

# Panache thermique

## 1 Mouvements convectifs dans un liquide

### 1.1 Introduction

Le montage expérimental proposé illustre de manière simple la mise en mouvement d'un fluide par convection (Fig. 1a). Ce fluide (ici de l'eau) est contenu dans une enceinte ponctuellement chauffée dans sa partie inférieure (la surface supérieure du liquide est en contact avec l'air ambiant de température inférieure). La densité du liquide diminue légèrement au voisinage du point chaud, ce qui engendre son ascension à la manière d'une montgolfière. Ce phénomène est omniprésent dans la vie quotidienne : il fait monter la fumée à la sortie d'une cheminée et conduit au dépôt de poussières au dessus des radiateurs. À bien plus grande échelle, ces mouvements convectifs sont à l'origine, par exemple, de la brise thermique en bord de mer, des mouvements internes au manteau terrestre (Fig. 1b).

Ce montage permet également de mettre en œuvre une technique très utilisée en mécanique des fluides, la "Particle Image Velocimetry" ou PIV.

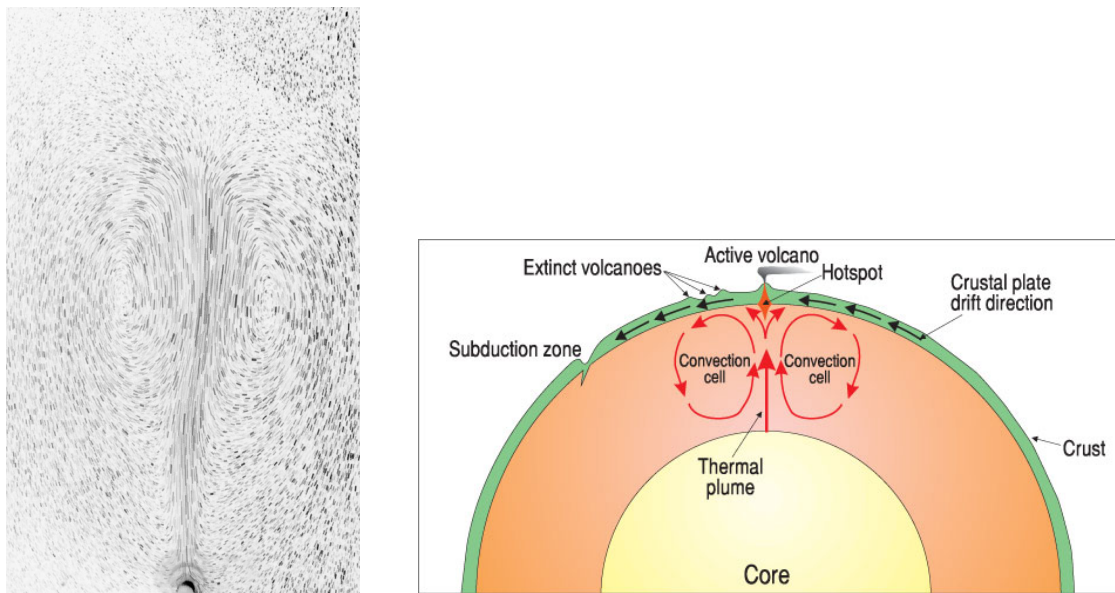


Figure 1: Convection d'un liquide: (a) montage expérimental, (b) manteau terrestre.

Pour réaliser cette expérience de convection, on chauffe un fil métallique par effet Joule, ce fil étant enroulé autour d'un cylindre de plexiglas placé dans la partie inférieure de la cuve. La mesure du courant parcourant le fil et de la tension à ses bornes permet de connaître, en régime permanent, la puissance injectée dans le liquide. On caractérisera d'une part le champ de vitesse par la méthode de PIV et d'autre part la température dans le panache thermique grâce à un thermocouple.

## 1.2 Caractérisation du panache thermique

On cherche à caractériser la structure du panache thermique, c'est-à-dire la distribution de vitesse et de température, et à estimer le flux de chaleur qui est effectivement évacué par le mouvement de convection. On fera cette caractérisation dans deux situations : le panache transitoire qui se forme lorsqu'on commence à alimenter en courant le fil chauffant et le panache établi en régime permanent.

## 1.3 Modèle simplifié de panache thermique

Un modèle extrêmement simplifié permet d'évaluer avec peu de calculs l'ordre de grandeur de la vitesse du fluide qui s'élève dans le panache thermique. On considère que l'écoulement est caractérisé par la vitesse d'ascension  $U$  et par une longueur  $L$  représentative de la largeur du panache (le gradient de vitesse est d'ordre  $U/L$ ). La vitesse d'ascension peut être évaluée en écrivant qu'elle résulte d'un équilibre entre la force de flottabilité et la friction visqueuse ou l'inertie du fluide selon la valeur du nombre de Reynolds,  $Re \sim UL/\nu$ .

La force de flottabilité est de l'ordre de  $\Delta\rho gL^3$ , la variation de masse volumique  $\Delta\rho$  étant liée à la variation de température :  $\Delta\rho = \rho_0\alpha\Delta T$ , où  $\alpha = 1/\rho(\partial\rho/\partial T)$  est le coefficient d'expansion thermique du fluide. Dans le cas de l'eau, ce coefficient est de l'ordre de  $2.5 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ .

-  $Re \ll 1$ , la flottabilité s'équilibre avec la force visqueuse. La contrainte (force par unité de surface) de friction visqueuse est, en ordre de grandeur,  $\eta U/L$ . La force correspondante est donc  $F_v \sim \eta UL$ , ce qui conduit à :

$$U \sim \frac{\alpha\Delta TgL^2}{\nu} \quad (1)$$

-  $Re \gg 1$ , la flottabilité s'équilibre avec la traînée engendrée par l'inertie du fluide. La contrainte inertielle est de l'ordre de  $\rho U^2$ . La traînée s'écrit donc  $F_i \sim \rho U^2 L^2$ , ce qui conduit à :

$$U \sim (\alpha\Delta TgL)^{1/2} \quad (2)$$

À partir de ces modèles très simples, estimez l'ordre de grandeur de  $U$  et comparez avec la vitesse mesurée par PIV..

## 1.4 Un modèle plus avancé de panache thermique

Pour décrire de manière plus précise le panache thermique, il faut écrire l'équation de transport pour la chaleur. Ici deux modes de transport de la chaleur sont mis en jeu : la diffusion moléculaire caractérisée par le coefficient de conduction thermique  $\lambda$  et la convection par l'écoulement. Le flux de chaleur dû à la diffusion est :  $J_D = -\lambda\nabla T$  et le flux de chaleur dû à la convection s'écrit :  $\mathbf{J}_C = \rho C_p \mathbf{u}(T - T_0)$  où  $C_p$  est la chaleur spécifique par unité de masse du fluide et  $T_0$  une température de référence. En présence de convection l'équation de la chaleur devient :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J}_D + \mathbf{J}_C) = 0 \quad (3)$$

soit, en supposant que l'écoulement obéisse toujours à la condition d'incompressibilité  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  (ce qui suppose que les variations locales de masse volumique soient assez petites) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{\lambda}{\rho C_p} \Delta T \quad (4)$$

En régime stationnaire :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T \quad (5)$$

où  $\kappa$  est la diffusivité thermique du fluide.

Le champ de température et le champ de vitesse sont couplés par un terme de "flottabilité" qui apparaît dans l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \alpha g(T - T_0) \quad (6)$$

Le panache thermique a une géométrie particulière, où la composante verticale de vitesse  $u$  est beaucoup plus grande que la composante horizontale  $v$  et où l'échelle de longueur horizontale  $\delta$  est beaucoup plus petite que l'échelle de longueur verticale  $H$ . L'équation de Navier Stokes, en régime stationnaire, devient donc pour la composante verticale  $u$  :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha g(T - T_0) \quad (7)$$

et pour la composante horizontale  $v$  :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (8)$$

et l'équation de la chaleur se réduit à :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (9)$$

Si la variation de température est petite, par conséquent la variation de masse volumique est également petite, on peut considérer que le fluide reste incompressible, le terme de variation de masse volumique n'apparaissant que dans le terme de flottabilité, moteur de l'écoulement (approximation de Boussinesq). Le champ de vitesse obéit alors à l'équation d'incompressibilité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

Si nous définissons des grandeurs caractéristiques  $U, V, P, \Theta, X, \delta$ , pour les composantes de vitesse, la pression, l'écart de température et la largeur du panache, la condition d'incompressibilité donne :  $U/X \sim V/\delta$  ce qui implique que les termes non linéaires  $u\partial v/\partial x$  et  $v\partial v/\partial y$  sont du même ordre de grandeur. L'équation pour la composante  $v$  devient en ordre de grandeur :

$$\frac{UV}{X} \sim \frac{P}{\rho\delta} \sim \nu \frac{V}{\delta^2} \quad (11)$$

d'où l'ordre de grandeur de la pression :  $P \sim \rho U^2 (\delta/X)^2$ .

Dans l'eau le nombre de Prandtl  $Pr = \nu/\kappa$  est grand devant 1 et on peut supposer que la largeur du panache est fixée par la diffusion de la quantité de mouvement plutôt que par

la diffusion de la chaleur. On peut alors écrire, comme lorsque l'on cherche l'épaisseur d'une couche limite classique :

$$\frac{U\delta^2}{\nu X} \sim 1 \quad (12)$$

soit :

$$\frac{U\delta}{\nu} \sim \frac{X}{\delta} \quad \text{et} \quad \frac{V\delta}{\nu} \sim 1 \quad (13)$$

Si on fait le même type d'analyse dimensionnelle pour l'équation sur la composante verticale de vitesse, on obtient les ordres de grandeur suivants pour les différents termes :

$$\frac{U^2}{X} \quad \frac{U^2}{X} \left(\frac{\delta}{X}\right)^2 \quad \nu \frac{U}{\delta^2} \quad \alpha g \Theta \quad (14)$$

Le terme de flottabilité  $\alpha g \Theta$  est donc du même ordre de grandeur que  $U^2/X$ .

Pour compléter l'analyse dimensionnelle, il faut encore examiner l'équation de transport de la chaleur et prendre en compte le bilan global d'échange de chaleur (la chaleur injectée au niveau de la source chaude est intégralement transportée par la panache thermique). Le nombre de Prandtl étant grand devant 1, la diffusion de la chaleur est moins rapide que la diffusion de la quantité de mouvement et il faut considérer une largeur  $\delta_T$  de la distribution de température différente de  $\delta$ . Dimensionnellement, l'équation de transport de la chaleur s'écrit donc :

$$\frac{U\Theta}{X} \sim \kappa \frac{\Theta}{\delta_T^2} \quad (15)$$

Enfin le bilan d'énergie sur le panache s'écrit :  $\rho C_p \int_{-\infty}^{\infty} u(T - T_0) dx = Q$  où  $Q$  est la quantité de chaleur injectée par unité de temps et par unité de longueur dans la 3<sup>e</sup> direction ( $z$ ). Soit, en ordre de grandeur :  $U\Theta\delta_T \sim Q/\rho C_p$ .

En combinant les différents ordres de grandeur obtenus, on peut écrire des lois d'échelle pour la vitesse verticale dans la panache, la largeur de celui-ci et l'élévation de température en fonction de la position verticale  $X$  :

$$U \sim \left(\frac{Q}{\rho C_p} \alpha g\right)^{2/5} \kappa^{-1/5} X^{1/5} \quad (16)$$

$$\delta \sim \left(\frac{Q}{\rho C_p} \alpha g\right)^{-1/5} \nu^{1/2} \kappa^{1/10} X^{2/5} \quad \text{et} \quad \delta_T \sim \left(\frac{Q}{\rho C_p} \alpha g\right)^{-1/5} \kappa^{3/5} X^{2/5} \quad (17)$$

$$\Theta \sim \left(\frac{Q}{\rho C_p}\right)^{4/5} (\alpha g)^{-1/5} \kappa^{-2/5} X^{-3/5} \quad (18)$$

## 2 Particle Image Velocimetry (PIV)

D'une manière générale, la technique de PIV consiste à suivre le mouvement de traceurs dispersés dans le fluide, selon une vision *lagrangienne* de l'écoulement. Plusieurs conditions sont requises pour réaliser avec succès ce type de mesure:

- les particules doivent suivre fidèlement le mouvement du fluide ; on choisira donc de petites particules (pour limiter leur inertie) d'une densité voisine de celle du liquide (pour éviter leur sédimentation).

- la présence de traceurs ne doit pas altérer l'écoulement du fluide ; les traceurs seront utilisés à faible concentration.

- les traceurs doivent être détectables ; on choisira des particules d'un indice optique contrasté par rapport à celui du fluide.

Les traceurs choisis pour cette expérience sont des particules de nylon d'une taille inférieure à  $100\mu m$ . Légèrement plus denses que l'eau, elles ont tendance à sédimenter lentement. Il faudra donc les remettre en suspension de temps en temps en agitant le liquide.

### 2.1 Technique de PIV

Le mouvement des traceurs est enregistré grâce à une caméra digitale. On cherche alors à mesurer le déplacement en comparant deux images successives. La détermination du champ de déplacement (et donc de vitesse) s'effectue en calculant la corrélation entre deux portions d'images successives. On effectuera ce traitement dans Matlab grâce au module PIVLAB . Le principe est le suivant: deux images successives sont découpées en portions identiques et la fonction de corrélation entre deux portions successives est déterminée. Le décalage du pic de corrélation par rapport au centre indique le déplacement des particules (Fig. 2).

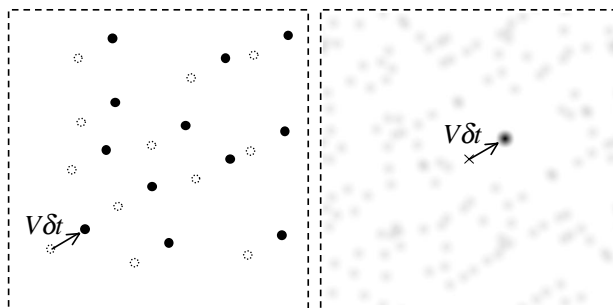


Figure 2: Principe de la mesure. (a) mouvement des traceurs entre deux images, (b) corrélation entre deux images successives

#### 2.1.1 Acquisition des images

Pour acquérir la séquence d'images, on utilise le mode vidéo d'un réflex numérique. Les réglages décrits ici sont valables pour un Nikon D3100 avec un objectif de macrophotographie 2,8/60 mm.

- régler la sensibilité à 100 ISO
- mettre l'appareil en mode A (priorité à l'ouverture)

- régler l'objectif à son ouverture maximale ( $f/2,8$  ou  $f/3$ ) pour minimiser la profondeur de champ
- régler la correction d'exposition sur  $-3$  à  $-5$  IL de façon à avoir un temps de pose de l'ordre de  $1/100^{\text{e}}$  de s.
- vérifier que le format vidéo sélectionné est HD 1920x1080 pixels à 24 images/s

Faire la mise au point (en mode manuel) sur les particules éclairées.

Pour transformer la vidéo au format MOV en suite d'images utiliser QuickTime Player. Exporter la vidéo sous forme de séquence d'images au format JPG, à 24 images/s. Spécifier une compression optimale et une sauvegarde en niveaux de gris.

### 2.1.2 Analyses des images

Les images sont analysées à l'aide d'un programme Matlab (PIVlab\_GUI) dont le mode opératoire est fourni dans un document qui vous trouverez sur la table du TP. Il faut sauvegarder les données dans un fichier texte (File/Save/ASCII File (x,y,u,v,vort)) qu'on relira ensuite avec un second programme (panache2019.m) permettant d'analyser le champ de vitesse du panache.

## 3 Mesure de température

Un thermocouple est placé dans la cuve. On peut le déplacer verticalement et horizontalement pour estimer les profils de température à travers le panache. Cette mesure étant assez intrusive, il faut placer le thermocouple sur le côté de la cuve lorsqu'on effectue les mesures de vitesse par PIV.

## 4 Ce qu'il faut faire

*A partir du champ de vitesse obtenu par PIV, mesurez l'évolution de  $\delta$  et  $U$  en fonction de la position verticale pour plusieurs puissances. Pour chaque condition de puissance, comparez les évolutions de la vitesse caractéristique et de la largeur du panache en fonction de  $X$  avec celles prédites respectivement par les équations 16 et 17 à l'aide du programme panache2019.m. Tracez ensuite l'évolution des préfacteurs des lois d'échelle en  $X$  en fonction de la puissance. Comment interprétez-vous ces évolutions ?*

*A l'aide du thermocouple, réalisez un profil de température le long de la direction horizontale à une distance d'environ 5-10 mm de la source de chaleur pour la puissance maximale. Comparez ce profil à celui de la vitesse et commentez.*