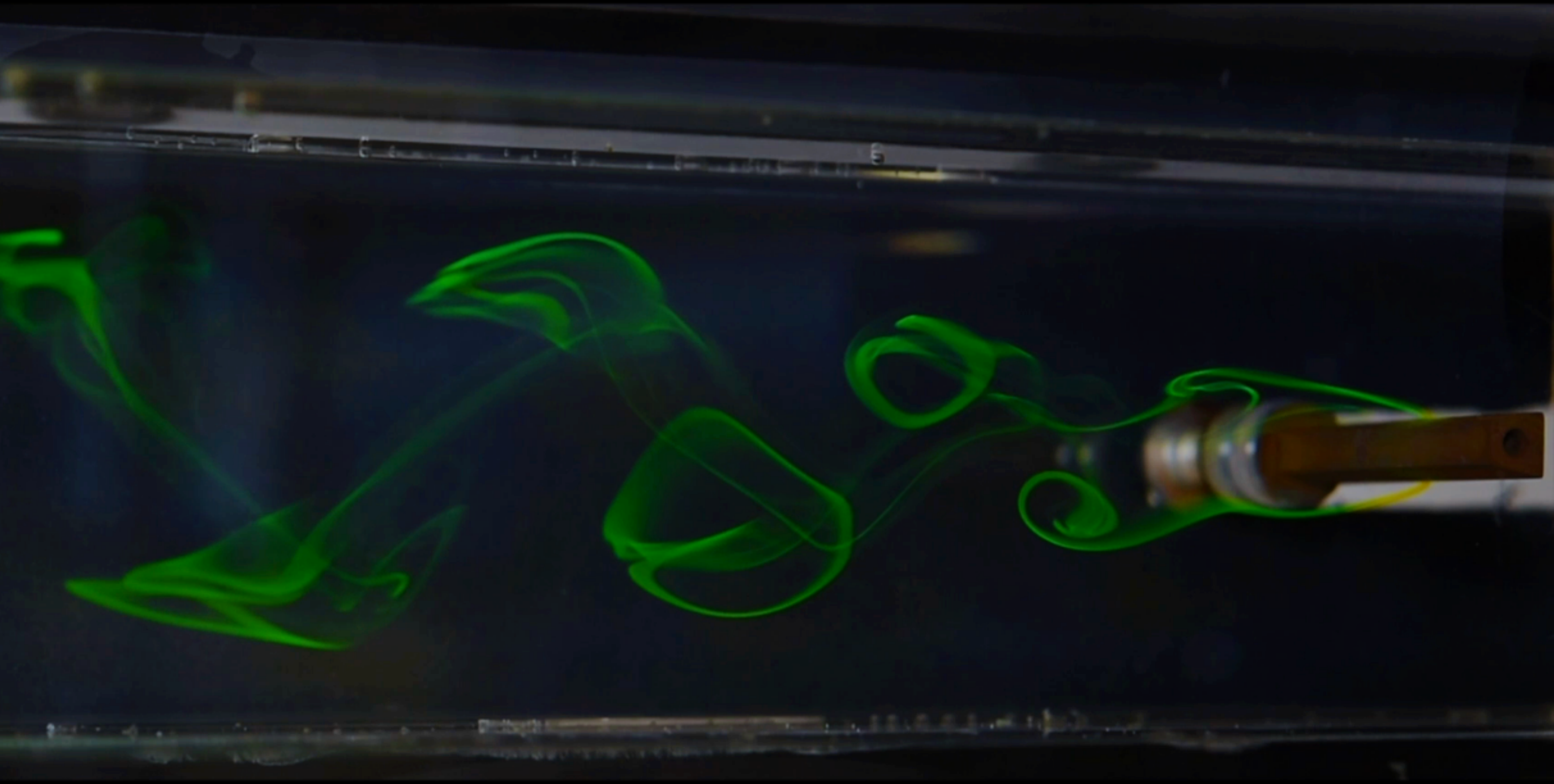
Outils de base de la Mécanique des fluides



Outils de base de la Mécanique des fluides

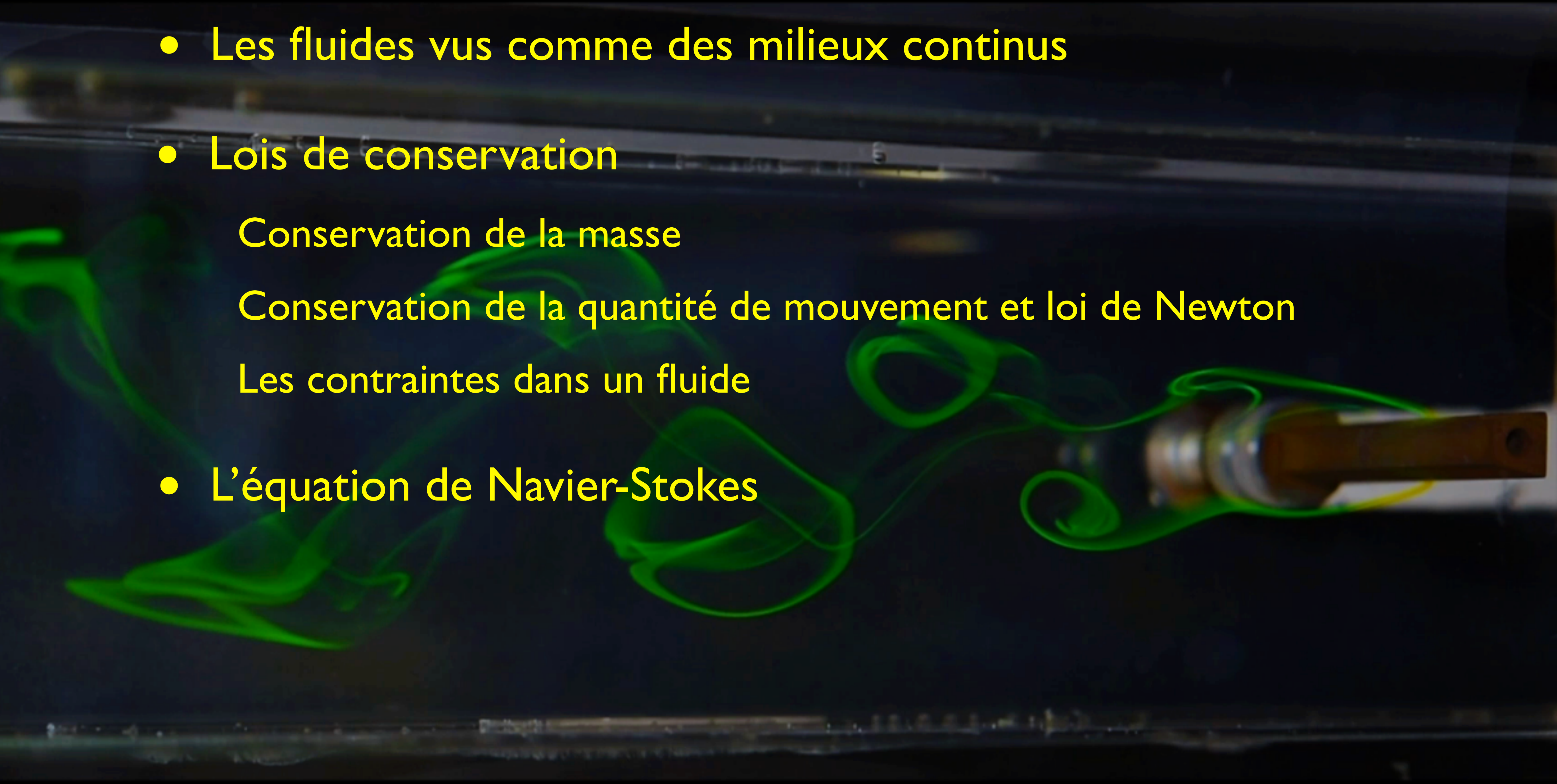
- Les fluides vus comme des milieux continus

Outils de base de la Mécanique des fluides

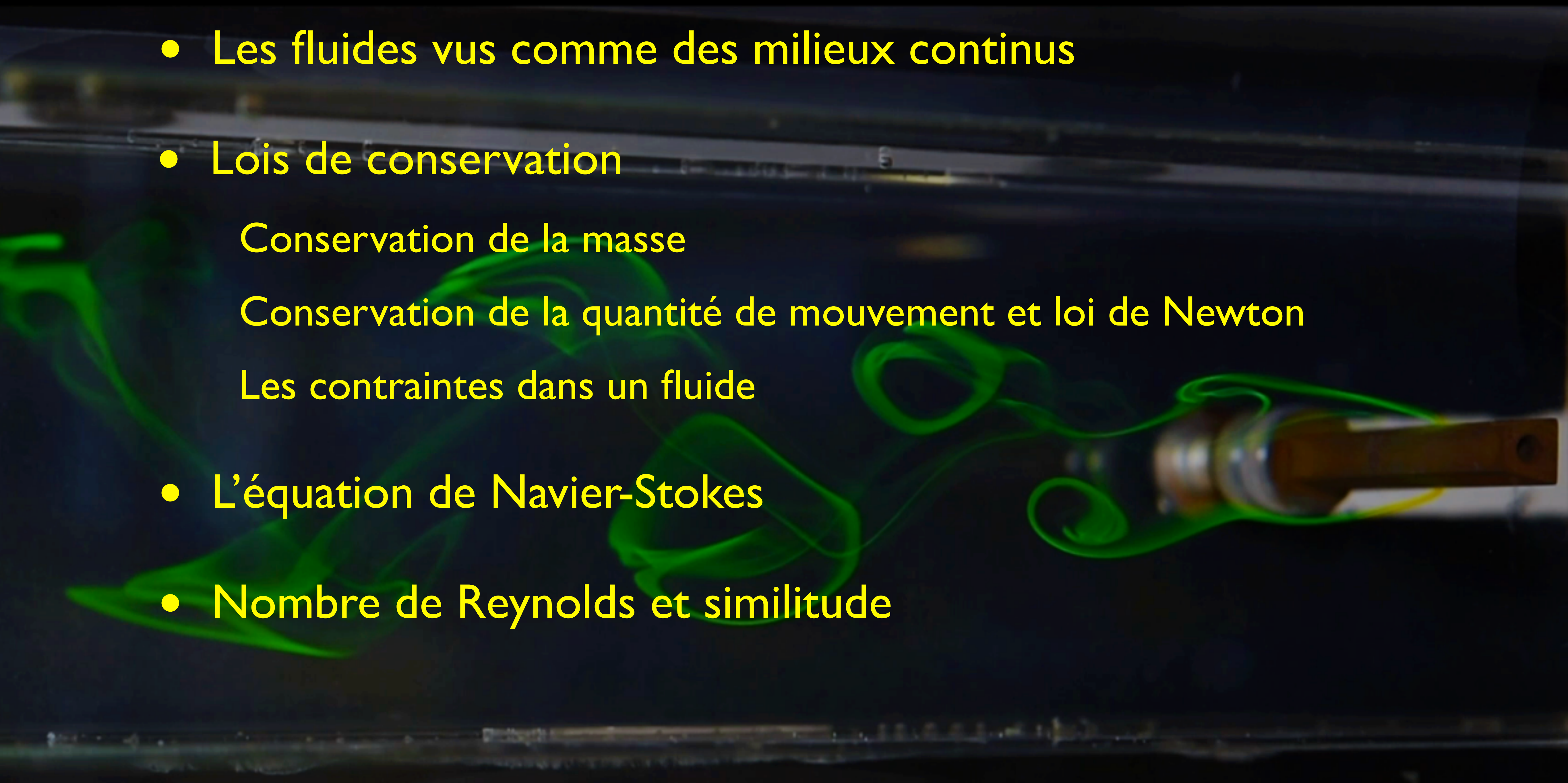
- Les fluides vus comme des milieux continus
- Lois de conservation
  - Conservation de la masse
  - Conservation de la quantité de mouvement et loi de Newton
  - Les contraintes dans un fluide

Outils de base de la Mécanique des fluides

- Les fluides vus comme des milieux continus
- Lois de conservation
  - Conservation de la masse
  - Conservation de la quantité de mouvement et loi de Newton
  - Les contraintes dans un fluide
- L'équation de Navier-Stokes

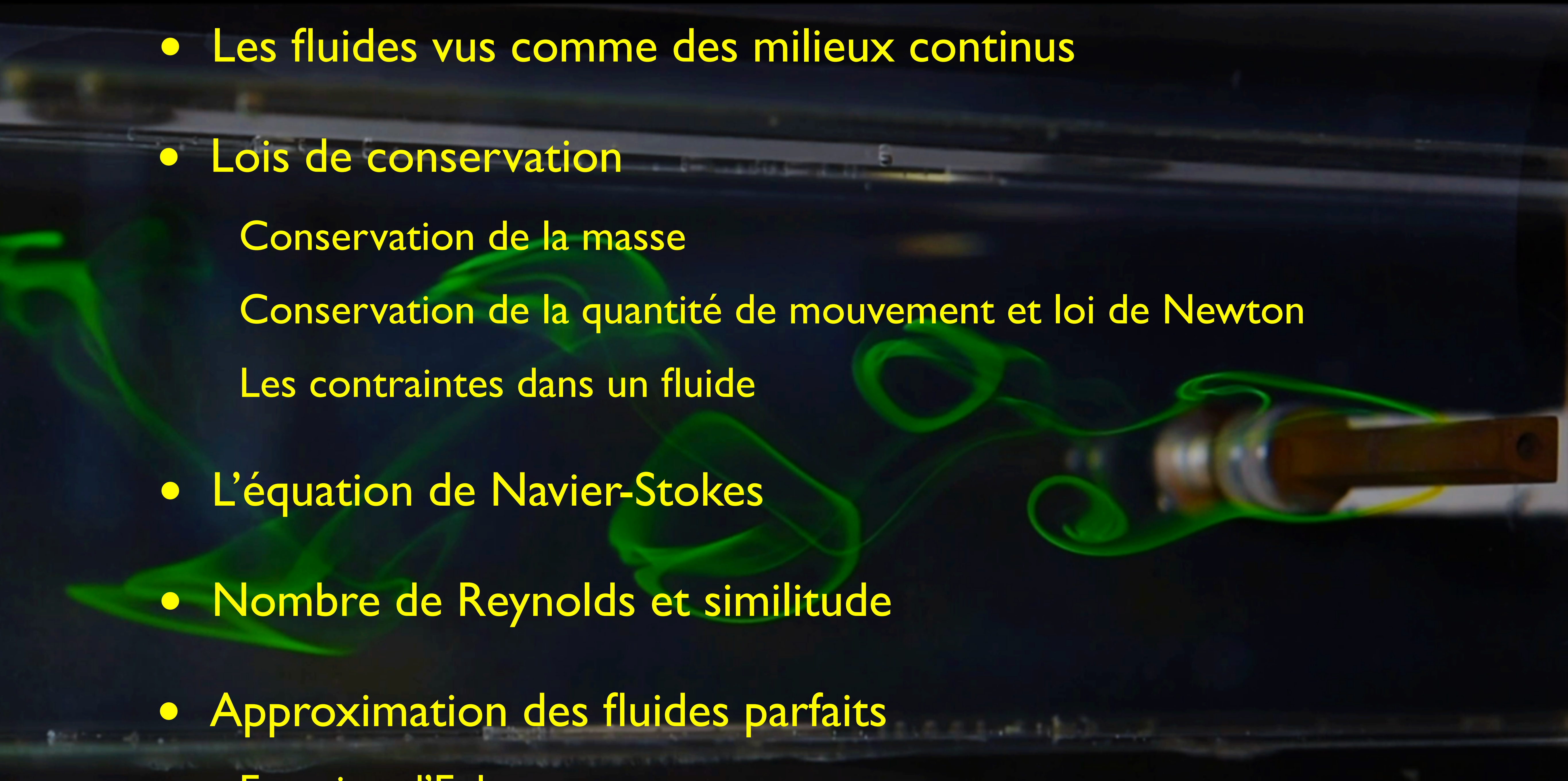


Outils de base de la Mécanique des fluides



- Les fluides vus comme des milieux continus
- Lois de conservation
  - Conservation de la masse
  - Conservation de la quantité de mouvement et loi de Newton
  - Les contraintes dans un fluide
- L'équation de Navier-Stokes
- Nombre de Reynolds et similitude

Outils de base de la Mécanique des fluides



- Les fluides vus comme des milieux continus
- Lois de conservation
  - Conservation de la masse
  - Conservation de la quantité de mouvement et loi de Newton
  - Les contraintes dans un fluide
- L'équation de Navier-Stokes
- Nombre de Reynolds et similitude
- Approximation des fluides parfaits
  - Equation d'Euler
  - Loi de Bernoulli

Les fluides comme milieux continus

Les caractéristiques *microscopiques* déterminent les propriétés *macroscopiques* :
masse volumique, compressibilité, viscosité, diffusion de la chaleur, …

Les fluides comme milieux continus

Les caractéristiques *microscopiques* déterminent les propriétés *macroscopiques* :
masse volumique, compressibilité, viscosité, diffusion de la chaleur, …

On raisonne sur des éléments de volume

- assez petits pour décrire finement les champs de vitesse et de pression
- grands devant les échelles moléculaires

Les fluides comme milieux continus

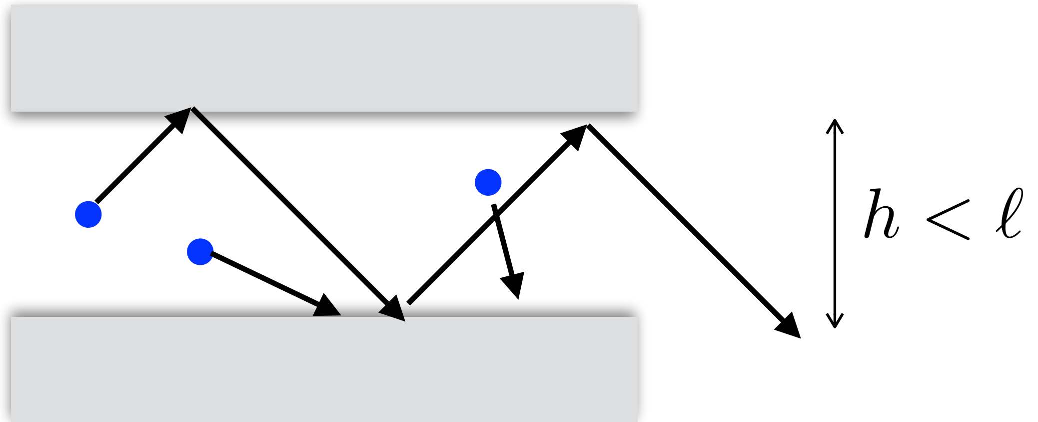
Les caractéristiques *microscopiques* déterminent les propriétés *macroscopiques* :
masse volumique, compressibilité, viscosité, diffusion de la chaleur, …

On raisonne sur des éléments de volume

- assez petits pour décrire finement les champs de vitesse et de pression
- grands devant les échelles moléculaires

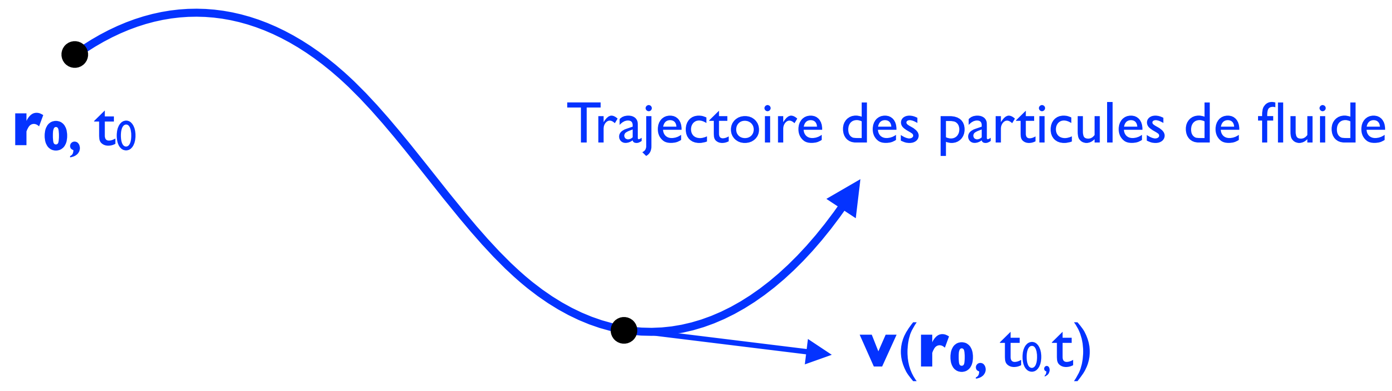
La transition micro/macro est autour du *nanomètre*.

Exception :
Gaz raréfiés (régime de Knudsen)



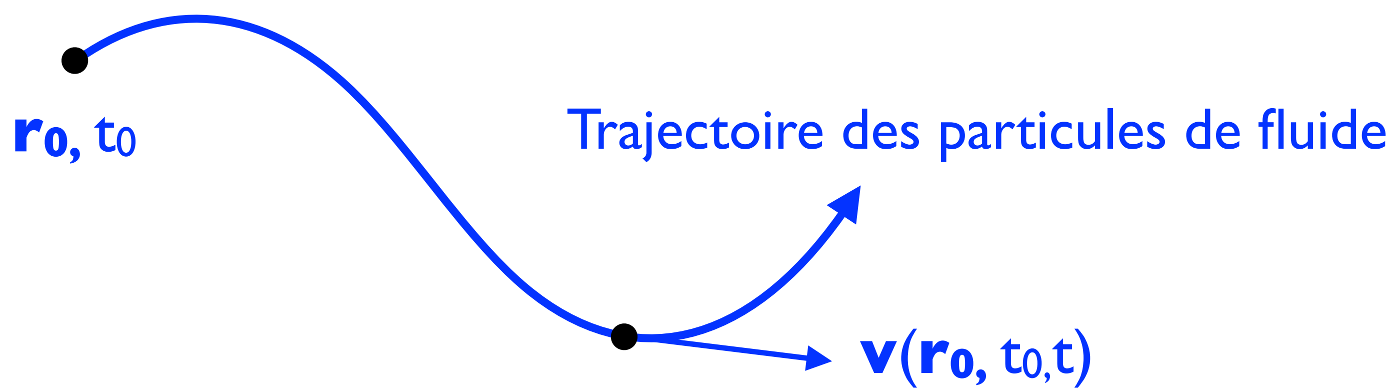
Description des écoulements

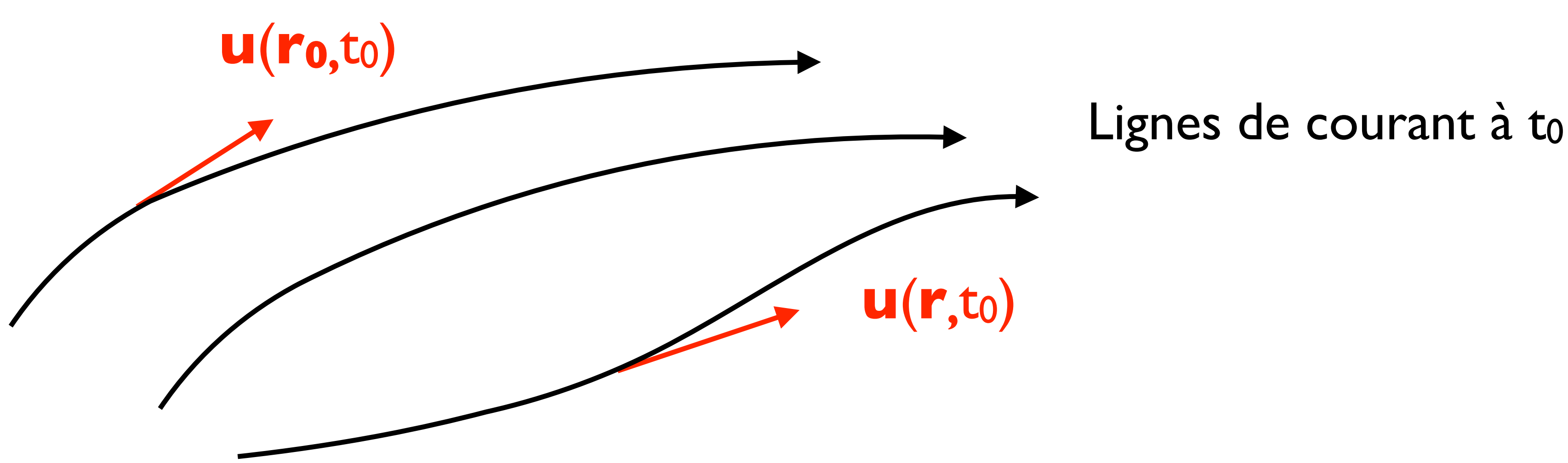
Description lagrangienne



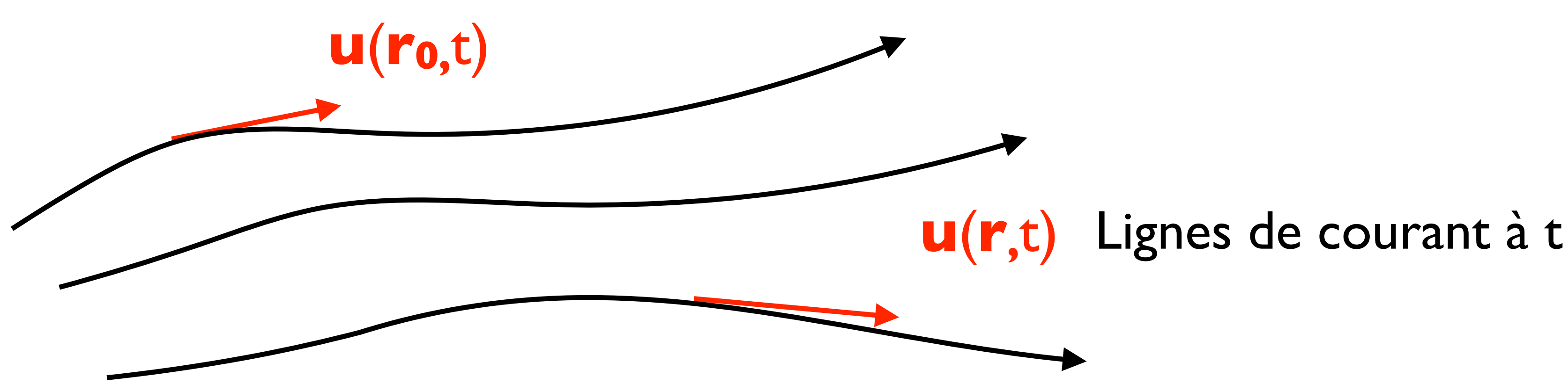
Description des écoulements

Description lagrangienne

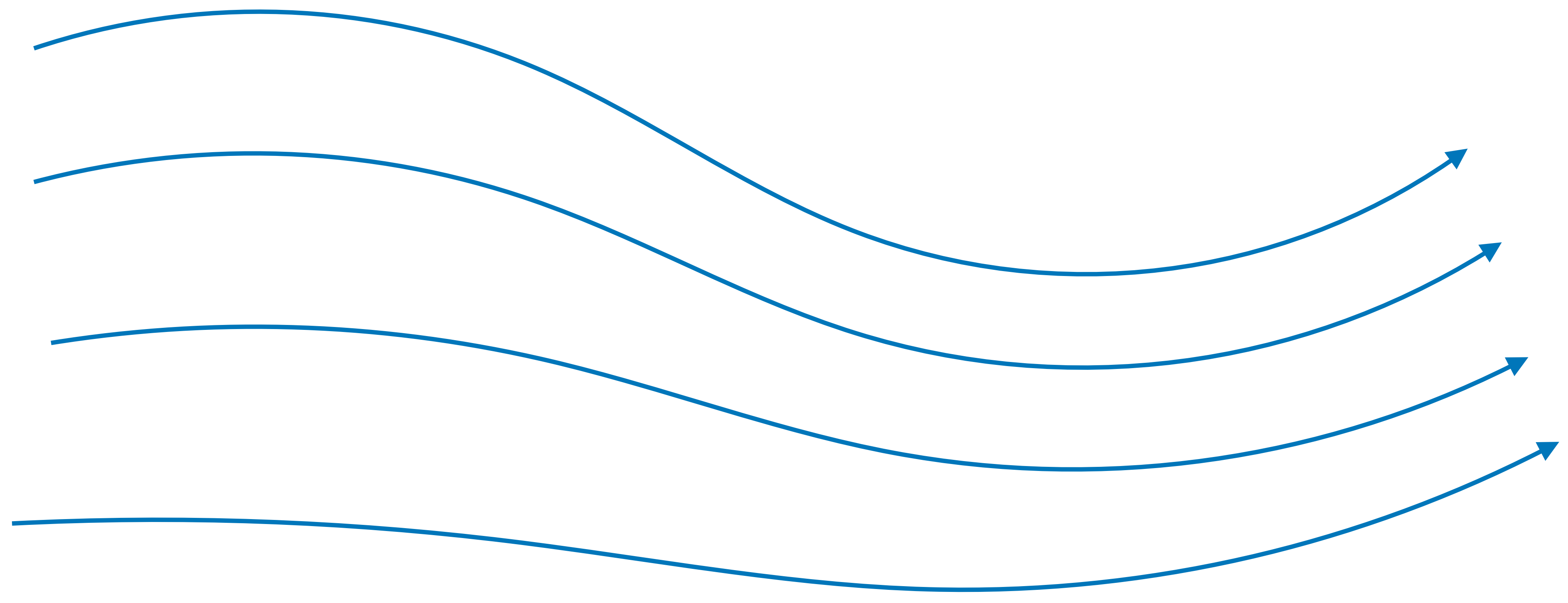




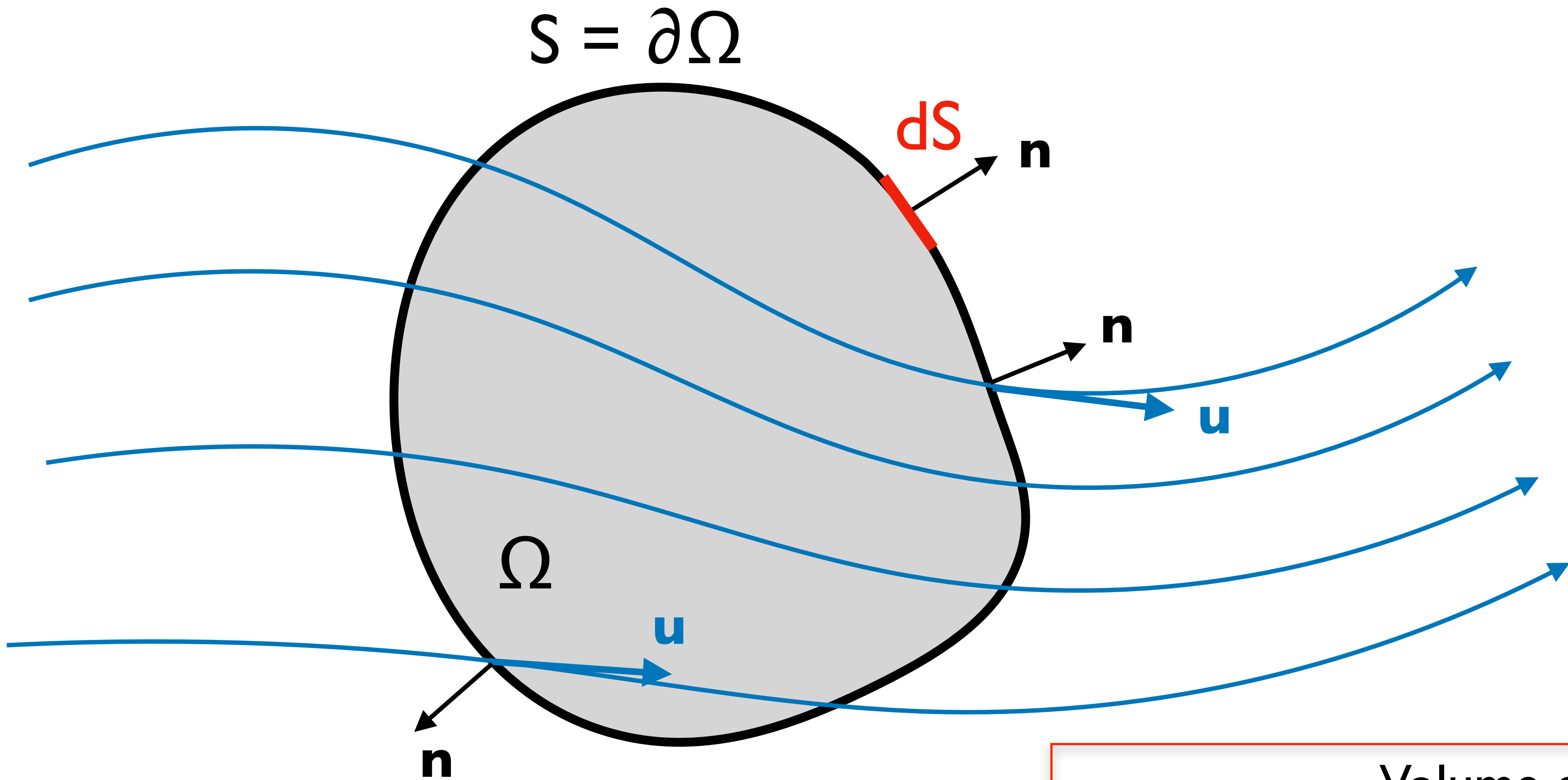
Description eulerienne



Conservation de la masse dans un écoulement



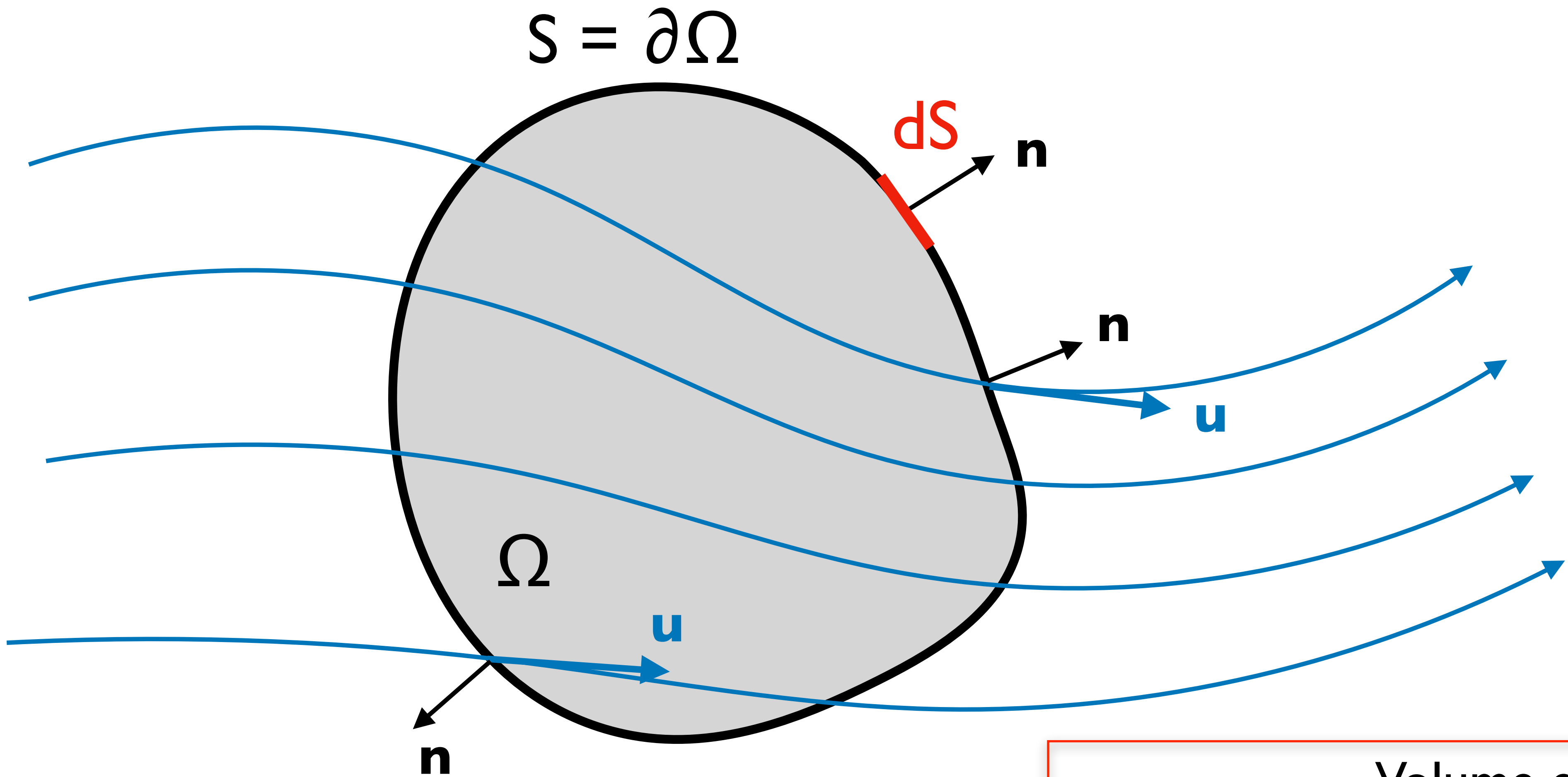
Conservation de la masse dans un écoulement



$$-\mathbf{u}.\mathbf{n}$$

Volume entrant
par unité de surface
par unité de temps

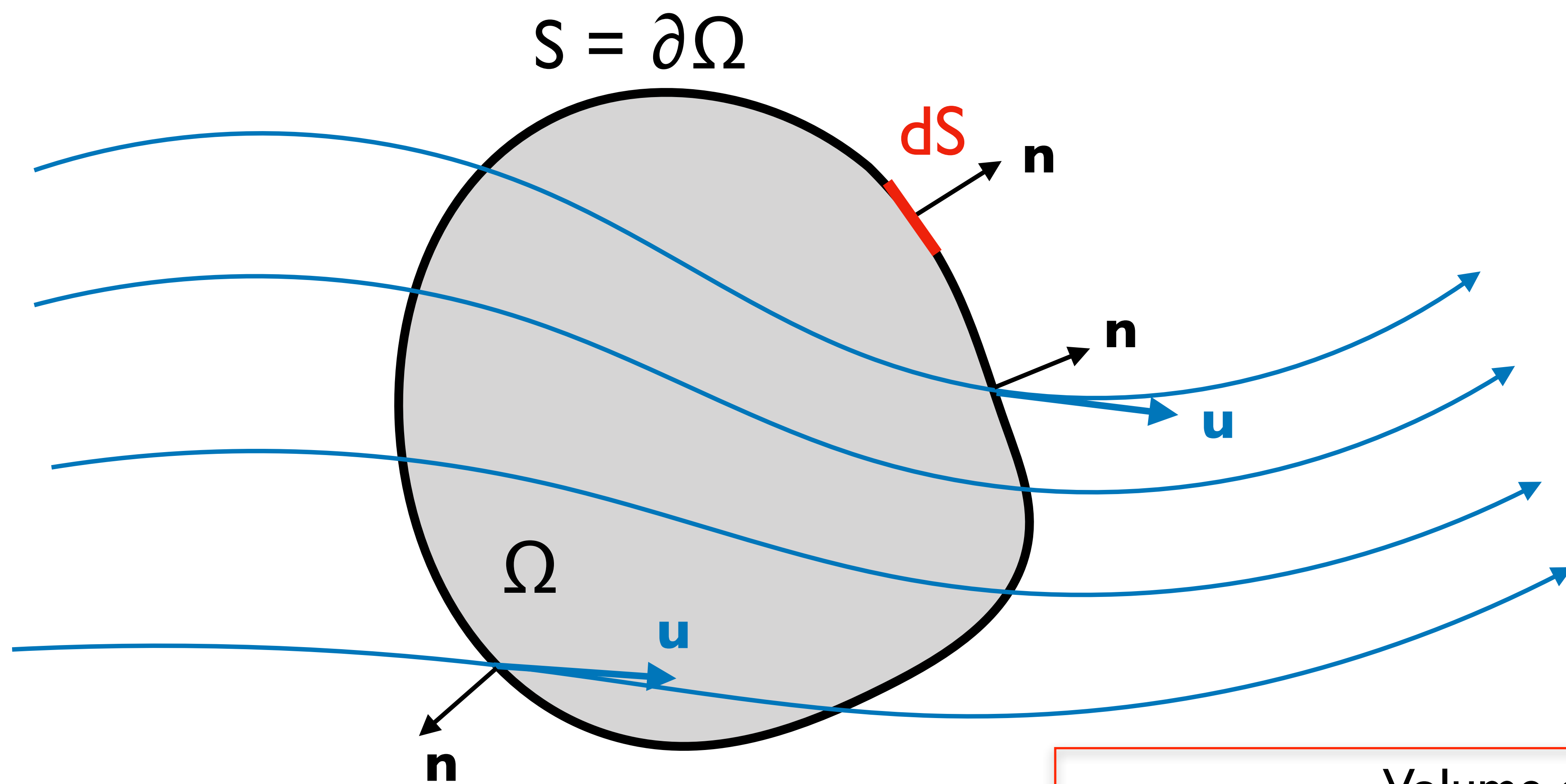
Conservation de la masse dans un écoulement



$-\mathbf{u}.\mathbf{n}$	Volume entrant par unité de surface par unité de temps

$$-\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS + Q$$

Conservation de la masse dans un écoulement



$-\mathbf{u.n}$ Volume entrant par unité de surface par unité de temps

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u.n}\, dS + Q$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{\partial \Omega} \rho \mathbf{u}.\mathbf{n} \, dS + Q$$

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_{\partial\Omega} \rho\mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS + Q$$

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_\Omega \nabla.(\rho\mathbf{u}) dV = Q$$

$\nabla. \equiv$ divergence

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS + Q$$

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_\Omega \nabla.(\rho \mathbf{u}) dV = Q$$

$\nabla.\ \equiv$ divergence

En l'absence de source de masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla.\mathbf{u} + \mathbf{u}.\nabla\rho = 0$$

$\nabla \equiv$ gradiant

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u}.\mathbf{n}\, dS + Q$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \nabla.(\rho \mathbf{u}) dV = Q$$

$\nabla. \equiv$ divergence

En l'absence de source de masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla.\mathbf{u} + \mathbf{u}.\nabla \rho = 0$$

$\nabla \equiv$ gradiant

Si le fluide est « incompressible », masse volumique constante

$$\boxed{\nabla.\mathbf{u} = 0}$$

Fluide comme “incompressible” ?

Fluide comme "incompressible" ?

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}\delta p$$

Fluide comme “incompressible” ?

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \delta p$$

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{1}{\rho c^2} \delta p$$

c : vitesse du son

Fluide comme “incompressible” ?

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}\delta p$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho c^2}\delta p$$

c : vitesse du son

En écoulement dominé par l’inertie du fluide: $\delta p \sim \rho u^2$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{u^2}{c^2} = M^2$$

M : Nombre de Mach

Fluide comme “incompressible” ?

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}\delta p$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho c^2}\delta p$$

c : vitesse du son

En écoulement dominé par l’inertie du fluide: $\delta p \sim \rho u^2$

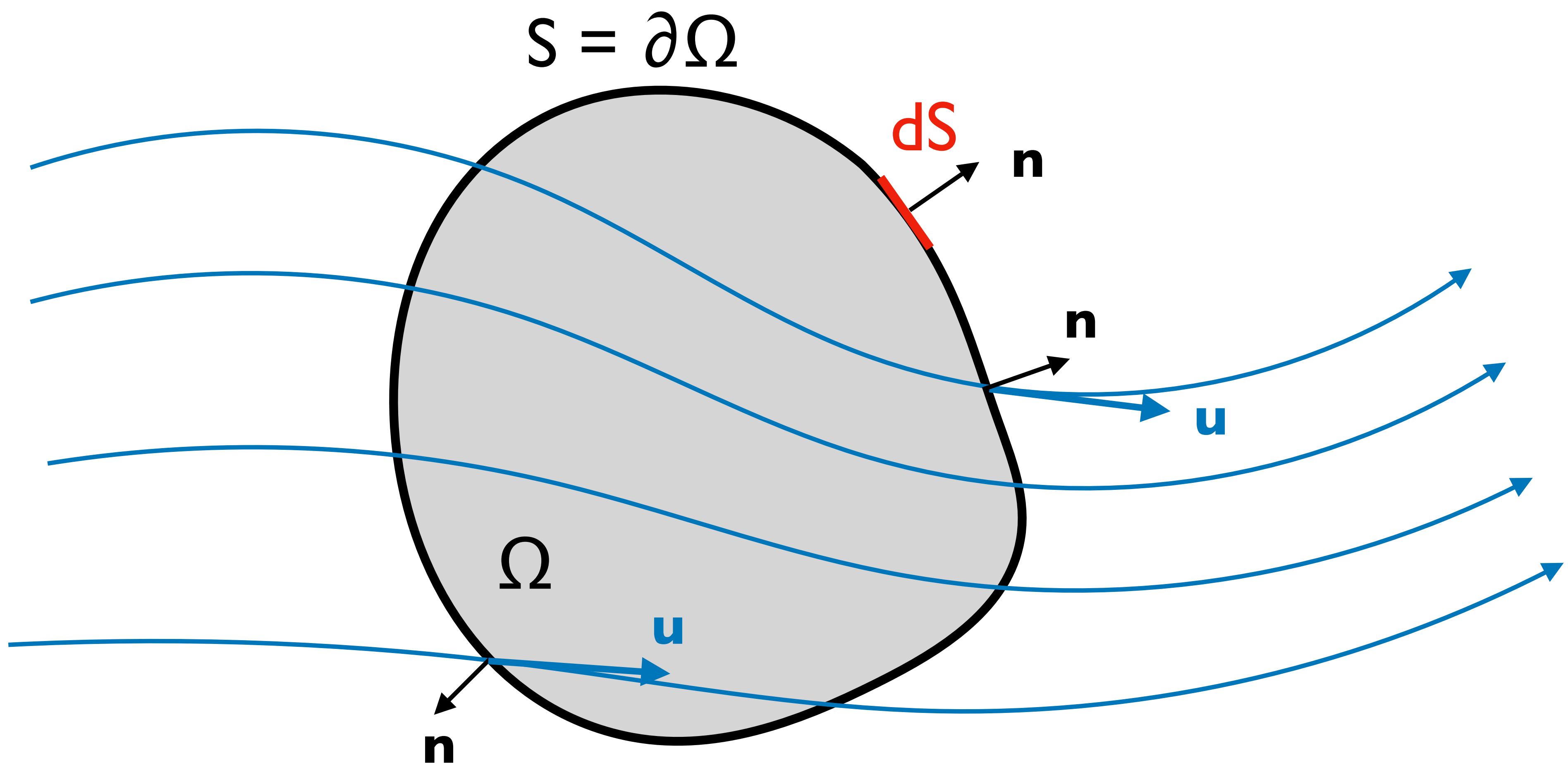
$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{u^2}{c^2} = M^2$$

M : Nombre de Mach

$M \ll 1$ Fluide quasi incompressible

$M \sim 1$ ou $M > 1$ Ondes de choc

Conservation de la quantité de mouvement



$$\int_\Omega \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = \int_\Omega \rho \mathbf{f}\ dV + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}}.\mathbf{n}\ dS - \int_{\partial\Omega} \rho \underbrace{\mathbf{u}}_{\text{vecteur}}\ \underbrace{\mathbf{u}.\mathbf{n}}_{\text{scalaire}}\ dS$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV = -\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u}\ \mathbf{u}.\mathbf{n}\ dS + \int_\Omega \rho \mathbf{f}\ dV + \int_{\partial\Omega} \sigma.\mathbf{n}\ dS$$

Théorème de la divergence:

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} dV + \int_\Omega \nabla.\rho\mathbf{u}\mathbf{u}\, dV = \int_\Omega \rho \mathbf{f}\, dV + \int_\Omega \nabla.\sigma\, dV$$

$\rho\mathbf{u}\mathbf{u}$: Flux de quantité de mouvement,

produit tensoriel $\longrightarrow$ tenseur de composantes $\rho u_i u_j$

Sa divergence :
(somme sur *j*)

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Conservation de la quantité de mouvement

Pour un volume élémentaire de fluide :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla . \rho \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} . \nabla \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} + \nabla . \sigma$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \rho \mathbf{u} \right)}_{= 0} + \rho \mathbf{u} . \nabla \mathbf{u} = \rho \mathbf{f} + \nabla . \sigma$$

Conservation de la masse

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} . \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{f} + \nabla . \sigma$$

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Accélération d'un élément de fluide

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

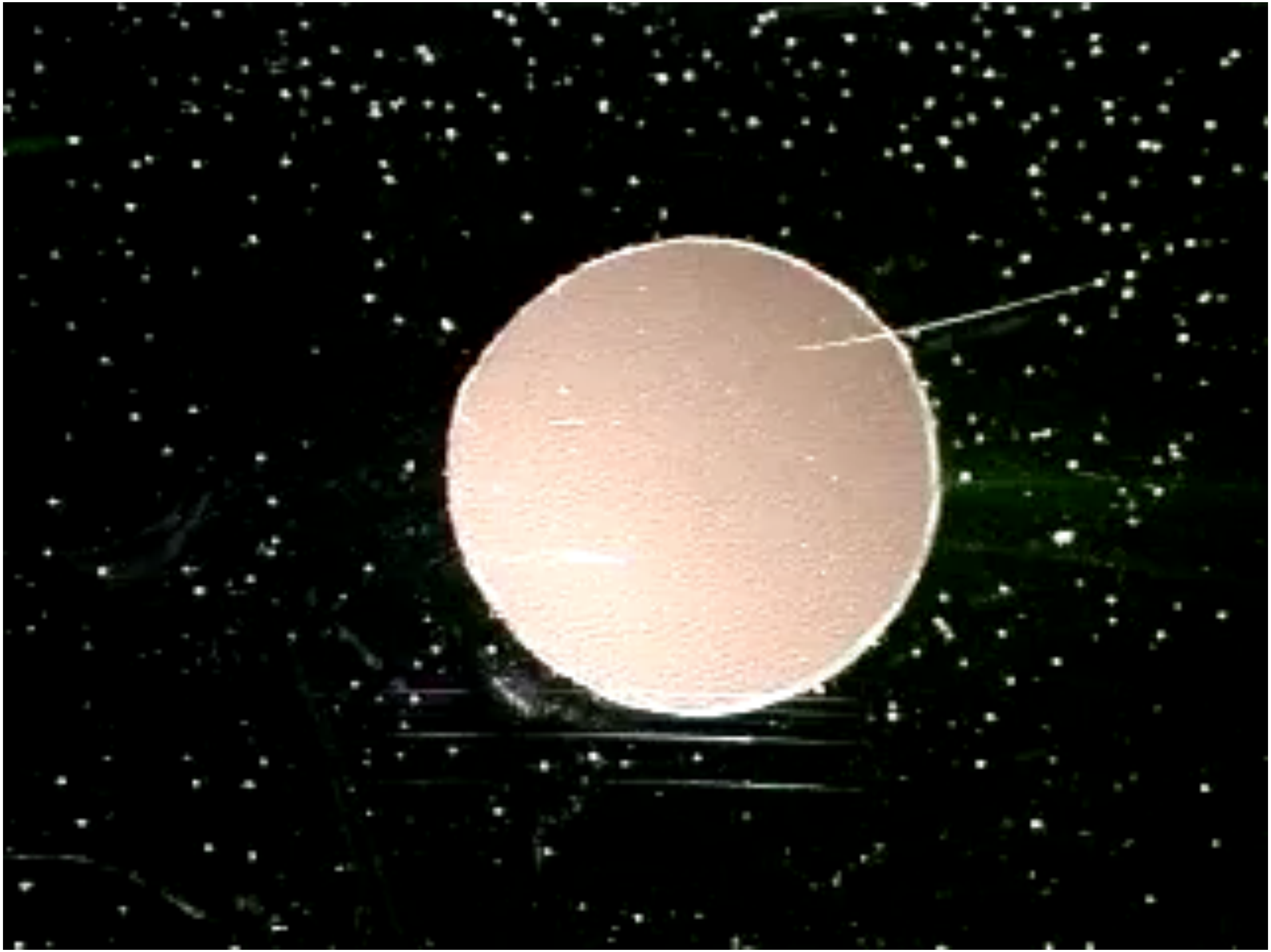
$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) = \rho\mathbf{f} + \nabla.\sigma$$

$$\mathbf{a} = \boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}} + \boxed{\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}}$$

instationnarité

accélération convective

un écoulement stationnaire où $\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u} \neq 0$



Écriture de l'accélération convective

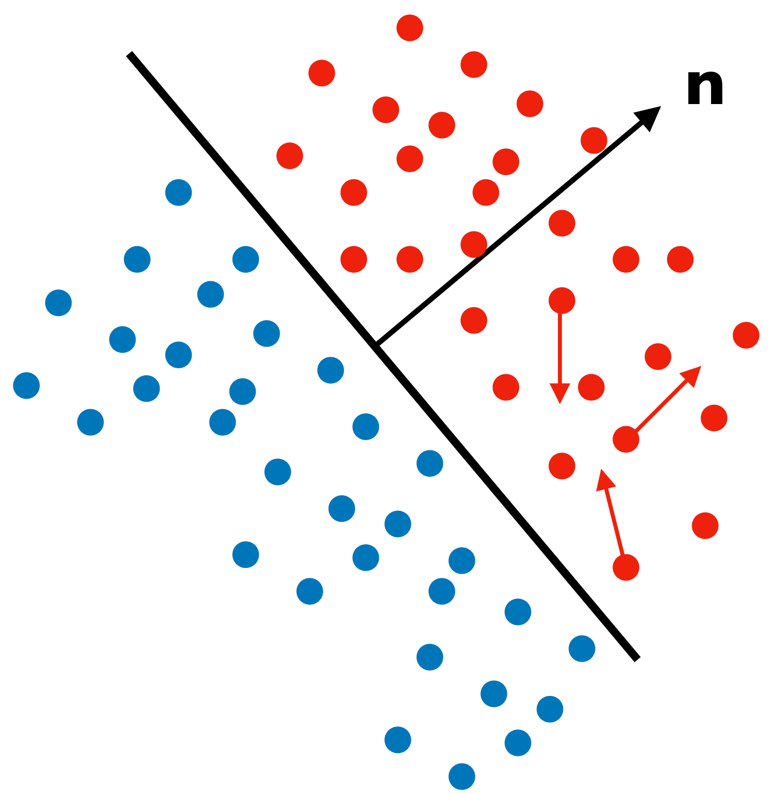
Pour la composante *i* : $$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1,3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Pour la composante *x* : $$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

Variation spatiale de u_x projetée sur la vitesse (u_x, u_y, u_z)

Les contraintes dans un fluide

Dans un fluide à l'équilibre, sans écoulement macroscopique



La résultante des interactions entre atomes ou molécules est une pression isotrope

$$\sigma = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = -p\ \delta ij$$

$$\nabla.\sigma = -\nabla p = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial x} \\ -\frac{\partial p}{\partial y} \\ -\frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dans un fluide à l'équilibre, sans écoulement macroscopique

$$\rho \cancel{\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla \mathbf{u} \right)} = \rho \mathbf{f} + \nabla . \sigma$$

$$0 = \rho \mathbf{g} - \nabla p$$

$$p = p_0 - \rho g z$$

Dans un fluide hors d'équilibre thermodynamique,
avec écoulement macroscopique

Fluides newtoniens

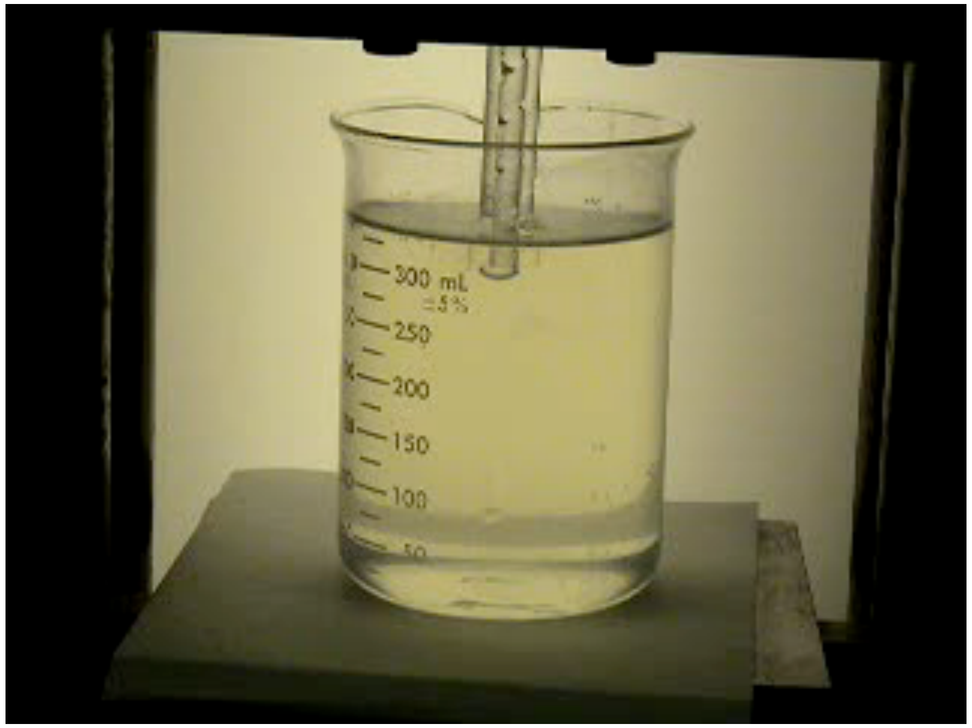
Eau, huile, glycérol, gaz…

Contraintes :
fonctions linéaires du gradient de vitesse

Fluide isotrope

Fluides non newtoniens

Solutions de polymères, polymères fondus, suspensions concentrées, pâtes, mousses, cristaux liquides …



Les contraintes dans un fluide newtonien

Comportement mécanique du fluide caractérisé par une seule quantité :

$\boxed{\text{sa viscosité dynamique } \eta}$

Contraintes : fonctions linéaires de la partie symétrique du gradient de vitesse

partie symétrique du gradient de vitesse : déformation d'un élément de fluide

partie antisymétrique du gradient de vitesse : rotation en bloc d'un élément de fluide

Les contraintes dans un fluide newtonien

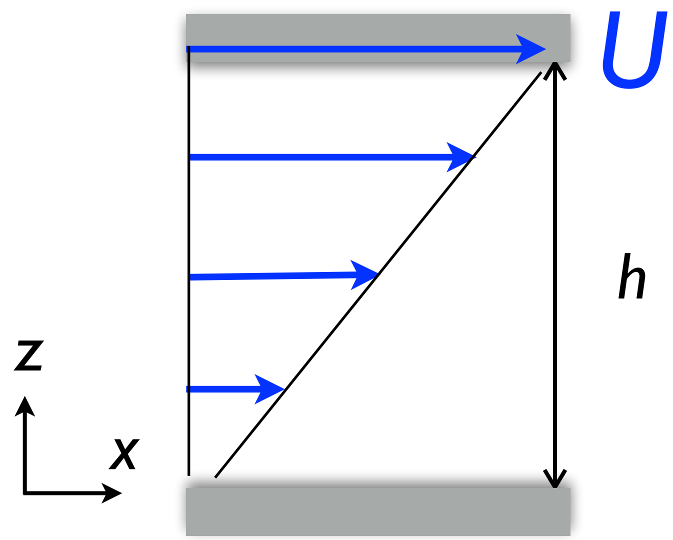
$$\sigma_{ij} = -p\ \delta_{ij} + 2\ \eta\ e_{ij}$$

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} -p + 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} & \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & -p + 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} & \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & -p + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla . \sigma = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u}}$$

Contrainte de cisaillement visqueux



$$\sigma_{xz} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

Contrainte : dimension d'une pression

Viscosité dynamique : pression X temps Pa.s en S.I.

Gradient de vitesse : dimension de l'inverse d'un temps

Ordres de grandeur de viscosités :

eau : 10^{-3} Pa.s (1 mPoiseuille)   glycérine : 1,3 Pa.s

air : 1,8 10^{-5} Pa.s   hélium : 3,3 10^{-6} Pa.s (4 K)

Dans un fluide newtonien, avec écoulement macroscopique

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}\right)=\rho\mathbf{f}+\nabla.\sigma$$

$$\nabla.\sigma=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{u}$$

Équation de Navier-Stokes

$$\boxed{\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\rho(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{u}+\rho\mathbf{f}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{f}$$

viscosité cinématique $\nu=\eta/\rho$

L'équation de Navier-Stokes dans toute sa splendeur (horreur ?)

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + f_x$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + f_y$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + f_z$$

Comment la simplifier ?

Une analyse dimensionnelle de l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}$$

$$\mathbf{u} \sim U$$

$$\nabla \sim 1/L \qquad \Delta \sim 1/L^2$$

Échelle de longueur pertinente qui caractérise la variation spatiale de vitesse

$$\rho \; \mathbf{u}.\nabla \mathbf{u} \sim \rho \; \frac{U^2}{L}$$

Terme inertiel

$$\eta \; \Delta \mathbf{u} \sim \eta \; \frac{U}{L^2}$$

Terme visqueux

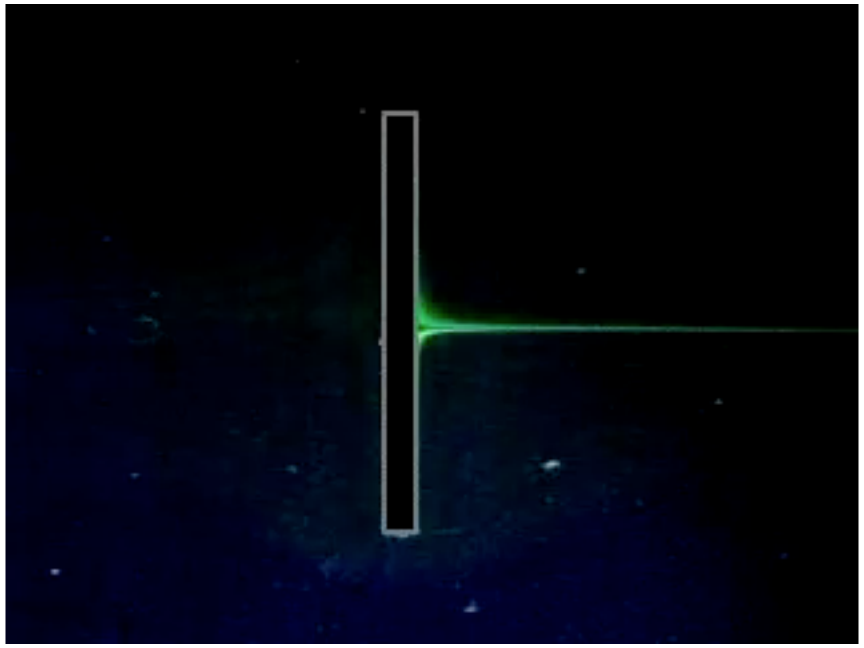
$$\boxed{\frac{\rho \mathbf{u}.\nabla \mathbf{u}}{\eta \Delta \mathbf{u}} \sim \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu}}$$

Nombre de Reynolds

Deux dynamiques différentes selon le nombre de Reynolds

$$Re \ll 1$$

Écoulement dominé par la viscosité



$$Re \gg 1$$

Écoulement dominé par l'inertie