

Couches limites et trainée de friction

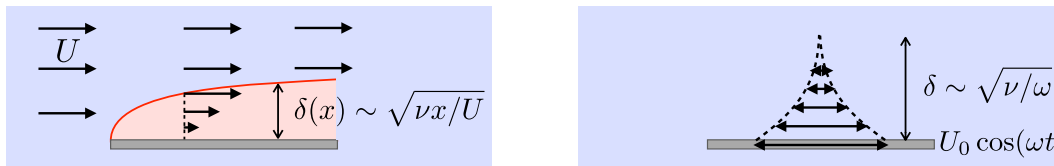
Notes de cours: Chapitre 7.

À retenir:

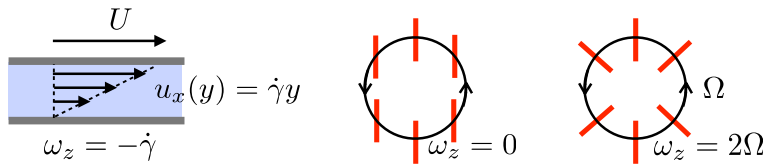
La viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ est le coefficient de diffusion de la quantité de mouvement (et de la vorticité).

Dans un écoulement oscillant à la pulsation ω , l'épaisseur de couche limite est, en ordre de grandeur $\sqrt{\nu/\omega}$.

L'épaisseur d'une couche limite en écoulement stationnaire sur une plaque plane varie comme $\sqrt{\nu x/U}$.



Vorticité $\omega_z = \nabla \wedge \mathbf{u} \Leftrightarrow$ changement de direction d'une aiguille qui suit l'écoulement.



1 Couche limite sur une plaque mise en mouvement

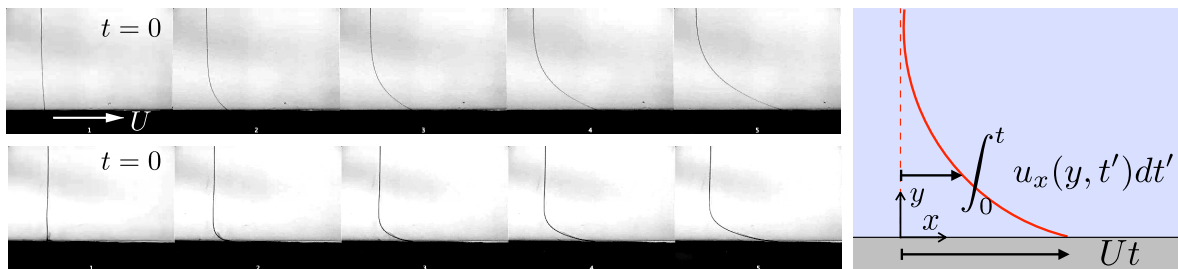


Figure 1: Écoulements induits dans un liquide par une plaque mise en mouvement vers la droite au fond du bain. Un filet de colorant vertical matérialise le déplacement du fluide. La viscosité du liquide est plus élevée en haut qu'en bas.

Considérons un bain de liquide au repos et imaginons que le fond du bain se mette soudainement à avancer avec une vitesse U (Fig. 1). Comment le bain va-t-il se mettre en mouvement? L'expérience montre que l'écoulement est unidimensionnel, la seule composante de vitesse non nulle est u_x le long du plan. Nous cherchons à déterminer le champ de vitesse induit dans le fluide et à calculer la force exercée sur la plaque solide.

Montrer que dans ce cas, l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{\partial u_x}{\partial t}, \quad (1)$$

où $\nu = \eta/\rho$ est la viscosité cinématique.

De quel type d'équation s'agit-il ?

En effectuant une analyse dimensionnelle de l'éqn. (1), proposer une loi d'échelle pour l'épaisseur $\delta(t)$ de la couche de fluide mise en mouvement. En déduire un ordre de grandeur de la contrainte de cisaillement exercée sur la paroi solide.

Au-delà de la solution en loi d'échelle, il est possible de trouver des solutions autosimilaires de la forme $u_x(y, t) = U f(y/\sqrt{\nu t})$.

À quelle équation obéit la fonction f et quelles en sont les solutions avec les conditions aux limites de notre problème ?

De la vorticité sans tourbillons?

La vorticité (rotationnel de la vitesse) obéit à l'équation, dérivée de celle de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \omega. \quad (2)$$

   deux dimensions, seule la composante $\omega_z = \partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y$ est non nulle.

Quelle est la distribution de vorticité dans l'écoulement ?

La notion de vorticité est-elle synonyme de tourbillons?

   quelle équation obéit ω_z ?

2 Couche limite sur une plaque plane. Traînée de friction

Considérons l'écoulement d'un fluide le long d'une plaque (Fig. 2). Nous supposons que loin de la plaque, la vitesse du fluide U est uniforme. Néanmoins au voisinage du solide, la vitesse doit ralentir à cause de la condition de non-glissement. Quel est le champ de vitesse au-dessus de la plaque et quelle force de traînée ressent-elle?

Par analogie avec le problème pr  c  dent, estimer l'épaisseur de la couche limite au sein de laquelle l'écoulement est sensible à la viscosité du fluide.

Dans le cas de la plaque, nous avons considéré u_y comme nul. Est-ce valable ici?

Donner en loi d'échelle la force de traînée T ressentie par la plaque (traînée "de friction" ou "de peau").

Cette force s'écrit de manière générique sous la forme : $F = \frac{1}{2} \rho U^2 C_x LW$, où W est la largeur de la plaque et C_x le coefficient de traînée.

Donner une expression de C_x en fonction du nombre de Reynolds défini comme $Re = UL/\nu$. Cette relation est-elle en bon accord avec les résultats expérimentaux représentés en Fig. 3?

Quelle serait la dépendance de la force avec la vitesse à bas nombre de Reynolds?

Donner une interprétation du nombre de Reynolds en comparant l'épaisseur de la couche limite à la taille caractéristique du système.

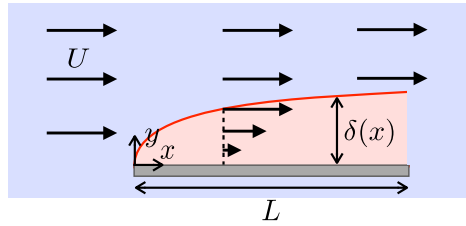


Figure 2: Couche limite au-dessus d'une plaque parallèle à l'écoulement du fluide. Loin du solide, la vitesse U est uniforme. Elle diminue près de la plaque à cause de la condition de non-glissement. La zone de transition, qui est appelée la couche limite, est caractérisée par une épaisseur $\delta(x)$.

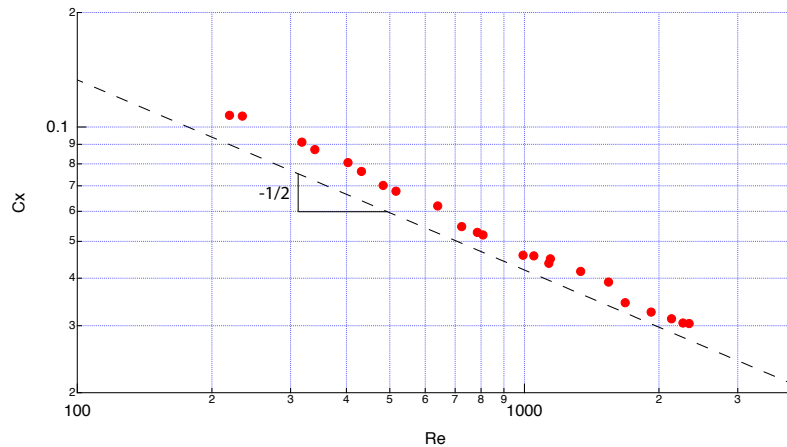


Figure 3: Coefficient de trainée pour une plaque plane. Le nombre de Reynolds est ici défini comme $Re = UL/\nu$. Données tirées d'un rapport NACA de 1951, traduction d'une publication tchécoslovaque de 1947, expériences de Z. Janour faites dans le canal à huile de Göttingen. Les plaques utilisées ont 10 ou 15 cm de longueur, 0,5 mm d'épaisseur, les vitesses vont de 3,5 à 15 cm/s et la viscosité cinématique de l'huile est $0,15 \text{ cm}^2/\text{s}$.

3 Couche limite sur un plan oscillant. Mesure de la viscosité de l'hélium liquide.

Reprenons le problème de Stokes (plaque tirée au fond d'un bassin), mais avec un mouvement oscillant de la plaque qui impose $u_x(0) = U \cos(\omega t)$. On cherche alors des solutions périodiques en temps de la forme $u = U \operatorname{Re}[\exp(i\omega t)F(y)]$.

Quelle est l'expression de F ?

Sur quelle distance les oscillations de la vitesse se font-elles sentir?

Quelle est la contrainte de cisaillement sur la paroi?

Nous avons étudié précédemment les viscosimètres de type Couette, cône-plan et Poiseuille. Ces appareils ne sont pas les plus commodes pour mesurer des petites viscosités comme celles des gaz ou des liquides cryogéniques comme l'hélium. Une méthode plus adaptée consiste à

mesurer l'amortissement du mouvement oscillant d'un pendule de torsion munis de disques pour augmenter la surface de friction du fluide environnant (Maxwell 1866 pour mesurer la viscosité de l'air, Keesom et McWood en 1938 pour l'hélium liquide).

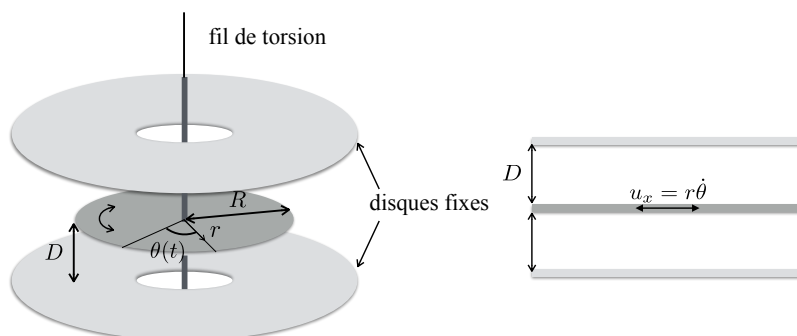


Figure 4: Schéma du viscosimètre à disques oscillants. Un ensemble de disques (rayon R) est suspendu à un fil de torsion. Des disques fixes sont intercalés entre les disques oscillants, la distance entre disques étant égale à D . À droite, approximation bidimensionnelle du système: une plaque oscille dans son plan avec une plaque fixe située à une distance D .

Considérons la dynamique d'un disque oscillant de rayon R , d'épaisseur e et de masse volumique ρ_s . Sa position angulaire $\theta(t)$ obéit à l'équation de la dynamique $J\ddot{\theta} = \Gamma$ où Γ est le couple appliqué sur le disque et $J = \pi R^4 e \rho_s / 2$ est le moment d'inertie. Le couple a une partie de rappel élastique $-k\theta$ et une partie due au couple résultant des contraintes visqueuses sur le disque. En l'absence de friction visqueuse, la fréquence d'oscillation du disque est $\sqrt{k/J}$ et on peut écrire la position angulaire sous la forme $\theta = A \sin \omega t$. Avec de la friction visqueuse, l'amplitude d'oscillation va diminuer avec le temps.

La position angulaire du disque est décrite par l'équation:

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -k\theta - \Gamma_v$$

où Γ_v est le couple de friction visqueuse.

Quelle est l'expression générale de Γ_v ?

Expliciter cette expression dans les cas où l'épaisseur de couche limite est petite ou grande par rapport à l'espacement entre les plaques fixes. Afin de simplifier les calculs, on effectuera une approximation bidimensionnelle du système (valable si l'épaisseur de couche limite δ ou l'espacement entre disques D est petit devant R).

L'équation de la rotation du disque se ramène à:

$$\ddot{\theta} + \sigma \dot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

Dans le cas d'un amortissement faible ($\sigma \ll \omega$), les solutions sont de la forme:

$$\theta(t) = A_0 \exp(-t/\tau) \sin(\omega^* t + \phi) \quad \text{avec} \quad \tau = 2/\sigma \quad \text{et} \quad \omega^* = \omega \sqrt{1 - \sigma^2/4\omega^2}$$

Quelles sont les expressions des temps d'amortissement dans les deux cas limites précédemment décrits?

Dans les expériences de Keesom et McWood sur la viscosité de l'hélium liquide, la période des oscillations est 25 s. Le disque est en cuivre ($\rho_s = 9000 \text{ kg/m}^3$) et son épaisseur est de 0.6 mm. À 2°K, la masse volumique de l'hélium est de 145 kg/m^3 . Si le temps d'amortissement est de 1300 s, quelle est la viscosité correspondante?