

# Lubrification

Notes de cours: Chapitre 6.

À retenir:

Si  $u_1 \gg u_2, u_3$ , on peut résoudre l'équation de Stokes en ne considérant que  $\Delta u_1$ . Les autres composantes de la vitesse interviennent néanmoins dans la conservation du débit.

## 1 Écrasement/décollement d'une couche liquide

### 1.1 Toucher le fond

On considère un disque épais de rayon  $R$  qui tombe horizontalement dans un fluide visqueux à une vitesse  $V$  (Fig. 1). Lorsqu'il est en plein milieu du fluide (loin du fond), nous avons vu que la force de traînée exercée par le fluide s'écrivait comme  $F_\infty \sim \eta RV$ .

Comment évolue cette force lorsque la distance  $h$  le séparant du fond devient petite? Le solide va-t-il toucher le fond? Osborne Reynolds fut l'un des premiers à décrire ce type d'écoulements en 1886.

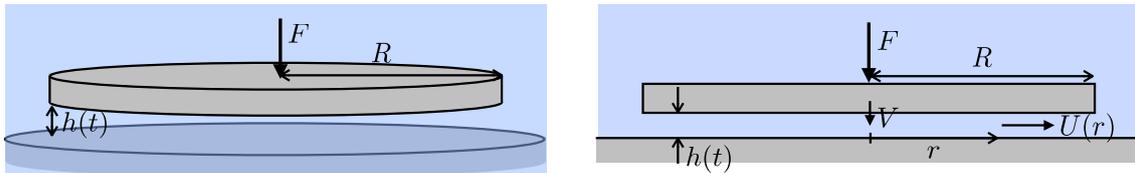


Figure 1: Atterrissage d'un disque dans un fluide visqueux.

On se place dans la limite  $h \ll R$ . Déplacer le disque verticalement chasse le fluide par les côtés et cet écoulement engendre des contraintes sur le disque que nous cherchons à évaluer.

*Quel est le lien entre la vitesse verticale  $V$  et la vitesse moyenne radiale  $U(r)$ ?*

*À quelle condition l'écoulement est-il à bas nombre de Reynolds?*

*Déterminer en loi d'échelle le gradient de pression du fluide écrasé par le disque lorsqu'on oublie l'effet de la pression hydrostatique (pression du fluide constante autour du cylindre).*

*Quelle est la condition pour négliger l'effet de la gravité sur la pression?*

*Déterminer une expression de la force que subit la plaque.*

*Si le cylindre tombe sous l'effet de son propre poids, finit-il par toucher le fond?*

*Que se passe-t-il dans une situation réelle?*

*Intégrer les équations du mouvement à la lumière des estimations en loi d'échelle (c'est à dire en éliminant les termes négligeables dans l'équation de Navier-Stokes).*

Équation de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques page suivante.

Équation de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_r - \rho \frac{u_\theta^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left( \Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_\theta + \rho \frac{u_r u_\theta}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left( \Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_z &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta u_z\end{aligned}$$

où les opérateurs gradient et laplacien ont pour expression :

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad \text{et} \quad \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

## 1.2 Décollement

Inversons à présent le problème et considérons le décolllement de deux plaques séparées par une mince couche de fluide visqueux. Dans certaines situations, des digitations ou même des bulles apparaissent (Fig. 2).

*Expliquer qualitativement ces comportements.*

*Estimer une vitesse critique au-delà de laquelle on s'attend à observer de la cavitation.*

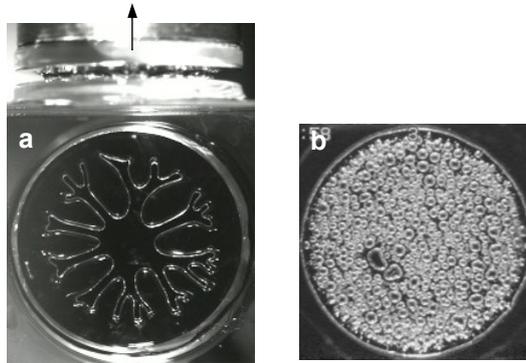


Figure 2: Séparation de deux plaques collées par un fluide visqueux. (a) Vitesse modérée (R. Welsh, MIT). (b) Vitesse rapide (A. Chiche, C. Creton, ESPCI).

## 2 Nivellement d'un film de peinture

Lorsqu'on peint une surface avec un pinceau, la couche fraîchement déposée est striée (ou plein de petits picots si on utilise un rouleau). Cet effet n'est généralement pas désiré, mais heureusement la couche tend à se lisser spontanément si elle n'a pas séché entre-temps. Au contraire, certains artistes (Pierre Soulages par exemple) mettent à profit la texture de la couche sur leurs tableaux. Dans ce cas ils choisiront une peinture dont l'autolissage est plus long que le temps de séchage. Nous proposons ici d'estimer ce temps de lissage.



Figure 3: Gauche: L'artiste Pierre Soulages à l'œuvre dans son atelier. On remarquera les stries sur la couche de peinture. Droite: Visite présidentielle du Musée Soulages à Rodez. F. Hollande serait-il en train d'estimer le temps de lissage de la peinture utilisée par l'artiste?

## 2.1 Temps de lissage

Considérons la configuration simplifiée d'un film d'épaisseur moyenne  $h_0$  texturé de stries régulières de longueur d'onde  $\lambda$  et d'amplitude  $A(t)$  (Fig. 4). Nous nous placerons dans la limite  $A \ll h_0 \ll \lambda$  et nous supposons que les stries ont un profil sinusoïdal  $h(x) = h_0 + A \cos(kx)$ , avec  $k = 2\pi/\lambda$ .

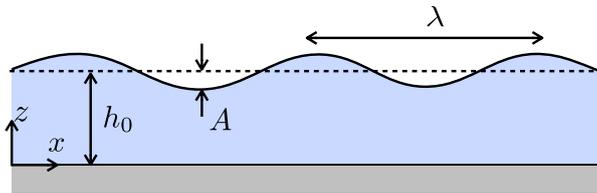


Figure 4: Film visqueux texturé de stries régulières.

*Quels sont les ingrédients physiques responsables de l'auto-lissage?*

*Quels sont au contraire, les freins possibles à ce lissage?*

*Compte-tenu des hypothèses, comment se comparent  $u_x$  et  $u_z$ ?*

*Dans quelle condition l'écoulement est-il à bas nombre de Reynolds?*

*Dans l'hypothèse de lubrification, quelle est la distribution de pression  $p(x, z)$  dans le film?*

*Déterminer en loi d'échelle, le gradient de pression  $\partial p/\partial x$ . En déduire une estimation en loi d'échelle de la vitesse  $u_x$ .*

*Reste à utiliser la conservation du débit.*

*Si on considère un élément compris entre  $x$  et  $x + dx$ , quel est le lien entre la variation de hauteur  $\partial h/\partial t$  et le débit linéique  $q = \int_0^h v_x(z) dz$ ?*

*En exprimant cette dernière relation en loi d'échelle, estimer le temps de lissage  $\tau$ . Application numérique:  $\eta \sim 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $h_0 \sim 100 \mu\text{m}$ ,  $\lambda \sim 500 \mu\text{m}$ ,  $\gamma \sim 20 \text{ mN/m}$ , .*

## 2.2 Peinture au plafond

Inversons le problème et considérons le cas d'une couche fine uniforme déposée sur le plafond. L'expérience montre que si la peinture ne sèche pas assez rapidement, la couche se déstabilise et un motif régulier de gouttes apparaît (Fig. 5). Vous pouvez d'ailleurs observer ce même type de motif sur le plafond de votre salle de bains après la condensation d'un film de vapeur.

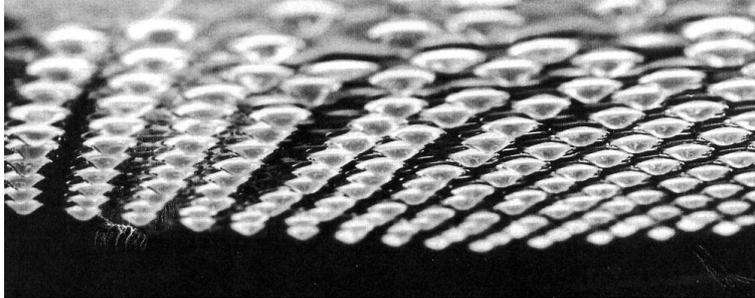


Figure 5: Destabilisation d'un film liquide déposé sur une plaque que l'on a retournée.

Pour étudier une instabilité, la procédure classique consiste à considérer une perturbation sinusoïdale de l'état de base et d'estimer le taux de croissance de cette perturbation. En d'autres termes, cela consiste à reprendre le calcul précédent en remplaçant  $g$  par  $-g$ .

*Qu'est qui déstabilise la couche? Est-ce que quelque chose tend au contraire à la stabiliser?  
Tous les modes de perturbation vont-ils s'amplifier?  
Quel est le mode qui s'amplifie le plus rapidement?*

### Pour ceux qui veulent faire le calcul complet...

Dans la première situation (stries qui s'estompent), le calcul complet conduit à un temps de relaxation exponentielle:

$$\tau = \frac{3\eta}{h_0^3 \rho g} \frac{1}{k^2(1 + k^2 \ell_c^2)}$$

Dans la seconde situation (instabilité d'un film suspendu), le même calcul où  $g$  est inversée nous donne le taux de croissance:

$$\sigma = k^2(1 - k^2 \ell_c^2) \frac{h_0^3 \rho g}{3\eta}$$