Viscosité

Notes de cours: Chapitres 5 et 6.

À retenir:

Analogie solide élastique / fluide Newtonien

$$G, E \Leftrightarrow \eta, 3\eta \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\epsilon}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$$

Équation de Navier & Stokes (équation de la dynamique pour les milieux continus):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}$$

Conservation de la masse (fluide incompressible):

$$\nabla.\mathbf{u} = 0$$

Viscosité dynamique η (en Pa.s), Viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ (en m^2/s)
Eau à 20°: $\eta = 10^{-3}$ Pa.s, $\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$
Miel: $\eta \sim 1$ Pa.s
Air à 20°: $\eta \simeq 1,8.10^{-5}$ Pa.s, $\nu \simeq 1,6.10^{-5}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

Conditions au limites:
- continuité des vitesses, non glissement sur une paroi solide
- continuité des contraintes

Nombre de Reynolds:

$$Re = \frac{\text{inertie}}{\text{viscosite}} = \frac{||\rho \partial \mathbf{u}/\partial t + \rho(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}||}{||\eta \Delta \mathbf{u}||}$$

Si une seule taille caractéristique L et écoulement permanent:

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta}$$

Rappel sur les contraintes visqueuses, analogie avec l'élasticité.

La notion de viscosité est classiquement introduite comme le lien entre contrainte tangentielle et taux de déformation en cisaillement simple (Fig. 1a): $\sigma_{xz} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial z}$. Dans le cas général, c'est un tenseur qu'il faut définir pour tenir compte des contraintes dans les différentes directions de l'espace. Si le fluide est Newtonien, la relation entre le tenseur de taux de déformation $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ et le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ est linéaire:

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\eta \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - p\underline{\underline{1}}$$

On remarquera que cette relation est très proche de l'équation de Lamé développée dans le cours de MSM1.

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} + \lambda \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{1}}$$

Le second terme tend vers $-p$ lorsque le coefficient de Poisson ν tend vers 1/2.
Le tenseur des taux de déformation est la partie symétrique du gradient de vitesse :

$$\dot{\epsilon_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

ce qui en coordonnées cartésiennes se traduit par:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{pmatrix} -p + 2\eta\frac{\partial u_x}{\partial x} & \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & -p + 2\eta\frac{\partial u_y}{\partial y} & \eta\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \eta\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) & -p + 2\eta\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dans le cas ultra simple d'un écoulement u_x cisaillé selon z, on retrouve bien $\sigma_{xz} = \eta\frac{\partial u_x}{\partial z}$.

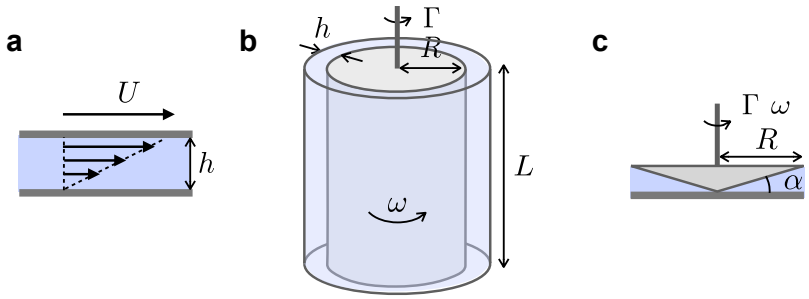

Figure 1: **a.** Écoulement en cisaillement simple entre 2 plaques parallèles. **b.** Écoulement de Couette cylindrique. **c.** Configuration cône-plan.

1 Mesurer la viscosité d'un liquide

Nous savons intuitivement que le miel est plus visqueux que l'eau qui elle-même est plus visqueuse que l'air (pour la viscosité dynamique). En pratique, comment mesure-t-on la viscosité d'un fluide? Nous proposons de décrire différentes méthodes qui vont nous permettre d'appréhender des écoulements de base.

1.1 Rhéomètres de Couette

Considérons un fluide cisaillé entre deux plaques parallèles (Fig. 1a). Dans ce cas, le profil de l'écoulement est trivial:

$$u_x(z) = \frac{U}{h}z$$

La contrainte de cisaillement que l'opérateur doit appliquer à la plaque supérieure vaut ainsi:

$$\sigma_{xz} = \eta\left.\frac{\partial u_x}{\partial z}\right|_{z=h} = \eta\frac{U}{h}$$

Mesurer cette contrainte nous permet donc de déterminer la viscosité dynamique. En pratique, assurer le déplacement de deux plaques maintenues à un espacement constant en minimisant

les frottements parasites est compliqué. Les rhéomètres commerciaux sont ainsi basés sur des géométries cylindrique ou cône-plan (leur axe de rotation est lubrifié par des films d'air).

1.1.1 Couette cylindrique

On considère deux cylindres concentriques insérés l'un dans l'autre (Fig. 1b). Le cylindre central de rayon R et de hauteur L est monté sur un axe et mis en rotation grâce à un moteur dont on peut contrôler la vitesse de rotation et mesurer précisément le couple correspondant. Le cylindre extérieur de rayon interne $R + h$ est maintenu fixé sur un bâti. Le fluide dont on veut mesurer la viscosité est introduit dans l'espacement entre les deux cylindres.

Dans la limite $h \ll R$, quel couple Γ le moteur doit-il développer pour assurer la rotation du rotor à une vitesse angulaire ω?
Application numérique pour de l'eau avec des valeurs typiques, $R = 2\,cm$, $h = 1\,mm$, $L = 10\,cm$, $\omega = 2\pi\,rad/s$. Un rhéomètre récent (HR-1 de TA Instruments) est capable de mesurer des couples entre $20\,nN.m$ et $150\,mN.m$. Cette mesure est-elle dans ses cordes?

1.1.2 Cône-plan

La méthode Couette cylindrique fonctionne bien, mais nécessite un assez grand volume de fluide (typiquement $20\,cm^3$). Une autre géométrie classique est la géométrie cône-plan (Fig. 1c). Un cône d'angle très large est fixé sur le rotor du rhéomètre au dessus du plan du bâti. Le fluide dont on veut mesurer la viscosité est inséré dans l'espace entre cône et plan. À nouveau, on mesure le couple nécessaire à assurer la rotation du rotor.

Si α est l'angle entre le cône et le plan (très faible), quel est le taux de cisaillement appliqué au fluide lorsque le rotor tourne à la vitesse angulaire ω? En quoi la géométrie cône-plan est-elle plus avantageuse que plan-plan? Quel couple le rotor doit-il fournir pour faire tourner le cône?
Application numérique pour de l'eau cisaillée dans un cône de rayon $R = 3\,cm$ avec un angle $\alpha = 1^\circ$ en rotation à une vitesse angulaire $\omega = 2\pi\,rad/s$.

1.2 Écoulement de Poiseuille

Les méthodes précédentes demandent un appareillage sophistiqué pour imposer un cisaillement et effectuer une mesure très précise du couple du moteur. De tels rhéomètres sont précieux lorsqu'il s'agit d'étudier les propriétés de fluides non-Newtoniens (fluides complexes, à seuils, viscoélastiques, à viscosité variable...). Cependant, si on cherche à vérifier la viscosité d'un liquide a priori Newtonien, un dispositif bien plus simple s'impose: le viscosimètre à capillaire. Le principe consiste à mesurer le temps nécessaire à une colonne liquide pour s'écouler à l'intérieur d'un tube vertical étroit. Plusieurs configurations proches existent. Nous présentons ici le viscosimètre de Ubbelohde que nous décrirons sous forme idéalisée (Fig. 2).

Si on néglige les effets de la tension de surface, quelle est la pression aux points A et C?
Le rayon interne R_c de la partie "capillaire" du viscosimètre (typiquement $0.5\,mm$) est très étroit par rapport au reste du viscosimètre (typiquement $5\,mm$). Que peut-on dire sur le

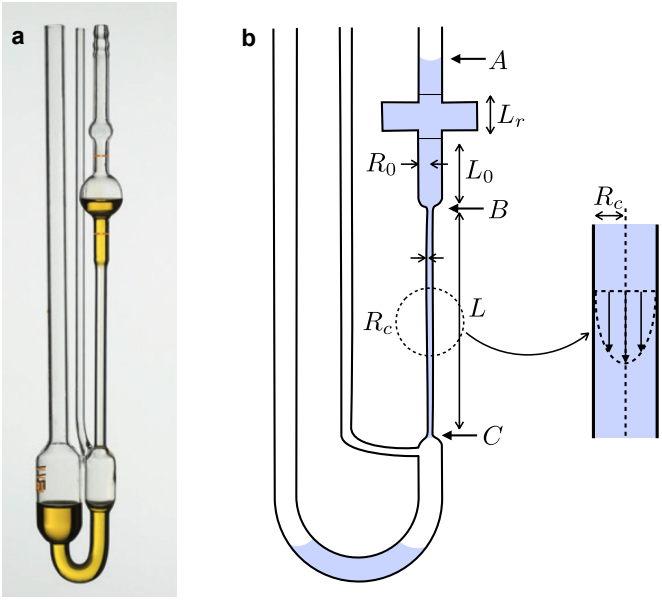

Figure 2: **a.** Viscosimètre de Ubbelohde. L'estimation de la viscosité est basée sur la mesure du temps de vidange du réservoir en forme de boule. **b.** Version idéalisée.

rapport entre la vitesse du liquide dans la partie capillaire et sa vitesse ailleurs? Peut-on négliger les effets inertiels dans l'équation de Navier & Stokes? En déduire la pression du liquide au point B en supposant que L_0 est grand devant la hauteur L_r du réservoir.
Décrire l'écoulement dans la partie capillaire et déterminer sa vitesse moyenne. Si $\mathcal{V}_0$ est le volume du réservoir, au bout de combien de temps va-t-il se vider?
Application numérique pour de l'eau avec $R_0 = 0.5\,mm$, $L = 8\,cm$, $L_0 = 2\,cm$, $\mathcal{V}_0 = 3\,ml$.

2 Film en écoulement

Fabriquer des films photographiques relève d'un défi d'ingénierie: déposer plusieurs couches épaisses de quelques microns sur un support polymérique en une seule étape. Même si la photographie argentique n'est plus trop à la mode, l'enduisage multicouches est également utilisé dans de nombreuses autres applications. Dans ce dispositif, les liquides sont injectés à partir de longues fentes et s'écoulent le long de plans inclinés (Fig. 3). L'interface est un peu chahutée au niveau de l'injection, mais l'expérience montre que les profils des films deviennent rapidement stationnaires. De quoi dépendent leurs épaisseurs respectives?

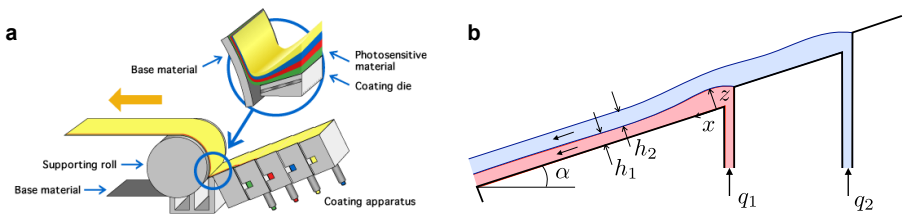

Figure 3: **a.** Procédé d'enduisage multicouches (www.konicaminolta.com). **b.** Version idéalisée.

Commençons par une couche unique de liquide 1 qui s'écoule sur un plan incliné de pente α (on supposera que l'air est très peu visqueux par rapport au liquide). Quel est le profil de l'écoulement dans un régime stationnaire?
Si le liquide est injecté avec un débit q_1 par unité de largeur, quelle est l'épaisseur h_1 de la couche?
Comment opérera-t-on pour résoudre le problème multicouches? Quelles seront les différentes conditions aux limites à prendre en compte? On décrira la procédure de résolution sans faire le calcul complet.

3 Écoulement élongationnel : le filet de miel

Nous venons de voir plusieurs exemples qui mettent en jeu des écoulements en cisaillement. Cependant, un liquide peut aussi être étiré, tout comme un solide. C'est par exemple le cas pour un filet de miel qui s'écoule sous l'effet de la gravité.
Considérons dans un premier temps une longue colonne cylindrique uniforme de rayon R étirée entre 2 plaques selon son axe z, le tout soumis à la pression atmosphérique ambiante p_{atm} (Fig. 4a).

On rappelle l'expression du tenseur des contraintes en coordonnées cylindriques:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{pmatrix} -p + 2\eta\frac{\partial u_r}{\partial r} & \eta\left(r\frac{\partial(u_\theta/r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & \eta\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \\ \eta\left(r\frac{\partial(u_\theta/r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) & \eta\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) \\ \eta\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) & \eta\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) & -p + 2\eta\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ainsi que l'expression de la divergence:

$$\nabla.\mathbf{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Sachant que u_r ne dépend que de r et u_z ne dépend que de z, établir à partir de la conservation du volume que:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = A(t)$$

Déterminer la distribution de la vitesse $u_r(r)$
Que vaut la pression à l'intérieur du liquide étiré?
Que risque-t-il de se passer si on tire trop fort?
Quelle contrainte axiale effective $\tau_{zz} = (\sigma_{zz} + p_{atm})$ faut-il appliquer pour induire un taux d'élongation $\partial u_z/\partial z$ donné?

En élasticité linéaire, le module de cisaillement de Lamé est lié au module de Young par la relation: $\mu = E/2(1+\nu)$, où ν est le coefficient de Poisson. Que devient cette relation dans le cas incompressible?
On s'intéresse enfin à la forme d'un filet de miel (Fig. 4b) axisymétrique. On suppose que le filet est continûment alimenté par un débit q, ce qui conduit à un écoulement stationnaire (on néglige l'inertie du fluide ainsi que sa tension de surface). Considérons une tranche

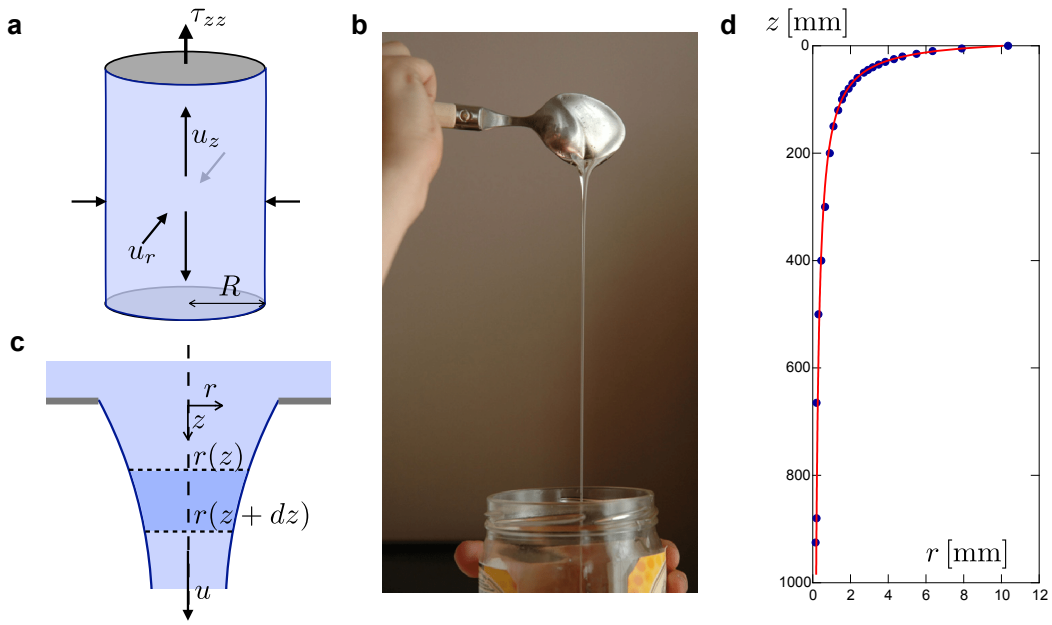

Figure 4: **a.** Élongation d'une colonne de liquide. **b.** Écoulement d'un filet de miel sous son poids (cliché Céleste Villermaux). **c.** Bilan des forces sur une tranche de liquide. **d.** Mesures historiques de Trouton sur du goudron (1906) et ajustement par une hyperbole.

d'épaisseur dz. À quelles forces est-elle soumise?
Comment se traduit la conservation du débit?
En déduire l'équation différentielle qui décrit la forme du filet.

La solution de cette équation a été déterminée analytiquement par Trouton en 1906:

$$r(z) = \frac{b}{\sinh\left(\sqrt{\frac{\pi\rho g}{6\eta q}}\, bz\right)}$$

En pratique la constante d'intégration b est petite, si bien que cette solution est très proche d'une hyperbole:

$$r(z) \simeq \sqrt{\frac{6\eta q}{\pi\rho g}}\frac{1}{z}$$

La figure 4d reprend les mesures historiques de Trouton sur un échantillon de goudron ajustées par une hyperbole. Malheureusement l'unité de mesure du débit n'est pas précisée dans l'article original et il est délicat d'extraire la valeur exacte de la viscosité: n'oubliez pas de préciser les unités de mesures en TP!