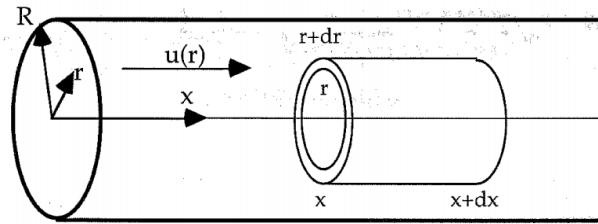


TD1 : Bilans de forces, écoulement de Poiseuille

Florentin Daniel*, Mathilde Reyssat

On considère un tube cylindrique de rayon R et de longueur $L \gg R$, rempli d'un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique η . Le fluide est mis en mouvement par l'application d'une surpression ΔP à l'entrée du tube. On suppose qu'un régime stationnaire est atteint ; on cherche dans ce cas à déterminer la relation entre le débit volumique Q et la surpression ΔP . On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, x) .



On cherche le champ de vitesse sous la forme $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(r, x)\mathbf{e}_x$.

1. Montrer que l'incompressibilité du fluide impose l'absence de dépendance en x du champ de vitesse.

On note $p(r, x)$ la pression dans le fluide, et $\sigma_{xr}(r_0)$ la contrainte tangentielle en $r = r_0$, c'est-à-dire la force exercée dans la direction x sur une surface unité de normale \mathbf{e}_r par le fluide situé en $r > r_0$.

2. On considère un élément de volume infinitésimal compris entre x et $x+dx$, r et $r+dr$, comme sur le schéma ci-dessus. Faire un bilan de forces dans la direction x sur cet élément de volume.

La viscosité dynamique est le coefficient de proportionnalité entre la contrainte tangentielle et le gradient de vitesse : $\sigma_{xr} = \eta \partial_r u$.

3. En déduire une équation différentielle reliant p et u .
4. En limitant maintenant l'élément de volume entre θ et $\theta + d\theta$, montrer que la pression ne dépend pas de r . Intégrer alors une première fois l'équation obtenue. On exprimera la constante qui apparaît en fonction de ΔP et L .
5. On suppose une condition de non-glissement aux parois : $u(R) = 0$. En déduire l'expression du champ de vitesse.
6. Montrer que le débit volumique Q est donné par

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}.$$

On suppose maintenant qu'il y a du glissement aux parois : on introduit une longueur de glissement b , et la condition sur la vitesse à la paroi est alors donnée par $u(R) = -b \partial_r u|_R$.

7. Interpréter géométriquement cette condition.
8. Trouver la nouvelle expression du champ de vitesse.
9. En calculant le nouveau débit volumique, discuter de la taille du canal à partir de laquelle le glissement affecte significativement le champ de vitesse.

*florentin.daniel@phys.ens.fr