

Interfaces

Notes de cours: Chapitres 5 et 6.

À retenir:

“prix d’une interface”: $\gamma \mathcal{A}$

$\gamma \Leftrightarrow \text{J/m}^2$ ou N/m

Eau: $\gamma = 72 \text{ mN/m}$, liquide organique: $\gamma \simeq 20 - 30 \text{ mN/m}$

Loi de Laplace: saut de pression lors de la traversée d’une interface courbée:

$$\Delta P = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Mémo pour le signe du saut: pression plus forte dans une bulle de savon que dans l’air.

Goutte posée sur un solide: angle de contact qui dépend des affinités entre liquide, solide et fluide environnant.

1 Pression de Laplace

Si un liquide ou un solide existe à température finie, c’est que des interactions moléculaires attractives parviennent à vaincre l’agitation thermique. Si ce n’était pas le cas, ces molécules demeureraient sous forme de gaz. Une molécule au centre d’un liquide est entourée d’un certain nombre de voisines ce qui conduit à autant d’interactions moléculaires. En revanche, une molécule proche d’une interface perd la moitié de ses voisines. Pour créer cette interface, il a donc fallu “casser” de multiples interactions. Le coût énergétique correspondant est donc proportionnel à la surface créée \mathcal{A} :

$$U_s = \gamma \mathcal{A}$$

Physiquement, la tension de surface γ peut être interprétée comme le rapport d’une énergie d’interaction moléculaire u et le carré d’une taille moléculaire a : $\gamma \sim u/a^2$. En considérant $u \sim 2 - 3kT \sim 10^{-20} \text{ J}$ et $a \sim 3 \text{ \AA}$, nous obtenons comme ordre de grandeur $\gamma \sim 100 \text{ mN/m}$. La valeur mesurée pour l’eau est de 72 mN/m et celle d’un liquide organique entre 20 et 30 mN/m .

Une des conséquences de cette énergie de surface est qu’une goutte isolée tend à adopter une forme sphérique pour minimiser sa surface.

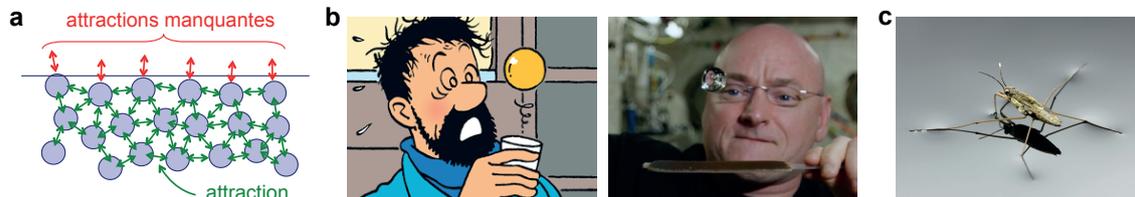


Figure 1: **a.** Le prix de l’interface. **b.** Inspiré par le capitaine Haddock, Scott Kelly joue au ping-pong capillaire dans la station spatiale. **c.** Gerris (communément appelé, à tort, “araignée d’eau”) se maintenant à la surface d’une mare.

1.1 Une goutte gonflée

Considérons une goutte de rayon R à l'extrémité d'une seringue (Fig. 2a). On augmente son volume d'une quantité dV en appliquant une pression P sur le piston de la seringue.

Quel est le travail fourni par l'opérateur?

Comment varie l'énergie de surface?

En déduire la pression à l'intérieur de la goutte (loi de Laplace).

Dans le cas où l'interface présente 2 rayons de courbure principaux, comment se traduirait cette loi?

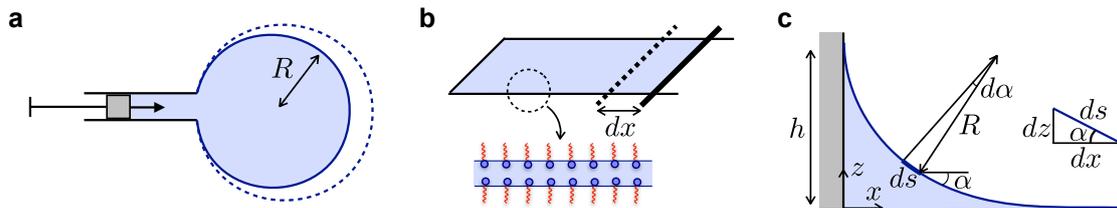


Figure 2: **a.** Gonflement d'une goutte. **b.** Film de savon posé sur un cadre dont l'une des barres est mobile (le film stabilisé par des molécules tensio-actives présente 2 interfaces liquide/air). **c.** Ménisque sur une paroi.

1.2 Surfaces sous tension

Quelle force exerce un film de savon sur un cadre qui le soutient? Pour répondre à cette question, considérons un cadre en U auquel on ajoute une barre mobile de longueur L (Fig. 2b).

Quel est le gain en énergie de surface si la barre se déplace de dx ? (attention, un film de savon est constitué de 2 interfaces). En déduire la force qui s'applique sur la barre.

À partir de quelle masse une "araignée d'eau" se mouille-t-elle?

1.3 Ménisques

Vu de loin, la surface de l'eau dans un verre à l'air parfaitement plate. Cependant, près de la paroi du verre, on a l'impression que le liquide cherche à monter: il forme un ménisque (du grec *meniskos*, croissant de lune). Cherchons à déterminer la forme de ce ménisque et sa hauteur maximale.

Considérons un point positionné à une hauteur z juste sous l'interface (Fig. 2c). Quelle est la valeur de la pression hydrostatique en ce point?

L'interface est caractérisée par un rayon de courbure local R . En déduire une autre expression de la pression au point considéré.

Montrer que R et la pente locale α sont liés géométriquement par:

$$R = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{dz}{d\alpha}$$

Vers quoi tendent la pente et la hauteur loin de la paroi?
 En déduire une expression de la forme du ménisque.
 Quelle est sa hauteur maximale si le liquide mouille parfaitement la surface?

1.4 Ascension capillaire

Si on met un tube “capillaire” (étymologiquement, de diamètre interne “aussi fin qu’un cheveu”) en contact avec un liquide mouillant, le liquide monte par capillarité à l’intérieur du tube jusqu’à une hauteur d’équilibre que nous cherchons à déterminer (Fig. 3a).

On va supposer que la hauteur d’ascension est grande devant le rayon R du tube de telle sorte à ce que le ménisque soit une calotte sphérique.

En considérant à nouveau un point A juste sous le ménisque, déterminer la pression en ce point à la fois par l’hydrostatique et par la loi de Laplace.

En déduire la hauteur d’équilibre h_{eq} (loi de Jurin).

Quelle condition doit vérifier le rayon du tube pour que notre hypothèse de départ soit vérifiée? Pouvait-on s’y attendre?

Une petite application numérique: quel doit être le rayon maximal des stomates d’un arbre de 10 m de haut si la sève était uniquement maintenue par capillarité?

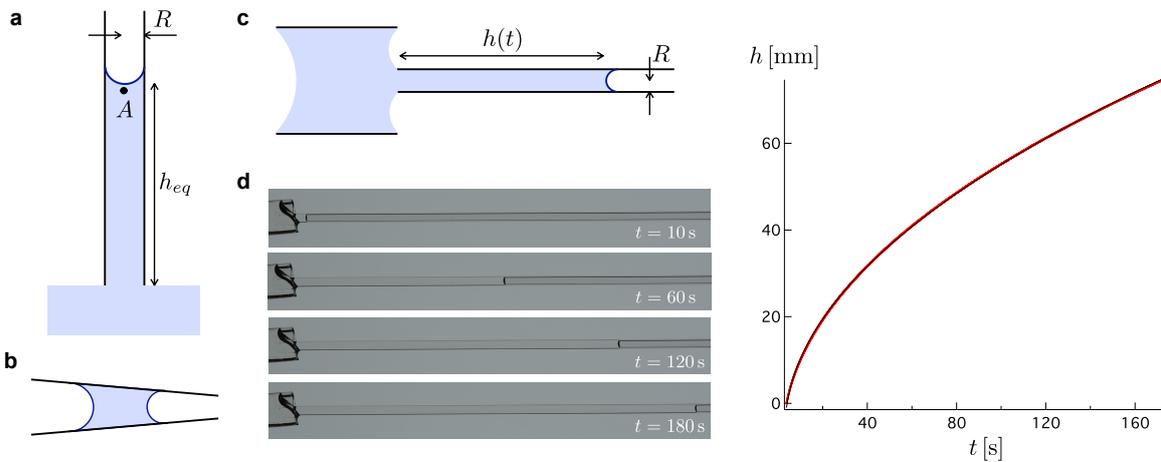


Figure 3: **a.** Ascension d’un liquide dans un tube capillaire. **b.** Tube conique: dans quelle direction la goutte se déplace-t-elle? **c.** Dynamique d’imprégnation dans un tube horizontal. **d.** Exemple concret: huile silicone ($\gamma = 20 \text{ mN/m}$, $\eta = 100 \text{ mPa}\cdot\text{s}$) imprégnant un capillaire en verre de rayon $R = 1 \text{ mm}$

Attention aux forces!

Plaçons une goutte liquide à l’intérieur d’un tube conique (Fig 3b). La goutte va-t-elle se déplacer? Si oui dans quelle direction?

2 Dynamique d'imprégnation

Nous avons décrit la hauteur d'équilibre pour l'ascension d'une colonne liquide dans un tube capillaire, mais quelle est sa dynamique? Considérons une situation simplifiée d'un tube horizontal dans laquelle la gravité n'intervient pas (Fig. 3c). Pour un tube vertical, cela correspond à $h \ll h_{eq}$.

Quel est le gradient de pression le long de la colonne?

À partir de l'équation de Navier & Stokes, retrouver en loi d'échelle la relation de Poiseuille vue dans le cours précédent.

En toute rigueur, cette loi n'est valable qu'en régime permanent (débit, gradient de pression, longueur de colonne constant). Nous ferons ici une approximation quasi-statique et négligerons les termes instationnaires.

Dans cette limite, quelle est la dynamique d'imprégnation?

Le loi obtenue est-elle en accord avec l'illustration expérimentale?

Que devrait-on changer dans les équations pour tenir compte de la gravité dans un tube vertical?

Sans faire le calcul complet, estimer en loi d'échelle le temps caractéristique nécessaire pour atteindre la hauteur d'équilibre.

Commenter la dynamique aux temps courts.

3 Pincement capillaire

Dans le problème du filet de miel, nous avons négligé les effets de la tension de surface. Cependant l'expérience nous montre que le filet de liquide finit par casser en petites gouttes. Cette instabilité a été décrite par Joseph Plateau et Lord Rayleigh (John William Strutt) au XIXe siècle. Elle résulte du fait qu'une série de gouttes présentent moins de surface qu'un long cylindre.

On se propose d'étudier le pincement capillaire d'un filament liquide maintenu entre deux plaques. Le suivi de ce pincement constitue le principe du "Capillary Breakup Extensional Rheometer" (CaBER) développé au MIT par Gareth McKinley:

https://en.wikipedia.org/wiki/Capillary_breakup_rheometry

Du point de vue pratique, un pont capillaire de diamètre typique 6 mm et de hauteur 3 mm est brusquement étiré de manière à obtenir un filament de longueur de 10 mm. L'évolution du rayon minimal du filament est suivi au cours du temps à l'aide d'une caméra (Fig. 4).

Pour simplifier le problème, nous négligerons la gravité. Nous supposons également que la partie étranglée du filament possède une section uniforme et est connectée en haut et en bas à des réservoirs de liquide qui ne subissent que la pression atmosphérique. En particulier nous ne prendrons pas en compte la pression de Laplace engendrée par la courbure des interfaces des réservoirs (ce qui sous-entend que le rayon de la partie pincée est petit devant celui des réservoirs).

Reprenons les résultats sur le filament étiré décrit dans le TD précédent, où nous avons montré que:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = A(t) \quad \text{et} \quad u_r(r) = -\frac{A}{2}r$$

Que vaut à présent la contrainte normale dans la direction radiale σ_{rr} ?

En déduire la valeur de la pression dans le liquide.

À partir de la contrainte longitudinale σ_{zz} , déterminer l'expression de A en fonction des paramètres du problème.

Estimer enfin la dynamique de pincement.

Cette dynamique ne pose-t-elle pas problème lorsqu'on s'approche du point de rupture?

L'évolution observée expérimentalement est-elle conforme au résultat prédit (Fig. 4c)?

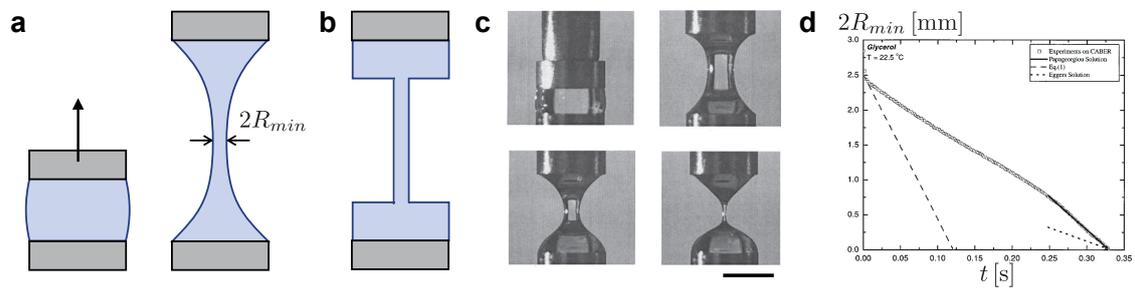


Figure 4: Pincement capillaire. **a.** Un pont capillaire est étiré de manière à réaliser un filament liquide qui est pincé sous l'effet de la tension de surface. **b.** Modèle simplifié d'un filament connecté à 2 réservoirs uniquement soumis à la pression ambiante. **c.** Réalisation expérimentale avec du glycérol ($\eta = 1$ Pa.s, $\gamma = 65$ mN/m, barre d'échelle 5 mm). **d.** Évolution du rayon minimal du filament au cours du temps (G.H. McKinley & A. Tripathi, *J. Rheol.*, 44, 663 (2000)).