

# Partie B: Bulles et mousses

Durée 2h, 12 points. Documents autorisés : notes de cours du site web, TDs.

Nous espérons que vous aurez l'occasion de célébrer la fin de vos partiels avec quelques bulles (s'il vous plait, avec modération). Auparavant, nous proposons de nous intéresser à la physique des bulles et des mousses. Nous aborderons ainsi les questions suivantes :

- Quelle est la condition pour former une bulle de savon?
- Il y a-t-il un écoulement dans l'épaisseur de la bulle?
- Comment éclate une bulle?

Bien que le thème général du problème soit les bulles et les mousses, les différentes parties sont indépendantes. Si vous bloquez sur une question, ne perdez pas de temps et passez à la suivante.

Quelques données:

	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\eta$ [mPa.s]	$\gamma$ [mN/m]
eau	1000	1	72
eau savonneuse	1000	1	30
air	1.3	$1.9 \cdot 10^{-2}$	

## 1 Bulles de savon

### 1.1 Formation d'une bulle

La dynamique de formation d'une bulle de savon lorsqu'on souffle sur un film tendu sur un cadre passe par une forme ondulatoire complexe. On peut néanmoins estimer en ordre de grandeur la vitesse de vent nécessaire à la formation d'une bulle.

*Si on souffle avec une vitesse modérée  $U_0$ , quel est le rayon de courbure adopté par le film de savon tendu sur un cadre circulaire de rayon  $R$ ?*

*En déduire un ordre de grandeur de la vitesse de vent minimale pour produire des bulles.*

*Application numérique avec un cadre de 2 cm de rayon.*

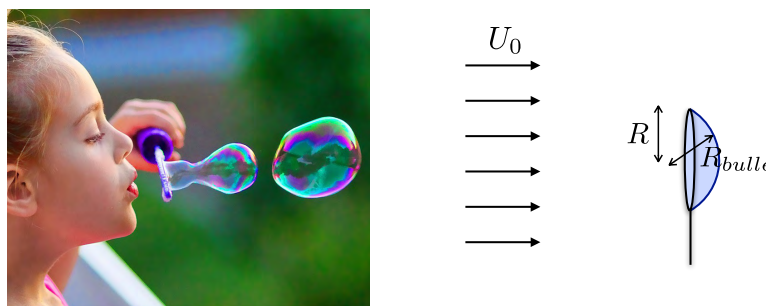


Figure 1: À quelle vitesse faut-il souffler pour former des bulles?

**Solution:**

D'après la loi de Bernoulli, la pression sur la paroi avant de la bulle vaut  $p_0 + \frac{1}{2}\rho_{air}U_0^2$ .

À l'arrière de la bulle on ne peut plus utiliser Bernoulli car la couche limite s'est décrochée et que l'écoulement est turbulent. La pression vaut alors  $p_0$  (comme dans le calcul de la traînée de forme).

Cette surpression  $\Delta p \sim \frac{1}{2}\rho_{air}U_0^2$  est compensée par la courbure du film de savon. Selon la loi de Laplace, on a  $\Delta p = \frac{4\gamma}{R_{bulle}}$  (on a 4 et pas 2 car un film de savon présente 2 interfaces, mais ce n'est pas crucial pour un calcul d'ordre de grandeur).

On a ainsi:  $R_{bulle} = \frac{8\gamma}{\rho_{air}U_0^2}$ .

La vitesse minimale correspond à  $R_{bulle} \sim R$ , soit  $U_{min} \sim \sqrt{\frac{8\gamma}{R\rho_{air}}}$ .

AN:  $U_{min} \sim 3.5$  m/s.

## 1.2 Chute de bulles

On arrête de souffler. Les bulles tombent.

*Quelle est leur vitesse terminale? Donner un ordre de grandeur de cette vitesse.*

*On supposera que la taille des bulles est égale à celle du cadre ( $R = 2$  cm) et que leur épaisseur  $e$  vaut  $1 \mu\text{m}$ .*

**Solution:** On a un gros objet qui tombe dans un fluide peu visqueux, il est donc raisonnable de supposer  $Re \gg 1$  (ce qu'il faudra vérifier par la suite). La force de traînée est dans ce cas de la forme  $C_x \frac{1}{2}\rho_{air}\pi R^2 U^2$  avec  $C_x \sim 1$ .

Lorsque qu'on équilibre la traînée avec le poids la bulle  $4\pi R^2 e \rho_{eau} g$ , on obtient la vitesse terminale:

$$U \sim \left( 8 \frac{\rho_{eau}}{\rho_{air}} e g \right)^{1/2} \sim 0,3 \text{ m/s}$$

On n'oublie pas de vérifier l'hypothèse de départ:

$$Re \sim \frac{\rho_{air} U R}{\eta_{air}} = 400 \gg 1$$

## 1.3 Vidange d'une bulle

Capturons une bulle de rayon  $R$  et perçons la avec une aiguille de seringue (bien badigeonnée d'eau savonneuse pour ne pas faire éclater la bulle).

*À quoi ressemble le profil de l'écoulement à l'entrée du tube? Vers quel profil évolue-t-il?*

*Si on néglige ce qui se passe à l'entrée du tube, quelle est, à un préfacteur numérique près, la dynamique de vidange  $R(t)$  si l'aiguille à un diamètre interne  $r_i = 0.1$  mm et une longueur  $L = 3$  cm?*

*Estimer la longueur de transition entre l'écoulement à l'entrée et l'écoulement dans le corps du tube. L'hypothèse du calcul précédent est-elle justifiée?*

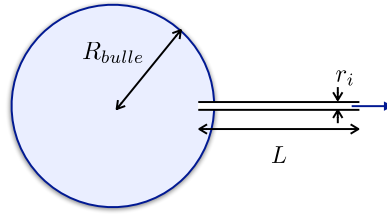


Figure 2: Vidange d'une bulle à travers une aiguille de seringue.

**Solution:** À l'entrée du tube on a un écoulement de type bouchon avec une vitesse indépendante de la position radiale. Cependant une couche limite s'établit le long de la paroi du tube et finit par conduire à un écoulement parabolique de type Poiseuille (ce qui est justifié par le fait que  $r_i \ll L$ ).

On a une différence de pression entre les deux extrémités du tube  $\Delta P = \frac{4\gamma}{R_{bulle}}$  (on ne pénalisera pas ceux qui on pris  $\frac{2\gamma}{R_{bulle}}$  à la place, ou pas de préfacteur du tout).

Si l'écoulement est visqueux, la loi de Stokes nous indique:

$$\frac{\Delta P}{L} \sim \frac{\eta_{air} U}{r_i^2}$$

soit

$$U \sim \frac{4\gamma r_i^2}{\eta_{air} R_{bulle} L}$$

Par conservation du débit, on a (la bulle diminue de volume, d'où le signe -):

$$4\pi R_{bulle}^2 dR_{bulle} = -\pi r_i^2 U dt$$

On se retrouve ainsi avec

$$R^3 \frac{dR}{dt} \sim -\frac{\gamma r_i^4}{\eta_{air} L}$$

$$R_0^4 - R(t)^4 \sim \frac{\gamma r_i^4}{\eta_{air} L} t$$

$$R(t) = R_0 \left( 1 - A \frac{\gamma r_i^4}{\eta_{air} R_0^4 L} t \right)^{1/4}$$

où A est un préfacteur numérique.

La couche limite s'établit sur une zone de longueur typique  $r_i \sim (\nu_{air} \frac{\ell}{U})^{1/2}$ , soit  $\ell \sim r_i^2 U / \nu_{air}$ .

On peut estimer la vitesse initiale  $U \sim 0,1$  m/s, ce qui nous fait une longueur d'entrée de  $\ell \sim 0,1$  mm soit un rayon de tube. On a bien  $\ell \ll L$ , cependant la vitesse moyenne de l'écoulement paraît un peu élevée (le préfacteur je pense).

## 2 Drainage d'un film et d'une mousse

### 2.1 Des mousses qui sèchent

Après les bulles de savon, passons aux mousses qui sont un assemblage de bulles. Si les mousses contiennent beaucoup d'eau (on parle alors de mousses "humides"), les bulles qui les constituent ont plutôt des formes sphériques. Cependant l'eau tend à drainer sous l'effet de la gravité, conduisant à des mousses plus "sèches". Une mousse modérément sèche est constituée d'un assemblage de polyèdres dont les arrêtes sont reliées par des "bords de Plateau" (de Joseph Plateau, un remarquable physicien Belge). Si on colore l'eau savonneuse, ces arrêtes sont particulièrement contrastées indiquant qu'elles emprisonnent la majorité du liquide (Fig. 3a). Le drainage s'effectue ainsi essentiellement par l'intermédiaire des bords de Plateau (et très peu à travers les films qui sont trop minces pour contribuer significativement). Nous proposons d'en appréhender la dynamique.

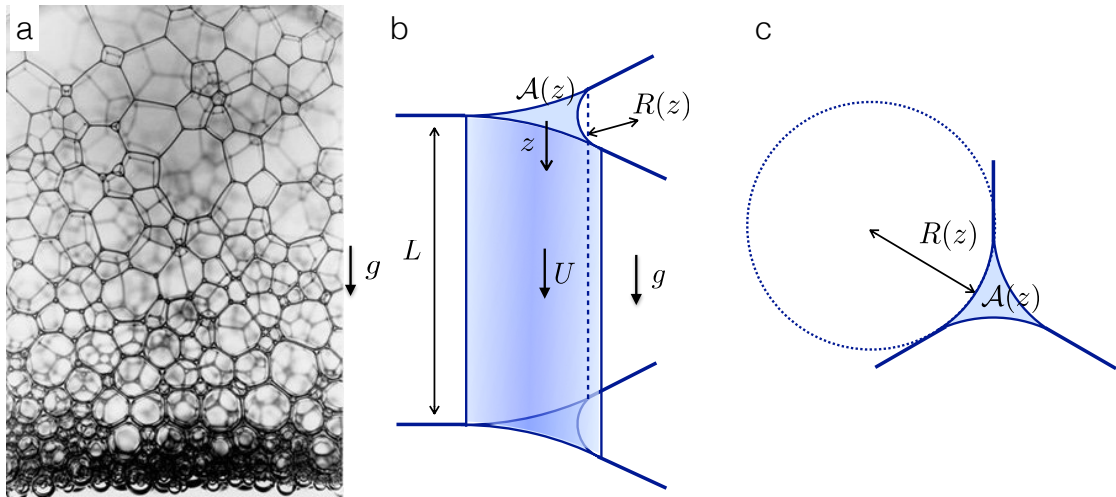


Figure 3: a) Drainage à travers une mousse. On remarquera l'évolution de l'épaisseur des arrêtes entre les bulles (les bords de Plateau) avec la hauteur. b) Modèle simplifié d'un bord de Plateau vertical, point de rencontre de 3 films de savons. c) Section du bord de Plateau: le rayon de courbure de l'interface  $R$  est lié à l'aire de la section  $\mathcal{A}$  par une relation géométrique de la forme  $\mathcal{A} = \alpha R^2$  (les 3 films se rejoignent à  $120^\circ$ ).  $\mathcal{A}$  et  $R$  peuvent dépendre de l'altitude.

#### 2.1.1 Conservation du débit

Considérons un bord de Plateau modèle orienté verticalement. Trois interfaces de bulles s'y retrouvent en formant des angles de  $120^\circ$ . Cette colonne de liquide est caractérisée par une aire locale  $\mathcal{A}$  et un rayon de courbure  $R$  qui peuvent dépendre de l'altitude  $z$  ( $z$  est ici orienté vers le bas). Ces deux quantités sont liées géométriquement par une relation de la forme  $\mathcal{A} = \alpha R^2$  ( $\alpha = \sqrt{3} - \pi/2 \simeq 0.16$ ).

*Si  $U$  est la vitesse moyenne à l'intérieur du bord de Plateau, montrer que la conservation du*

débit impose:

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{\partial(U\mathcal{A})}{\partial z} = 0$$

**Solution:** Bilan classique de flux sur un tronçon de longueur  $dz$  sur un intervalle de temps  $dt$ .

Les tensioactifs présents sur la paroi des bords de Plateau imposent une condition de non glissement à l'interface, comme s'il s'agissait de murs solides. Néanmoins, la loi de Laplace reste valable pour ces interfaces lorsqu'elles sont courbées.

Si on suppose que l'écoulement est dominé par la viscosité, montrer que la vitesse moyenne du fluide vérifie:

$$U = \frac{\beta \mathcal{A}}{\eta} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right),$$

où  $\eta$  est la viscosité de l'eau savonneuse et  $\beta$  un préfacteur géométrique (on attend  $\beta \sim 0.02$ ).

Quelle relation existe-t-il entre la pression  $P$  et  $\mathcal{A}$ ? Montrer que la conservation de la masse conduit à:

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{\beta}{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho g \mathcal{A}^2 - \frac{\alpha^{1/2} \gamma}{2} \mathcal{A}^{1/2} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} \right) = 0$$

**Solution:** On part de la loi de Stokes:

$$\eta \Delta u - \nabla p + \rho g = 0$$

La taille caractéristique de l'interstice  $r$  est proportionnelle à  $\sqrt{\mathcal{A}}$ . En loi d'échelle, on a donc:

$$\eta |\Delta u| \sim \frac{\eta U}{r^2} \sim \frac{\eta U}{\mathcal{A}}$$

Pour ne pas se tromper sur les signes,  $g$  est dans le sens de l'écoulement. De même, en absence de gravité, l'écoulement se ferait des pressions les plus fortes vers les plus faibles (d'où le signe  $-$  devant  $\frac{\partial p}{\partial z}$ ). On se retrouve ainsi avec:

$$\frac{\eta U}{\mathcal{A}} \sim \rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

ce qui conduit à:

$$U = \frac{\beta \mathcal{A}}{\eta} \left( -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right)$$

Reste à déterminer  $p$  à partir de la loi de Laplace:

$$p(z) = p_0 - \frac{\gamma}{R(z)} = p_0 - \gamma \left( \frac{\alpha}{\mathcal{A}} \right)^{1/2}$$

soit

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\gamma \alpha^{1/2}}{2 \mathcal{A}^{3/2}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z}$$

Il ne reste plus qu'à injecter cette solution dans la loi de conservation du flux pour retomber sur la loi proposée.

### 2.1.2 Mousse en équilibre?

Le cliché de la Fig. 3 représente une mousse reposant à la surface d'un réservoir d'eau savonneuse à l'équilibre. Le modèle précédent n'a de sens que si la section du bord de Plateau reste petite par rapport à la taille typique  $d$  d'une bulle. Nous supposons que ce modèle reste valable tant que l'aire réduite  $a = \mathcal{A}/d^2$  reste inférieure à une valeur de saturation  $a_{sat}$ . Dans le "pied" de la mousse (au voisinage de la surface du bain), il faut donc utiliser un modèle de mousse "humide" que nous ne développerons pas ici.

À partir de quelle hauteur  $h_{min}$  (par rapport à la surface du bain), pouvons-nous utiliser le modèle de mousse sèche?

Donner un ordre de grandeur de  $h_{min}$  si la taille typique des bulles est de 3 mm,  $\alpha \simeq 0.16$  et  $a_{sat}$  d'ordre 1.

Est-il légitime de négliger ce qui se passe dans la partie "humide"?

**Solution:** C'est comme pour la loi de Jurin (ascension dans un capillaire):

$$\rho g h_{min} = \frac{\gamma \alpha^{1/2}}{\mathcal{A}^{1/2}} = \frac{\gamma}{d} \left( \frac{\alpha}{a_{sat}} \right)^{1/2}$$

soit

$$h_{min} = \frac{\gamma}{\rho g d} \left( \frac{\alpha}{a_{sat}} \right)^{1/2}$$

AN: on trouve  $h_{min} \sim 1$  mm.

Cette hauteur est ici toute petite. Il paraît donc légitime de la négliger.

Supposons que la hauteur de la mousse  $L$  soit grande devant  $h_{min}$ . Quelle est l'équation gouvernant l'évolution de  $a$  selon la verticale lorsque la vitesse de drainage est nulle?

Montrer que la longueur caractéristique de cette évolution est donnée par:

$$\ell = \frac{\gamma \alpha^{1/2}}{2 \rho g d}$$

**Solution:** On reprend

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\gamma \alpha^{1/2}}{2 \mathcal{A}^{3/2}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = \rho g$$

qu'on exprime en variables adimensionnées:

$$\frac{\gamma \alpha^{1/2}}{2d\rho g} \frac{1}{a^{3/2}} \frac{\partial a}{\partial z} = 1$$

d'où la taille caractéristique  $\ell = \frac{\gamma \alpha^{1/2}}{2\rho g d}$ .

### 2.1.3 Drainage libre

Nous nous intéressons à présent à l'évolution au cours du temps d'une mousse initialement saturée.

Écrire l'équation de la conservation du débit avec les variables adimensionnées  $a = \mathcal{A}/d^2$  et  $\xi = z/\ell$ . Montrer que le temps caractéristique de l'écoulement est :

$$\tau = \frac{\eta \gamma \alpha^{1/2}}{2\beta(\rho g)^2 d^3}$$

**Solution:** Une fois qu'on adimensionne on se retrouve avec:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{2\beta\rho^2 g^2 d^3}{\eta\gamma\alpha^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( a^2 - a^{1/2} \frac{\partial a}{\partial \xi} \right)$$

ce qui nous donne bien le temps caractéristique recherché.

## 3 Éclatement de bulles

Films et bulles de savon finissent toujours par rompre (ce qui diminue considérablement leur énergie de surface). Nous proposons d'appréhender quelques éléments de la dynamique d'éclatement.

### 3.1 Ouverture d'un trou dans un film

La figure 4 représente l'évolution d'un trou amorcé dans un film de savon. La séquence d'images a été enregistrée à la caméra rapide et l'image de droite représente un diagramme spatio-temporel ("reslice" sur ImageJ) pratiqué selon une diagonale du film de savon.

Quelle indication remarquable nous donne ce diagramme spatio-temporel quant à la dynamique d'ouverture du trou?

**Solution:** La vitesse est constante.

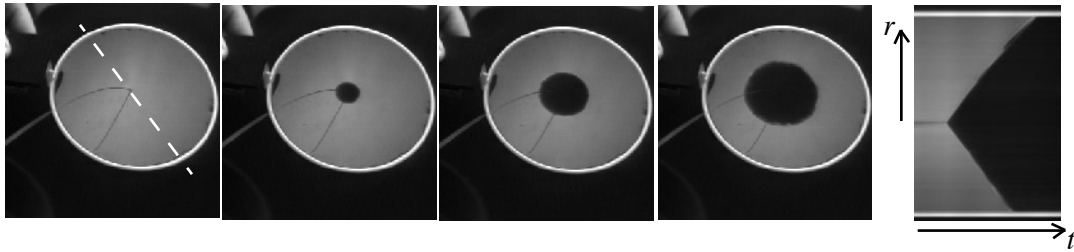


Figure 4: Gauche: éclatement d'un film de savon filmé avec une caméra rapide par C. Clanet (env 1000 image/s). Droite: diagramme spatio-temporel correspondant.

La rapidité de l'évènement nous conduit à envisager l'ouverture du trou comme une sorte d'onde de choc: le film en aval du trou grandissant n'a pas le temps de bouger et l'eau qui était à la place du trou se retrouve dans un bourrelet au niveau du front. Pour simplifier le problème, on considère une configuration 2D où le bourrelet est un cylindre de rayon  $R_b$ . On supposera  $x \gg R_b \gg e$ , où  $x$  est la position du front et  $e$  l'épaisseur du film (Fig. 5).

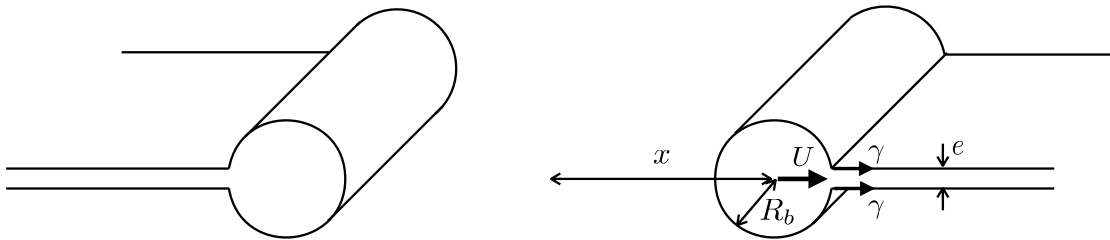


Figure 5: Configuration simplifiée. L'eau initialement présente dans le trou se retrouve capturée dans un bourrelet de section circulaire au niveau du front. Ce bourrelet est alors tiré en amont par la tension de surface du film.

*Quelle est la quantité de mouvement par unité de largeur mise en jeu dans le bourrelet?  
 À quelle force par unité de largeur le bourrelet est-il soumis?  
 Dédire la dynamique d'ouverture à partir du principe fondamental de la dynamique.*

**Solution:** La masse en mouvement correspond à la masse du film qui se retrouve dans le bourrelet. La quantité de mouvement vaut :  $P = \rho_{eau} e x U$ .  
 La loi de Newton nous indique:

$$\frac{dP}{dt} = 2\gamma$$

On en déduit

$$\frac{d(xU)}{dt} = \frac{2\gamma}{\rho_{eau} e}$$

Comme  $U = dx/dt$ ,  $x \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt}$ . Du coup on se retrouve avec:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dx^2}{dt} \right) = \frac{4\gamma}{\rho_{eau} e}$$



soit avec  $x(t=0) = 0$

$$\frac{dx^2}{dt} = \frac{4\gamma}{\rho_{eau}e} t$$

$$x^2 = \frac{2\gamma}{\rho_{eau}e} t^2$$

et finalement

$$x(t) = \left( \frac{2\gamma}{\rho_{eau}e} \right)^{1/2} t$$

D'où une vitesse constante compatible avec le diagramme spatio-temporel.

Karol Mysel, qui fut l'un des meilleurs spécialistes des films de savon, a mesuré la vitesse d'éclatement en fonction de l'épaisseur du film (Fig. 6).

*La courbe obtenue est-elle en bon accord avec votre loi théorique?*

*L'expérience illustrée en Fig. 4 indique une vitesse d'éclatement de 8 m/s. Quelle est l'épaisseur du film correspondante?*

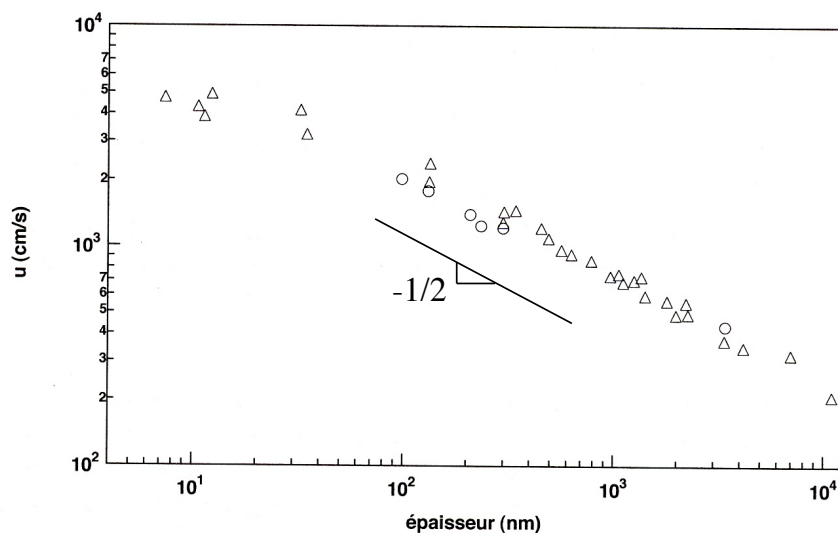


Figure 6: Vitesse d'éclatement en fonction de l'épaisseur, mesuré par K. Mysels.

**Solution:** On a bien la dépendance en  $1/e^{1/2}$  prévue.  
Pour  $U = 8$  m/s, on trouve  $e \simeq 800$  nm.

### 3.2 Déstabilisation du pourtour du trou

Le bourrelet n'est pas toujours très stable et tend à se décomposer en petites gouttes (Fig. 7). Une cause intuitive de ce phénomène serait l'instabilité classique de Rayleigh-Plateau: si on

ouvre délicatement un robinet, le filet d'eau finit par se décomposer en gouttes au delà d'une certaine longueur.

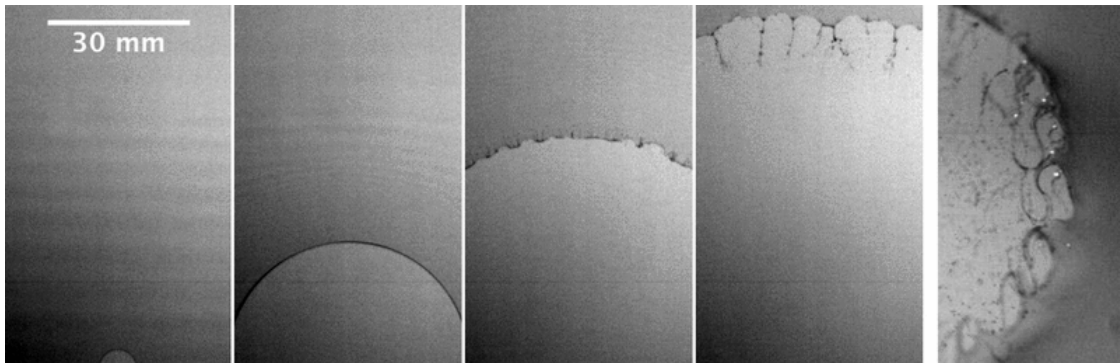


Figure 7: Déstabilisation du bourrelet observée dans certaines conditions (Lhuissier & Villermaux, 2009). Quelle peut-être l'origine physique de cette instabilité?

Afin d'appréhender cette instabilité, considérons une perturbation sinusoïdale sur un cylindre liquide de rayon initial  $R_0$  (Fig. 8). Le profil est ainsi donné par  $R(z) = R_0 + a \cos(kz)$ , avec  $a \ll R_0$ .

*Si on se limite à un calcul du 1er ordre, quelle est la pression sous l'interface dans un nœud (point A) et dans un ventre (point B)?*

*En déduire une condition pour que la perturbation s'amplifie.*

*Du point de vue de la pression (c'est à dire de l'énergie de surface) quelle limite correspondrait au nombre d'onde optimal?*

*En pratique, la taille des gouttes observées correspond-elle à cette limite? Qu'est-ce qui sélectionne la taille des gouttes?*

*Bien que le scénario Rayleigh-Plateau puisse sembler plausible, il n'explique pas l'instabilité de l'interface observée. En particulier la dernière image met en évidence un effet de claquement ("flapping").*

*Avez vous une autre idée pour expliquer cette instabilité? Et si l'air intervenait?*

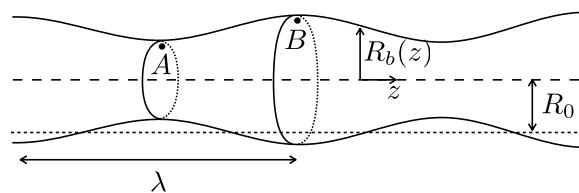


Figure 8: Perturbation sinusoïdale sur un cylindre de rayon initial  $R_0$ .

**Solution:** On a 2 courbures à prendre en compte: la courbure selon la section,  $1/R$  et la courbure longitudinale  $R''$ . Il faut juste faire attention au signes.

$$R'' = -ak^2 \cos(kx)$$

Au point A ( $\cos(kx) = -1$ ), la courbure longitudinale tend à diminuer la pression sous l'interface. La pression au point A vaut donc:

$$p_A = p_0 + \gamma \left( \frac{1}{R_0 - a} - ak^2 \right) \simeq p_0 + \gamma \left( \frac{1}{R_0} (1 + a/R_0) - ak^2 \right)$$

Inversement au point B ( $\cos(kx) = 1$ ), la courbure longitudinale tend à augmenter la pression sous l'interface. La pression au point B vaut ainsi:

$$p_B = p_0 + \gamma \left( \frac{1}{R_0 - a} + ak^2 \right) \simeq p_0 + \gamma \left( \frac{1}{R_0} (1 - a/R_0) + ak^2 \right)$$

La différence de pression entre les deux points vaut donc:

$$p_A - p_B = 2 \frac{a\gamma}{R_0^2} (1 - R_0^2 k^2)$$

La perturbation s'amplifie si  $p_A > p_B$ , soit  $k < 1/R_0$  ou encore  $\lambda > 2\pi R_0$ .

Le nombre d'onde optimal correspondrait à la limite  $k \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire la goutte de plus gros rayon possible.

En pratique, on obtient des gouttes de taille finie car faire des grosses gouttes demande de faire venir du liquide de loin, ce qui prend du temps. En pratique le système trouve un compromis et sélectionne le mode le plus rapide (il faut alors injecter le champ de pression que l'on vient de déterminer dans l'équation de Navier & Stokes).

Dans le référentiel du bourrelet, l'air souffle dessus à une vitesse élevée (on a vu  $\sim 10$  m/s), on se retrouve avec le même effet que le vent sur la mer qui conduit à la formation de vagues. C'est comme ce qu'on a vu en TD:

