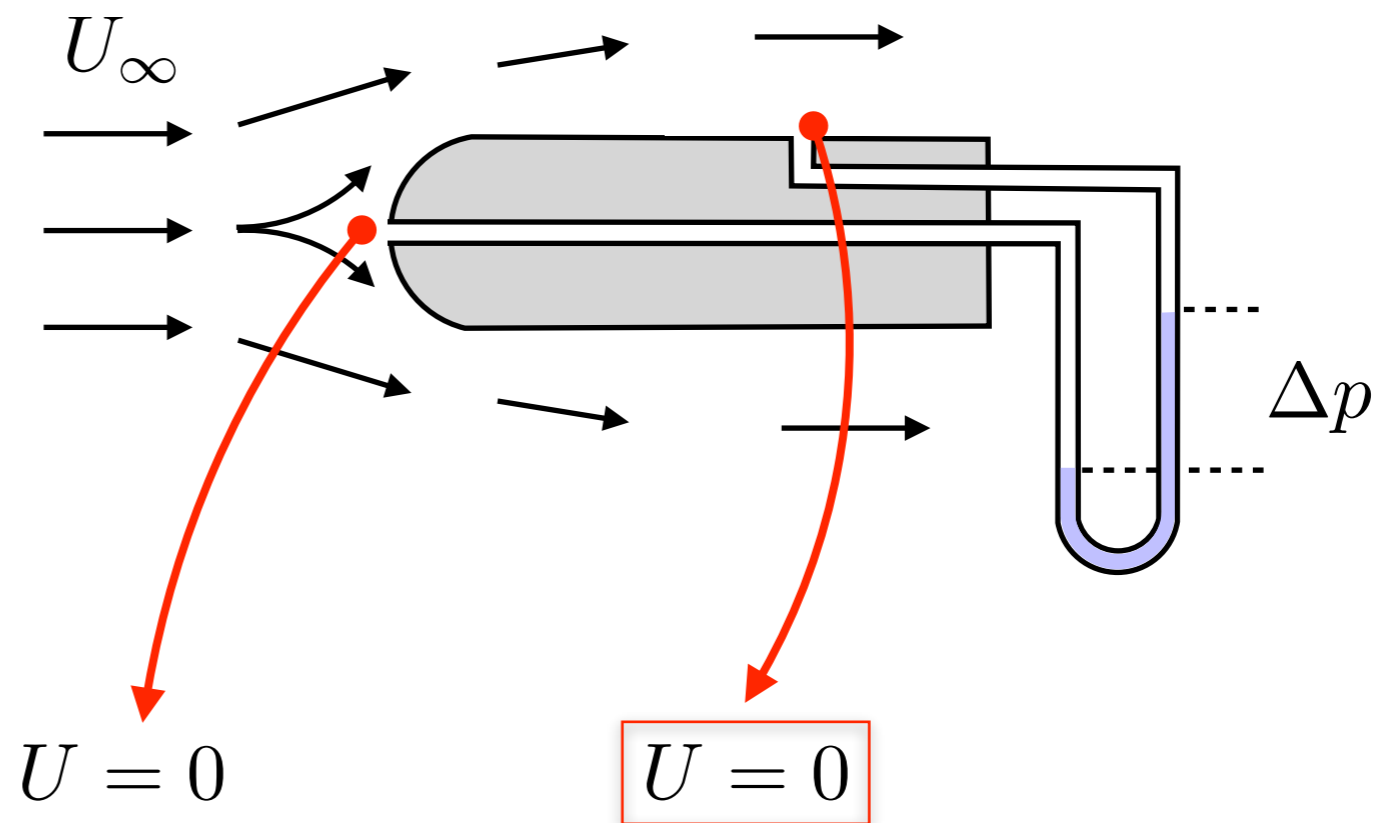
Explication classique



$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2$$

Tube de Pitot

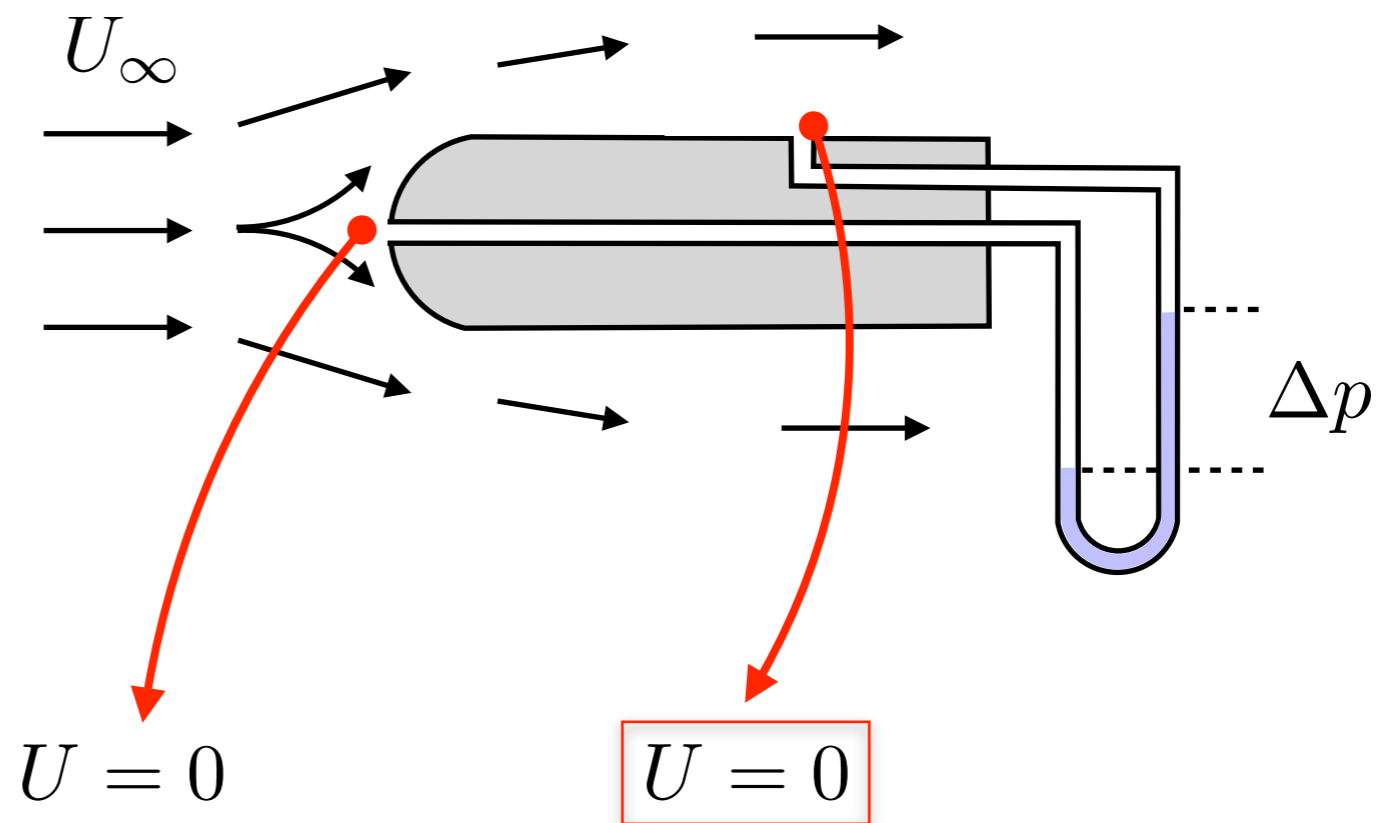
Comment ça marche ?



mais fluide réel: non glissement au niveau des parois

Tube de Pitot

Comment ça marche ?

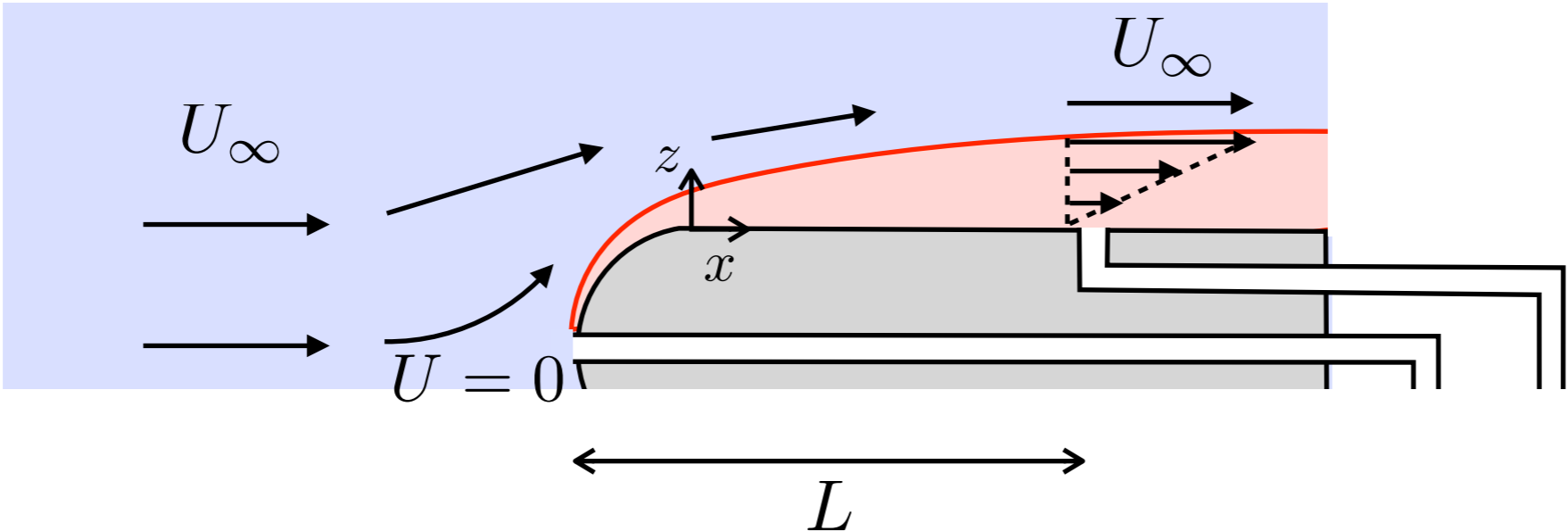


mais fluide réel: non glissement au niveau des parois

pourquoi la formule classique fonctionne-t-elle?

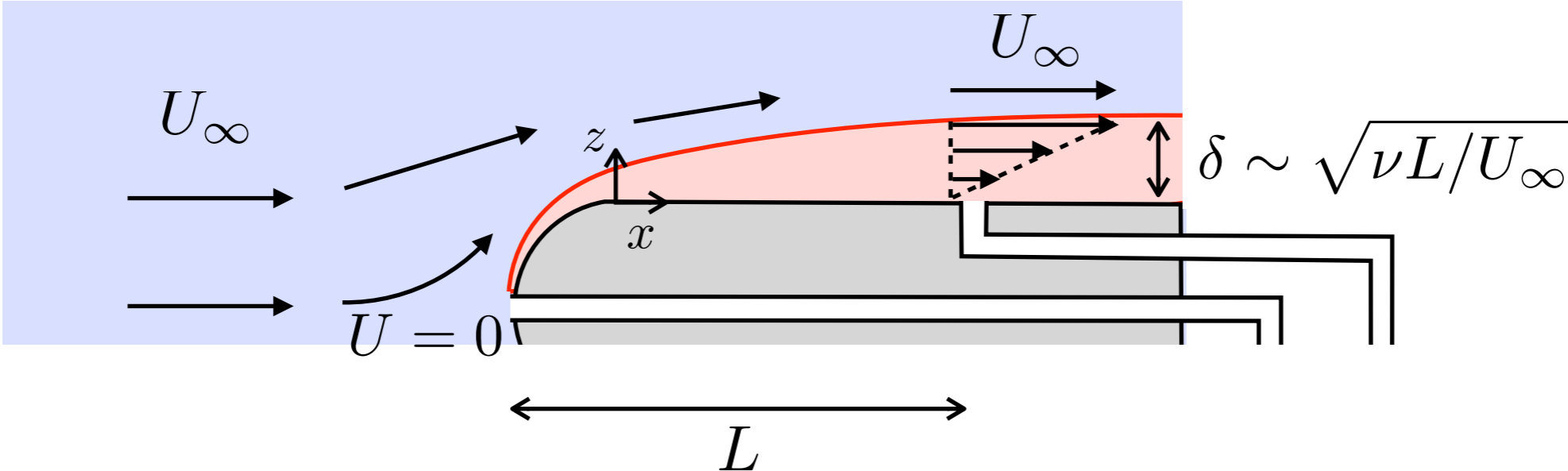
Tube de Pitot

Sauvé par les couches limites !



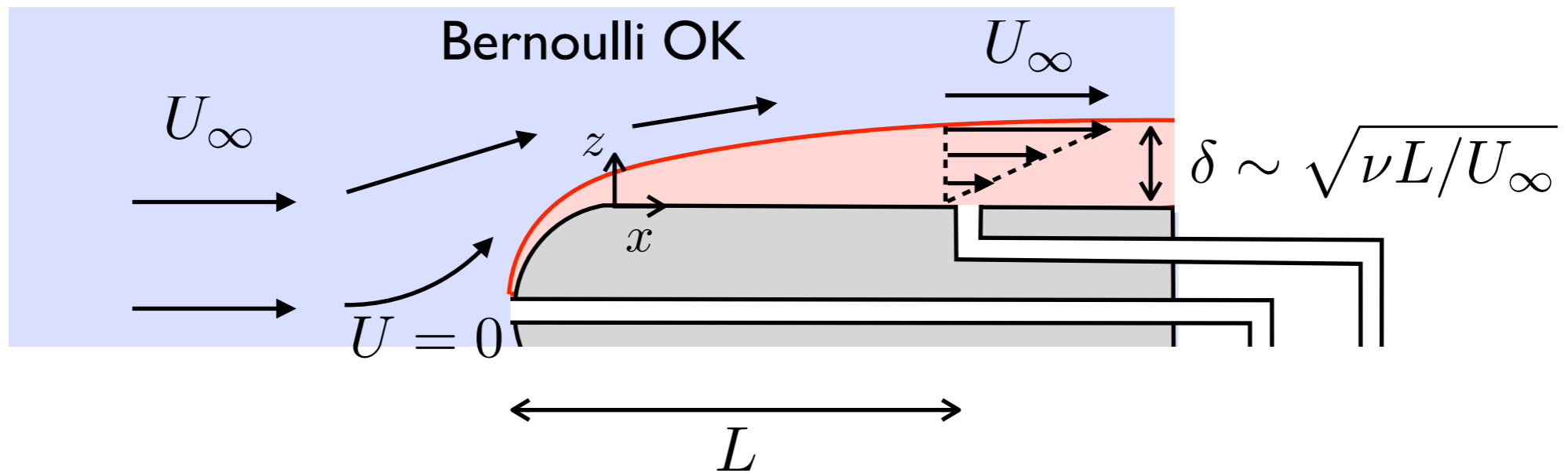
Tube de Pitot

Sauvé par les couches limites !



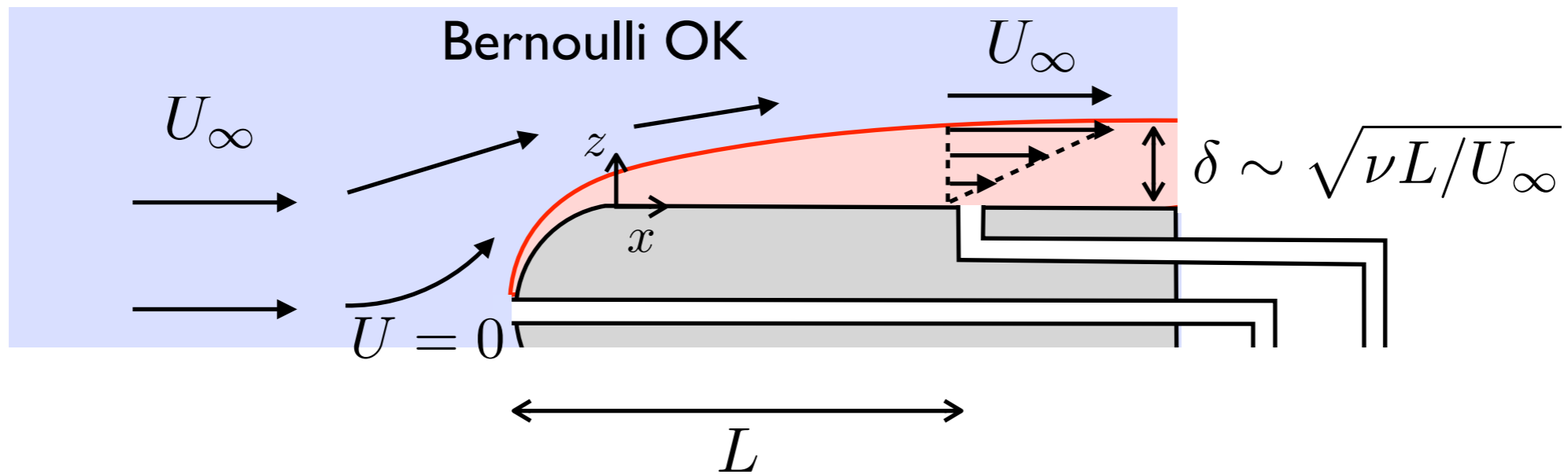
Tube de Pitot

Sauvé par les couches limites !



Tube de Pitot

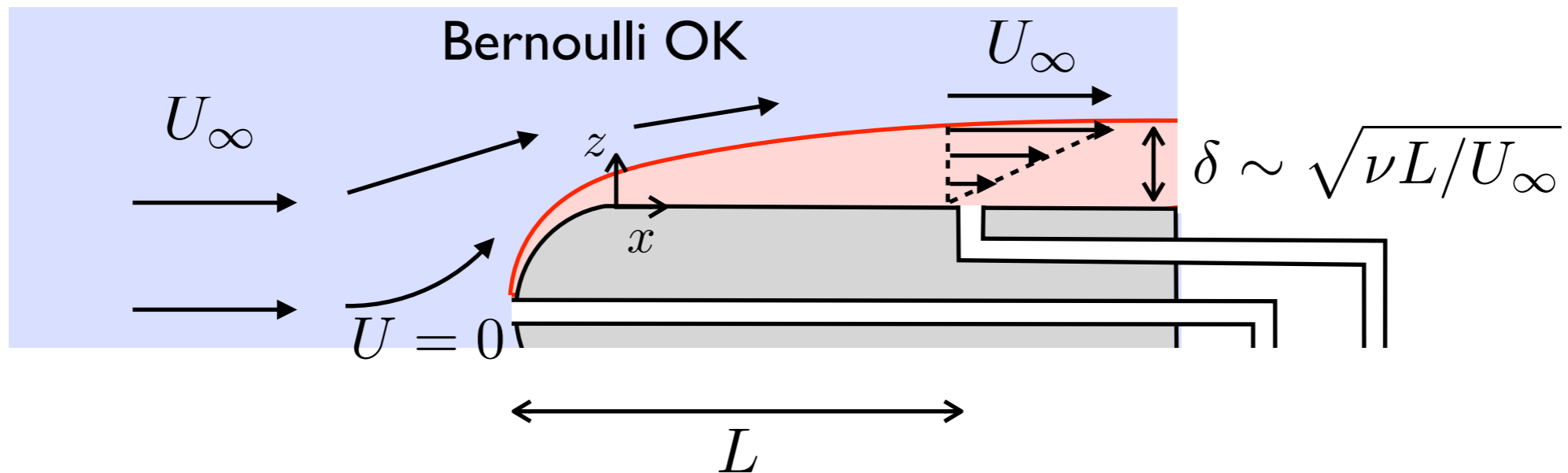
Sauvé par les couches limites !



écoulement selon u_x ?

Tube de Pitot

Sauvé par les couches limites !



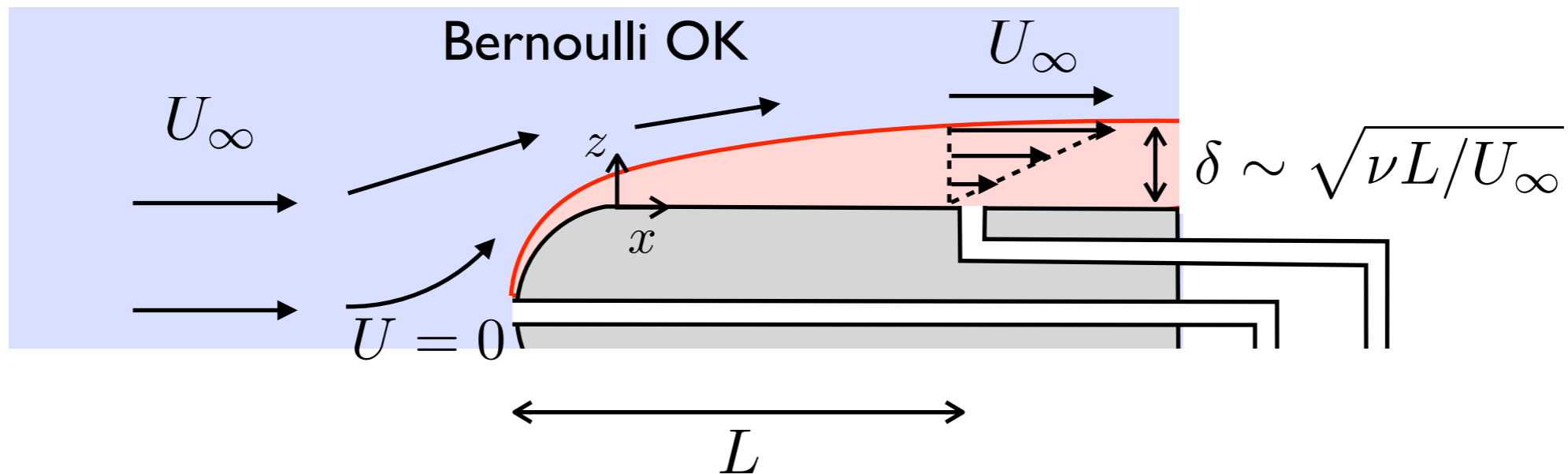
écoulement selon u_x ?

écoulement incompressible: $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Tube de Pitot

Sauvé par les couches limites !



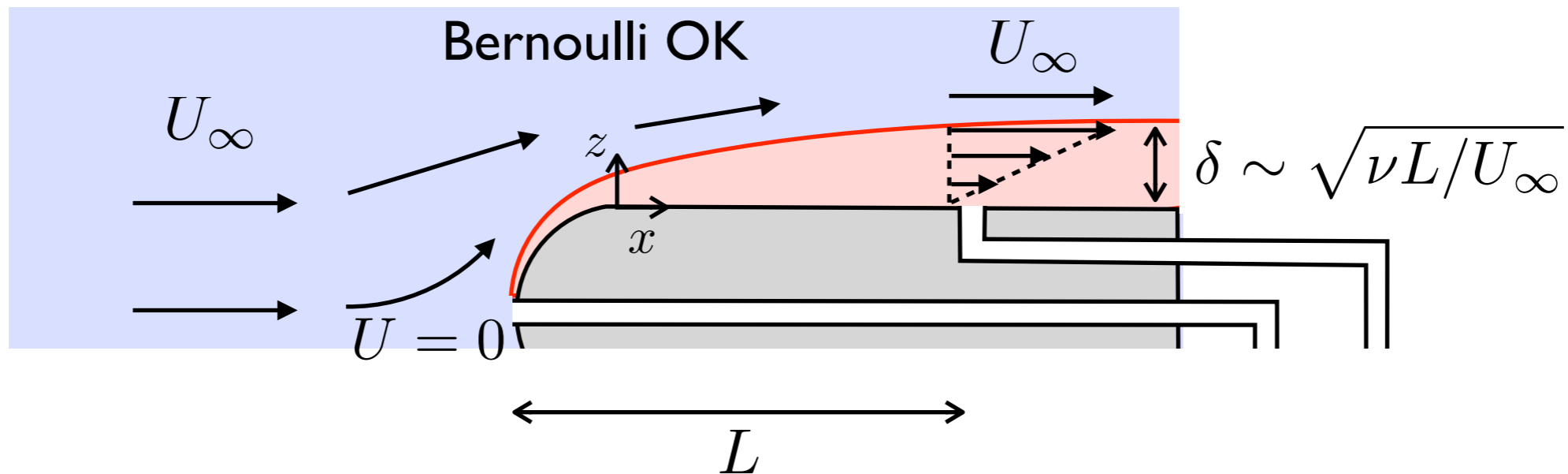
écoulement selon u_x ?

écoulement incompressible: $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_\infty}{L} \sim \frac{u_z}{\delta} \quad \Rightarrow \quad u_z \sim U_\infty \frac{\delta}{L}$$

Tube de Pitot

Sauvé par les couches limites !



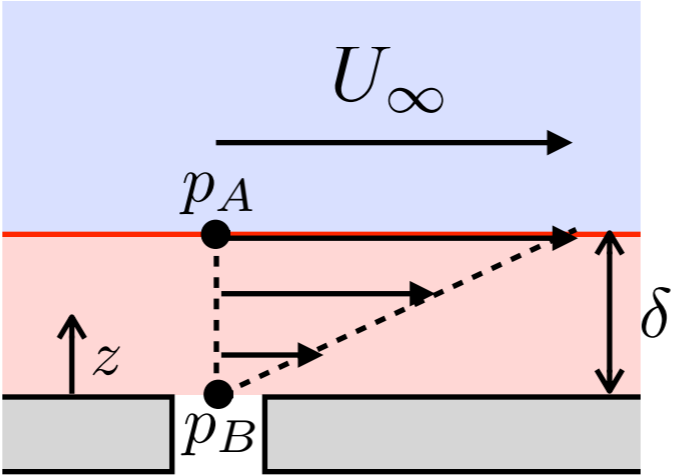
écoulement selon u_x ?

écoulement incompressible: $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_\infty}{L} \sim \frac{u_z}{\delta} \quad \Rightarrow \quad u_z \sim U_\infty \frac{\delta}{L}$$

u_z négligeable si $\delta \ll L$

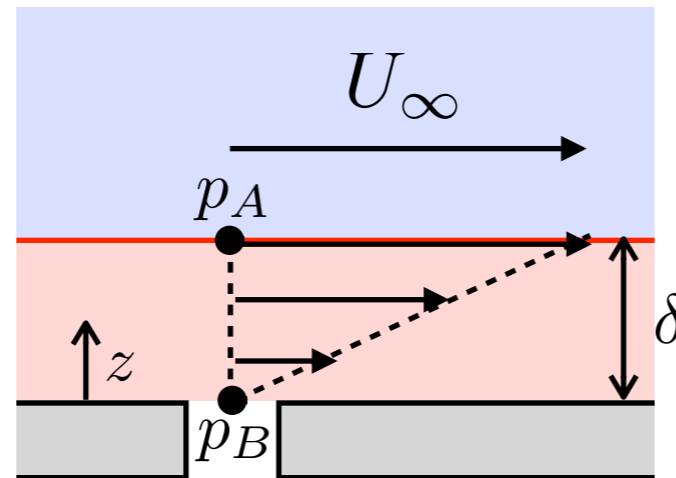
Tube de Pitot



~ fluide parfait (Bernoulli)

écoulement visqueux

Tube de Pitot



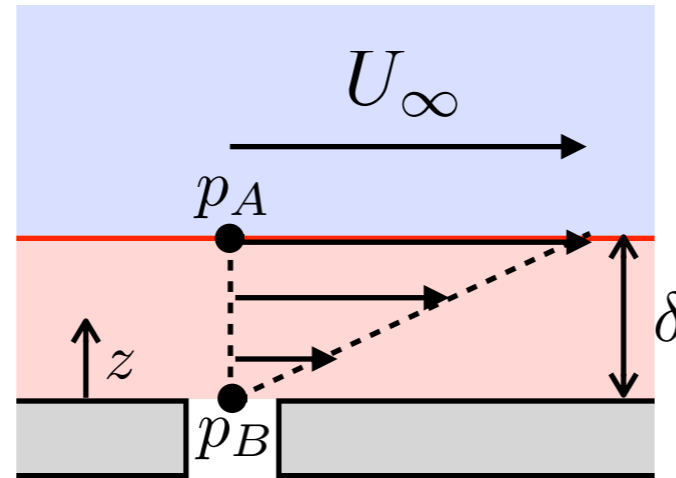
~ fluide parfait (Bernoulli)

écoulement visqueux

équation de Stokes sur z

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad p_B = p_A + \rho g \delta$$

Tube de Pitot



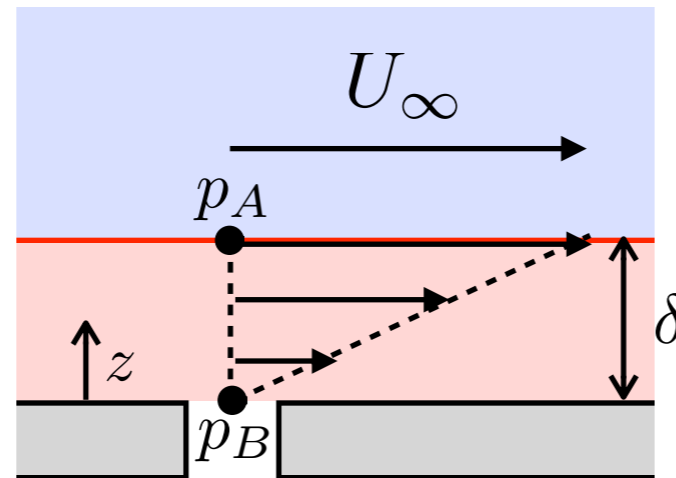
~ fluide parfait (Bernoulli)

écoulement visqueux

équation de Stokes sur z

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad p_B = p_A + \cancel{\rho g \delta}$$

Tube de Pitot



~ fluide parfait (Bernoulli)

écoulement visqueux

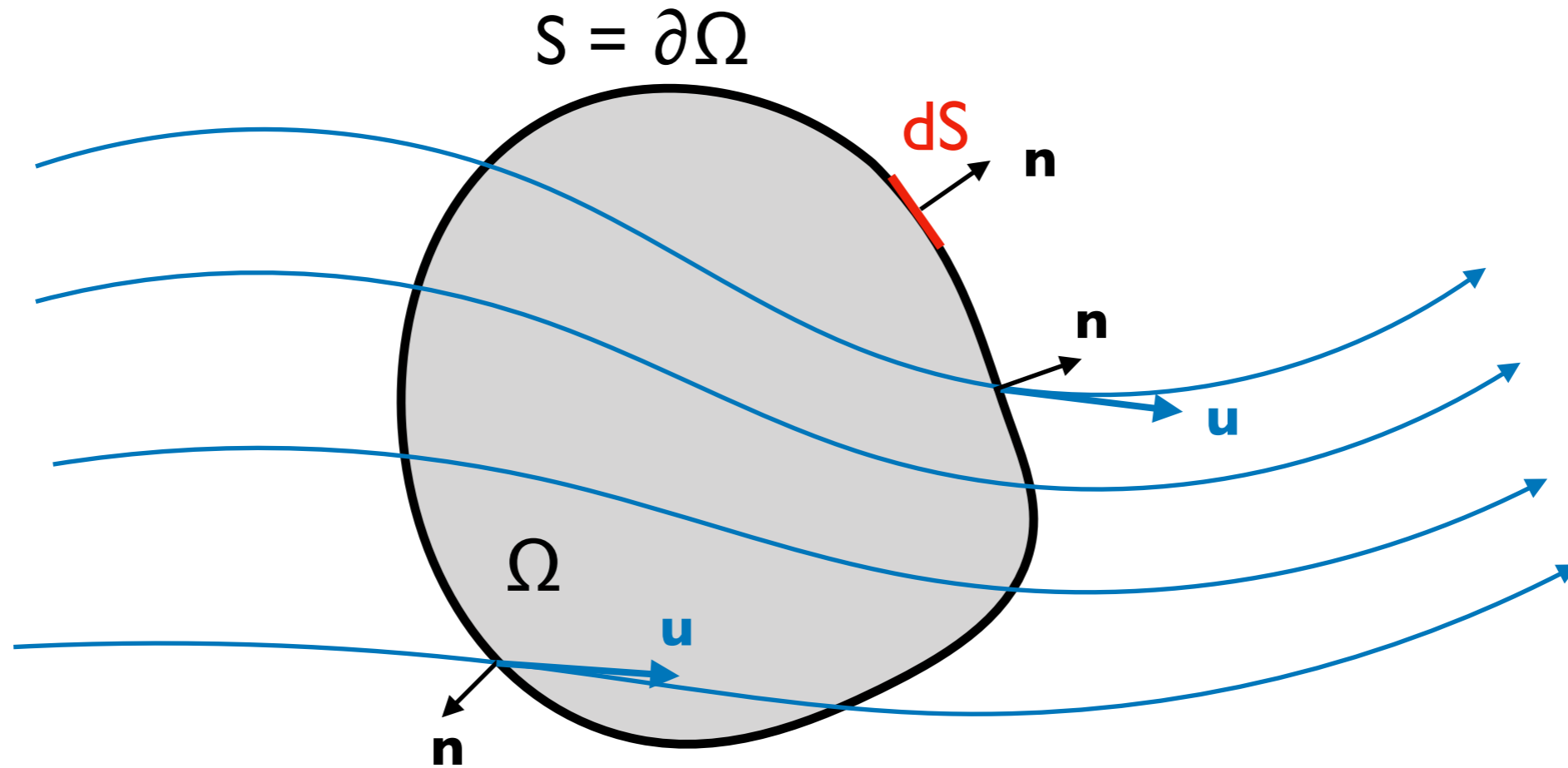
équation de Stokes sur z

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad p_B = p_A + \cancel{\rho g \delta}$$

$p_A \leftrightarrow$ Bernoulli

Relation classique OK (à la condition $\delta \ll L$)

La conservation de la quantité de mouvement en « fluide parfait »



$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} dV - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\rho \mathbf{u}}_{\text{vecteur}} \underbrace{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}_{\text{scalaire}} dS + \int_{\partial\Omega} \underbrace{\underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}}_{\text{contraintes}} dS$$

En négligeant la viscosité :

$$\sigma = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} dV - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} dS$$

En écoulement stationnaire :

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{f} dV - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} dS = 0$$