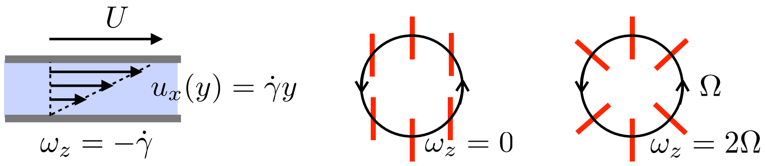
Tourbillons

Notes de cours: Chapitre 8.

À retenir:

Vorticité $\omega_z = \nabla \wedge \mathbf{u} \Leftrightarrow$ changement de direction d'une aiguille qui suit l'écoulement.



Rotationnel de l'équation de Navier & Stokes:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\omega = \omega.\nabla\mathbf{u} + \nu\Delta\omega$$

Figure 1: (a) Tourbillons centimétriques de laboratoire (cliché Philippe Petitjeans & Frédéric Bottausci, PMMH-ESPCI), (b) tornade d'une centaine de mètres (cliché NASA), (c) tache rouge de Jupiter d'environ 20 000 km de diamètre (NASA, Voyager 1 en 1979)

1 Un tourbillon sans vorticité?

Intuitivement nous associons la notion de vorticité à celle de tourbillons. Il s'agit cependant de deux notions complètement distinctes. Nous avons vu lors de l'étude des couches limites qu'un écoulement visqueux parallèle de type Couette était rotationnel. Réciproquement, peut-on imaginer un tourbillon sans vorticité?

Un écoulement irrotationel peut être décrit par un potentiel de vitesse ϕ, tel que $\mathbf{u} = \nabla\phi$.
Comment se traduit l'incompressibilité de l'écoulement?
On cherche des solutions axisymmétriques pour l'écoulement de la forme $\mathbf{u} = u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$. Quelle est la forme de ϕ compatible avec cette condition?
Quelle est l'expression de la vitesse u_θ? Exprimer cette dernière en introduisant la circulation correspondante Γ.
Retrouver cette expression en intégrant la circulation de la vitesse sur une couronne fendue de fluide.

Comment varie la pression dans l'écoulement? Cette distribution est-elle compatible avec l'idée intuitive qu'on est attiré par "l'œil du cyclone"?

2 Canon à vortex et Valse de tourbillons

Vous avez peut-être déjà réalisé des canons à vortex? C'est très simple, il suffit de percer un trou circulaire dans un carton, de remplir ce dernier de fumée (pour la visualisation) et de taper dessus. Un vortex annulaire sort alors du trou et peut venir culbuter une pile de gobelets en plastique (Fig. 2).
Pour en savoir plus, n'hésitez pas à visionner les vidéos de la chaîne *so cool* Physics girl:
`https://youtu.be/pnbJEg9r1o8`
`https://youtu.be/N7d_RWyOv20`

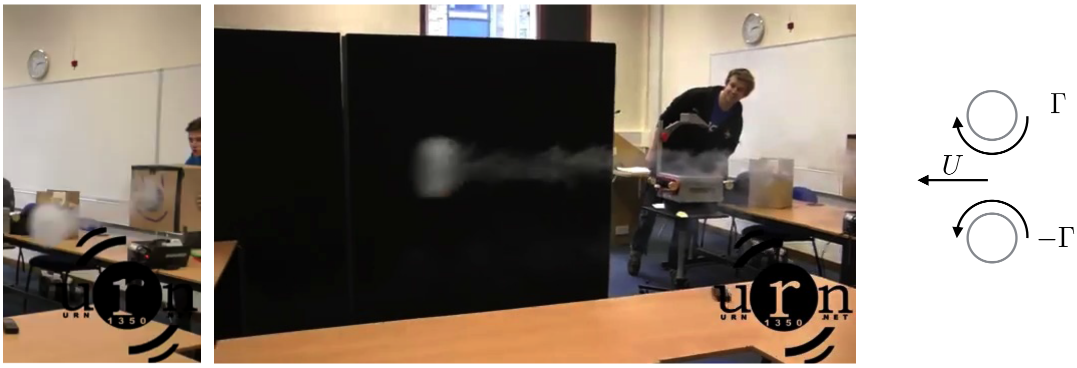


Figure 2: Canon à vortex réalisé à partir d'une innocente boîte en carton. Le vortex annulaire projeté atteint ici une vitesse de l'ordre de 10 m/s. Source: `https://youtu.be/4b2SV3ASUxY`

Sachant que les potentiels de vitesse sont des champs additifs (comme en électrostatique), comment une paire de vortex contrarotatifs vont-ils se comporter?
L'anneau de l'exemple illustré se translate à une vitesse de l'ordre de 10 m/s, pour un diamètre d'environ 20 cm. Quelle est la circulation correspondante?

Il est également possible de créer des lignes de tourbillons en claquant des portes. C'est ce qu'on réalisé nos collègues marseillais (Fig. 3). Ils ont ainsi montré que deux vortex corotatifs se mettaient à valser.
Si les deux vortex ont la même circulation Γ, quelle est la vitesse angulaire de leur valse?
Au bout d'un certain temps, nos deux danseurs ralentissent et fusionnent. De quel ingrédient avons-nous oublié de tenir compte dans notre description?

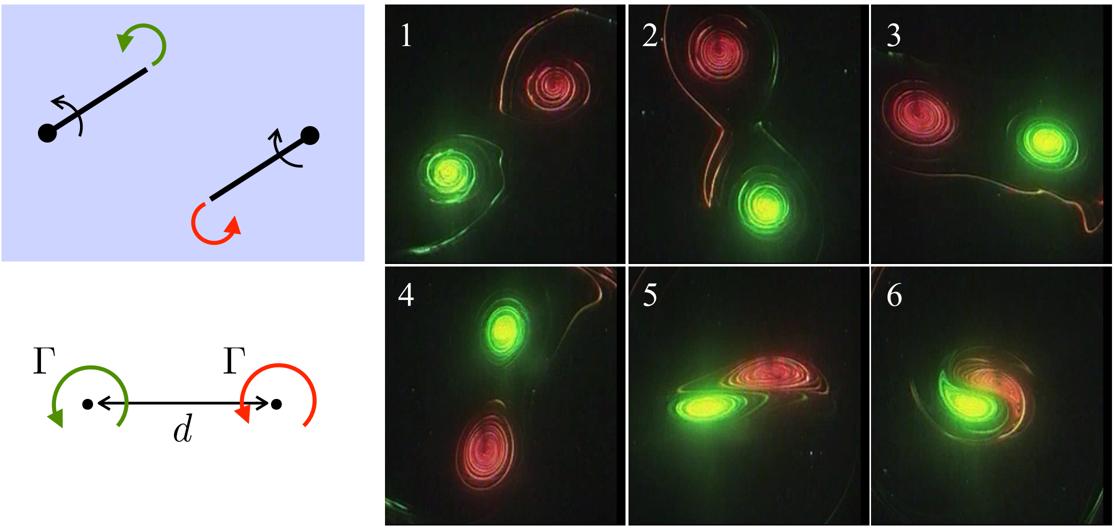


Figure 3: Tourbillons corotatifs créés en claquant deux portes sous l'eau. Source: `https://www.irphe.fr/~meunier/Fusion_sym.mpg`

3 Un modèle plus réaliste: Le vortex de Lamb-Oseen

Dans le modèle précédent, la vorticité est concentrée au centre du tourbillon qui apparaît comme une ligne singulière. Nous avons déjà été confrontés à ce type de problème lors de l'étude des couches limites: lorsqu'on tire soudainement une plaque au fond d'un bassin, la vorticité est initialement nulle partout, sauf à la surface de la plaque qui présente également un singularité. Nous allons vu que cette singularité de vorticité se dilue progressivement à travers une couche limite.

À partir d'une analogie avec le problème de la plaque mise en mouvement, décrire schématiquement l'évolution du tourbillon singulier.
Si le centre du tourbillon tourne en bloc, quelle est la vorticité dans cette région?

Si cette approche qualitative donne les grandes lignes, nous pouvons néanmoins proposer un modèle plus quantitatif et chercher une solution de la forme $\mathbf{u} = u_\theta(r,t)\,\mathbf{e}_\theta$.

Une telle solution est-elle compatible avec un écoulement incompressible?
Montrer que u_θ doit vérifier:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta)\right)$$

Reste à résoudre cette équation.
Justifier que l'on cherche une solution de la forme:

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} f(r/\sqrt{\nu t})$$

Quelle condition doit-elle vérifier pour $r/\sqrt{\nu t} \to \infty$?
On peut alors montrer (c'est un bon exercice) que la solution correspondante est de la forme:

$$f(Y) = \left(1 - \exp\left(-Y^2/4\right)\right)$$

Que devient $u_\theta(r)$ dans la limite $r/\sqrt{\nu t} \to 0$?

Comment la vorticité évolue-t-elle dans l'espace et dans le temps?
Quel est le destin de ce tourbillon aux temps longs?

Lorsqu'un avion vole, il laisse derrière lui un tourbillon (on verra pourquoi dans le chapitre sur la portance), comme illustré Fig. 4. Ces tourbillons posent de gros problèmes dans les aéroports car on ne peut laisser atterrir ou décoller un avion sans attendre que le vortex laissé par l'avion précédent soit amorti. Si l'écoulement reste laminaire, quel est le temps typique d'attente? L'ordre de grandeur vous parait-il correct?

Figure 4: Tourbillons laissés à l'arrière d'ailes d'avion (clichés NASA, www.presse-citron.net). Difficile de faire voler un autre avion en toute sécurité derrière si le tourbillon ne s'est pas atténué.

4 Tourbillons étirés

Comment maintenir un tourbillon stationnaire? Nous avons déjà tous observé un tourbillon dans une baignoire qui se vide (ce dernier tourne un coup sur deux dans le sens horaire ou anti-horaire, l'effet des forces de Coriolis est bien trop faible devant les perturbations expérimentales qui dictent le sens de rotation du tourbillon). Si vous remplissez la baignoire avec le même débit de vidange, le tourbillon reste stationnaire (Fig. 5).

Comment s'opposer au ralentissement du tourbillon par la viscosité? En essayant de l'accélérer. La vidange de la baignoire tend à étirer le liquide dans la direction verticale.

Considérons l'évolution d'un cylindre de liquide (en rouge sur la Fig. 5) qui est entraîné vers la sortie. Comment varie son moment d'inertie? Comment évoluerait sa vitesse de rotation si le moment cinétique était conservé?

Reste à décrire l'effet de l'étirement de manière plus quantitative.

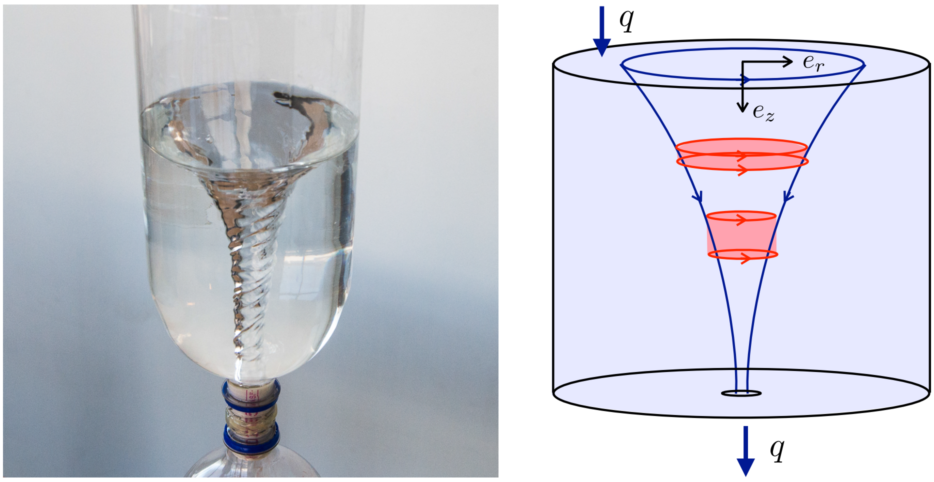


Figure 5: Tourbillon quasi-stationnaire lors du vidange d'une bouteille (il serait parfaitement stationnaire si on le réalimentait en permanence).

Le rotationnel de l'équation de Navier & Stokes conduit à l'équation de la vorticité:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\omega = (\omega.\nabla)\mathbf{u} + \nu\Delta\omega$$

À quoi correspondent les différents termes?
Afin de tenir compte de l'étirement, on écrit le champ de vitesse de la forme suivante (z est orienté vers le bas):

$$\begin{pmatrix} u_r = -\frac{1}{2}\alpha r \\ u_\theta = u_\theta(r) \\ u_z = \alpha z \end{pmatrix}$$

où α correspond au taux d'extension. C'est le modèle de Burgers.

Cet écoulement est-il compatible avec la condition d'incompressibilité?
Déterminer les termes de l'équation de la vorticité dans la direction z et en déduire l'équation d'évolution de ω_z.
Intégrer cette équation et montrer que le tourbillon a un rayon caractéristique qui dépend d'un équilibre entre étirement et viscosité.

Opérations en coordonnées cylindriques

Rotationnel :

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{u} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e_z}$$

Divergence :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Équation de Navier-Stokes:

$$\rho\frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho\,\mathbf{u}.\nabla u_r - \rho\frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta\left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho\,\mathbf{u}.\nabla u_\theta + \rho\frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta\left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\rho\frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho\,\mathbf{u}.\nabla u_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\Delta u_z$$

Équation de la vorticité :

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\omega_r = \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla u_r + \nu\left(\Delta\omega_r - \frac{\omega_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial \omega_\theta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\omega_\theta = \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla u_\theta + \nu\left(\Delta\omega_\theta - \frac{\omega_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial \omega_r}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\omega_z = \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla u_z + \nu\Delta\omega_z$$

où les opérateurs gradient et laplacien ont pour expression (f étant un scalaire) :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$