
Instabilités dans les matériaux micro-hétérogènes

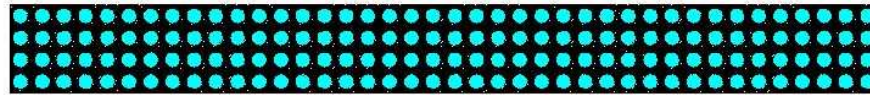
Michel POTIER-FERRY

Collaborateurs:

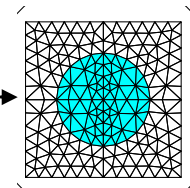
- Saied NEZAMADI, Hamid ZAHROUNI (Metz)
- Julien YVONNET (Paris-Est)
- Nouredine DAMIL (Casablanca)
- Heng HU (Wuhan)

Homogénéisation / analyse multi-échelles

Structure hétérogène



remplacée par



Macrostructure homogène couplée à

des microstructures
hétérogène

Homogénéisation: comment résoudre les EDP au niveau local?

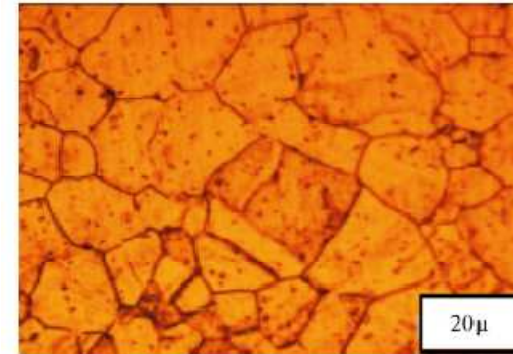
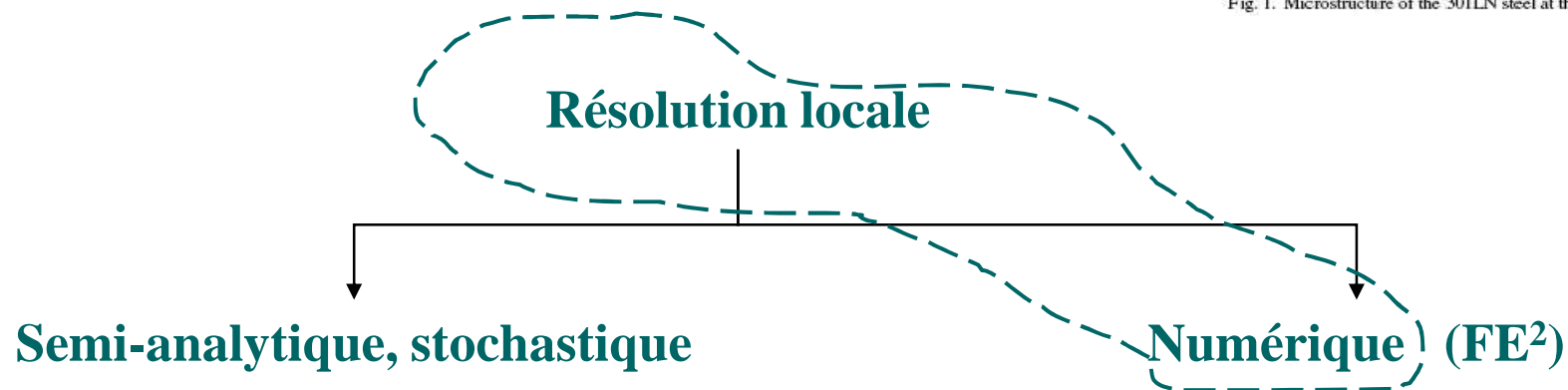


Fig. 1. Microstructure of the 301LN steel at the initial state.



Berveiller, Molinari, Canova, Ahzi, Lipinski, Toth, Sabar, Cherkaoui, Berbenni, ...

Kröner, Eshelby, Hill, Mandel, Nemat-Nasser, Hori, Zaoui, Willis, Hutchinson, Ponte Castañeda, Suquet, Forest, ...

Smit, Terada, Miehe, Feyel, Geers, Kouznetsova, ...

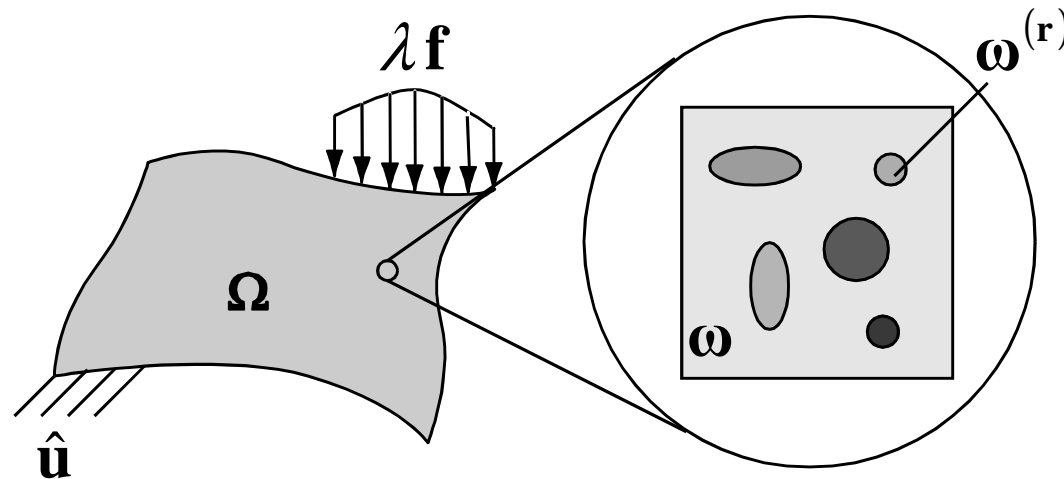
Sanchez-Palencia, Lions, Duvaut, Suquet, Léné...

Homogénéisation: les « éléments finis au carré » (FE²)

Smit et al. 1998, Feyel 2000-2003, Nezamabadi et al. 2009.

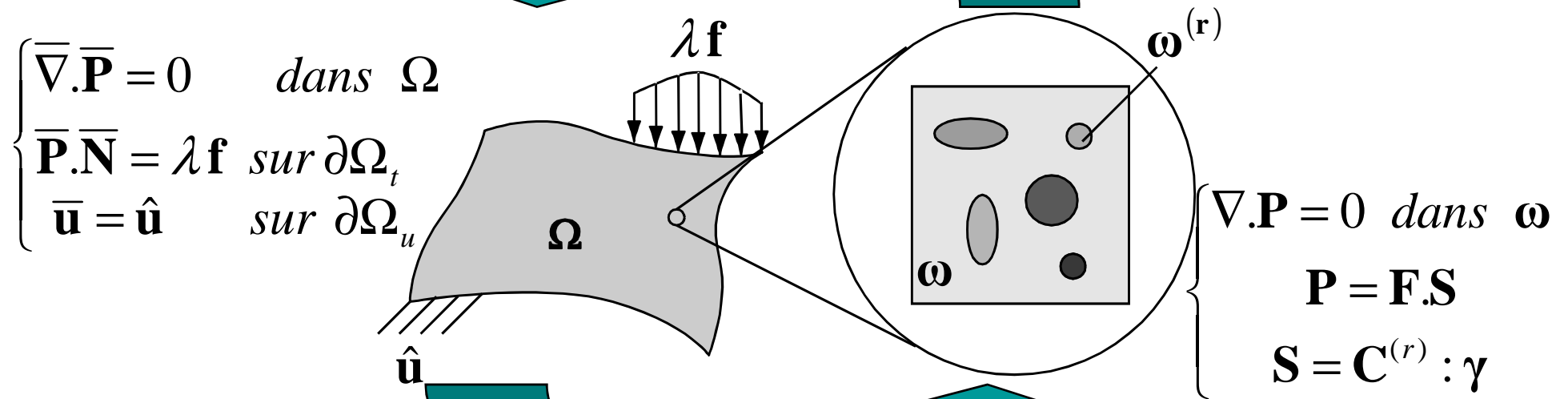
Principe:

- Homogénéisation = deux problèmes d'EDP couplés
- Chaque EDP est résolue par éléments finis



Définition du problème multi échelle (cas hyperélastique)

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbf{P} d\omega$$



Pas de loi de comportement au niveau macro

$$u = \bar{\nabla} u \cdot \bar{X} + w, \quad w \in V_{per}$$

Résolution du problème micro

Résumé du problème microscopique

(élasticité non linéaire avec loi de comportement linéaire)

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\omega} {}^t \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} d\omega = 0 \\ \mathbf{S} = \mathbf{C}^{(r)} : \boldsymbol{\gamma} \\ \mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \\ \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2} ({}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ \mathbf{F} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I} \end{array} \right. \quad \text{dans } \omega$$
$$\mathbf{u} - \overline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{X} \in \mathcal{V}_{per}$$

Résolution du problème micro (MAN)

Dérivées à l'ordre p des équations non-linéaires $x_p = \frac{1}{p!} \frac{d^p x}{da^p} :$

D'où un système linéaire dépendant de la donnée macroscopique $\bar{\mathbf{F}}_p$ (résolu par EF) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\omega} {}^t \mathbf{P}_p : \delta \mathbf{F} d\omega = 0 \\ \mathbf{S}_p = \mathbf{C}^{(r)} : \boldsymbol{\gamma}_p \\ \mathbf{P}_p = \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{S}_p + \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{S}_0 + \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{S}_{p-r} \\ \boldsymbol{\gamma}_p = \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{F}_p + {}^t \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{F}_0 + \sum_{r=1}^{p-1} {}^t \mathbf{F}_r \cdot \mathbf{F}_{p-r} \right) \\ \mathbf{F}_p = \nabla \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_p - \bar{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{X} \in \mathcal{V}_{per} \end{array} \right.$$

Décomposable en 5 problèmes linéaires (10 en 3D)

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{A}(\mathbf{X}) : \bar{\mathbf{F}}_p(\bar{\mathbf{X}}) + \mathbf{u}_p^{nl}$$

Tenseur de localisation $\mathbf{A}(\mathbf{X})$

Formulation du problème micro-macro

Puis localisation des contraintes:

$$\mathbf{P}_p = \mathbf{L}(\mathbf{X}) : \bar{\mathbf{F}}_p(\bar{\mathbf{X}}) + \mathbf{P}_p^{nl}$$

La moyenne donne la loi de comportement macroscopique (à l'ordre p):

$$\bar{\mathbf{P}}_p = \langle \mathbf{L} \rangle : \bar{\mathbf{F}}_p + \langle \mathbf{P}_p^{nl} \rangle$$

$\langle \mathbf{L} \rangle$ est le tenseur de comportement macro (tangent).

Problème macroscopique à l'ordre p (résolu par EF):

$$\int_{\Omega} {}^t \bar{\mathbf{P}}_p : \delta \bar{\mathbf{F}} d\Omega = \lambda_p \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} d\Gamma$$



$$\int_{\Omega} {}^t \bar{\mathbf{F}}_p : \langle \mathbf{L} \rangle : \delta \bar{\mathbf{F}} d\Omega = \lambda_p \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f} \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{\Omega} {}^t \langle \mathbf{P}_p^{nl} \rangle : \delta \bar{\mathbf{F}} d\Omega$$

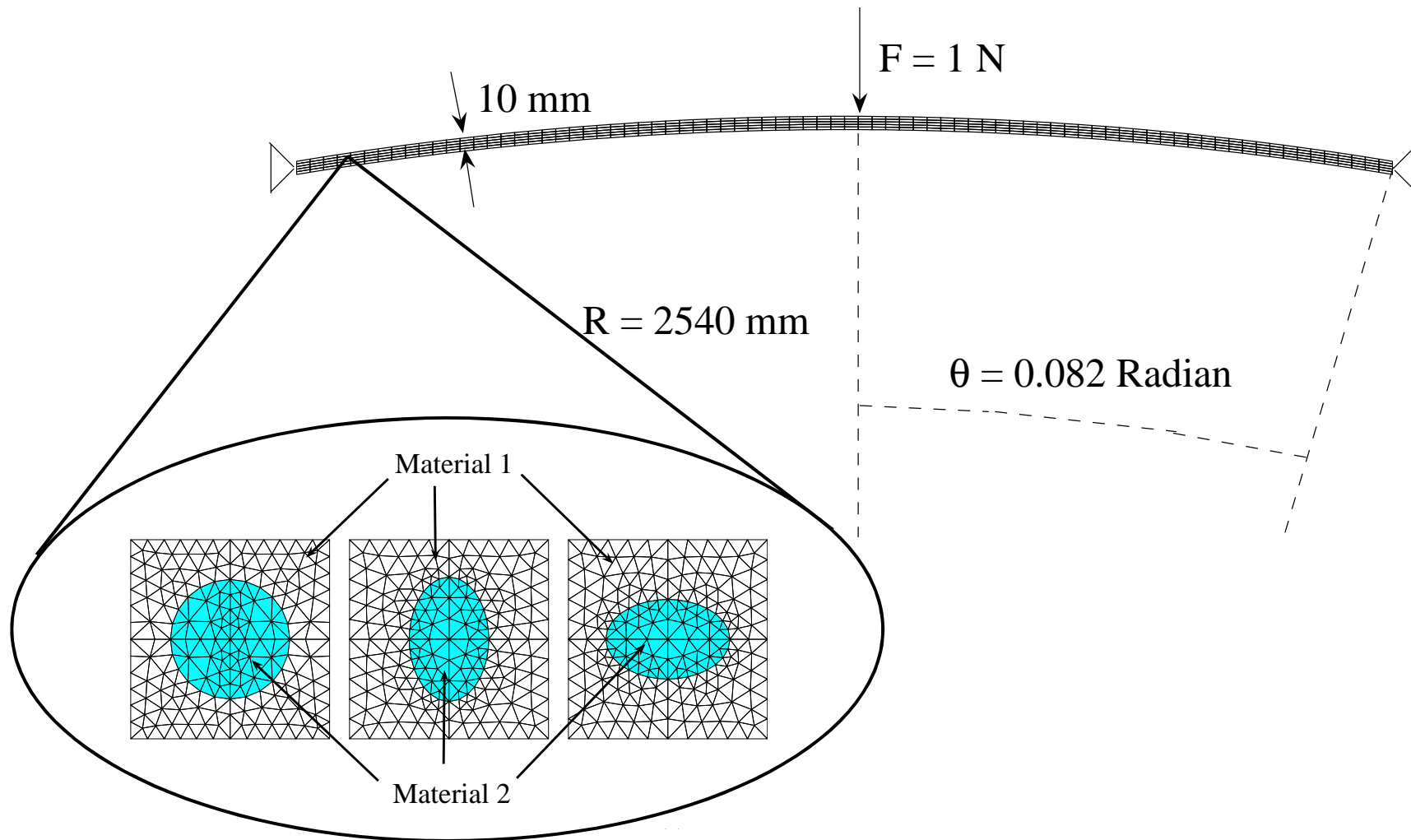
Quid de l'homogénéisation pour lorsqu'il y a une instabilité locale?

Triantafyllidis, Maker (1985, ...): un flambage micro est associé à une perte d'ellipticité du problème macro (appelée « instabilité macroscopique »)

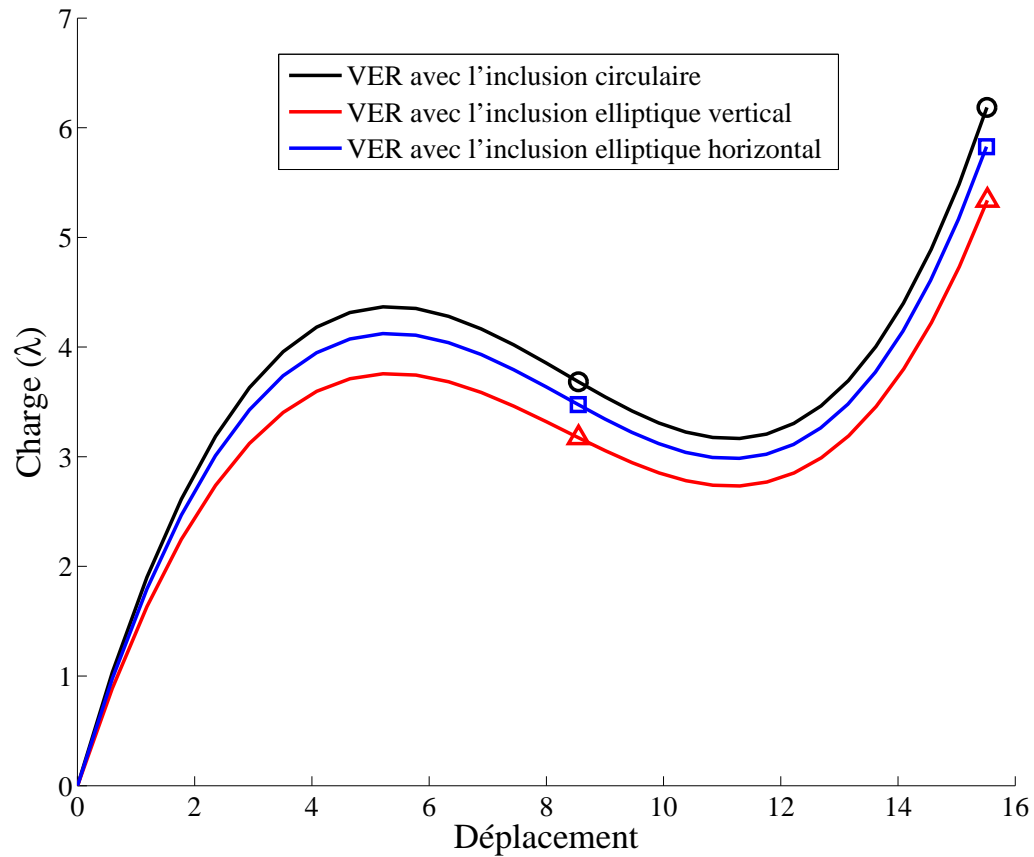
Muller, Geymonat, Triantafyllidis (1993): longueur d'ondes d'instabilité = une ou plusieurs cellules de base

Miehe et al. (2002): un principe du minimum d'énergie potentielle de la macrostructure et un principe du minimum d'énergie potentielle moyenne de la microstructure.

Application 1: Flambage global d'un toit

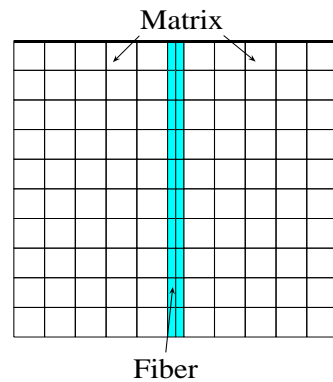
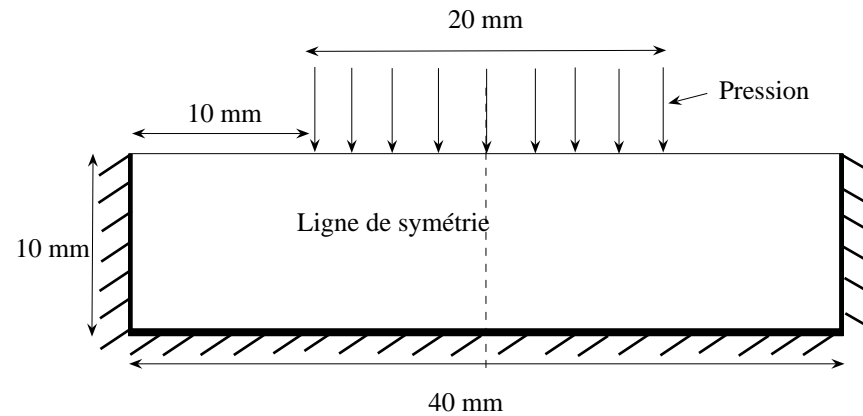


Application 1: Flambage global d'un toit



$$E_2/E_1=10$$

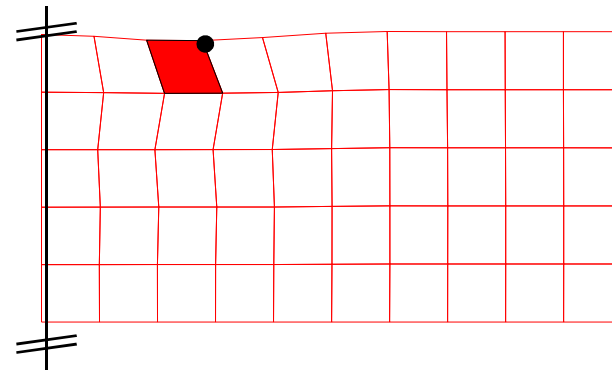
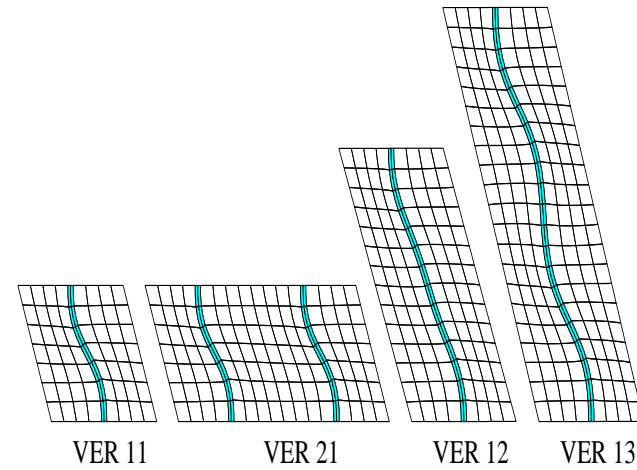
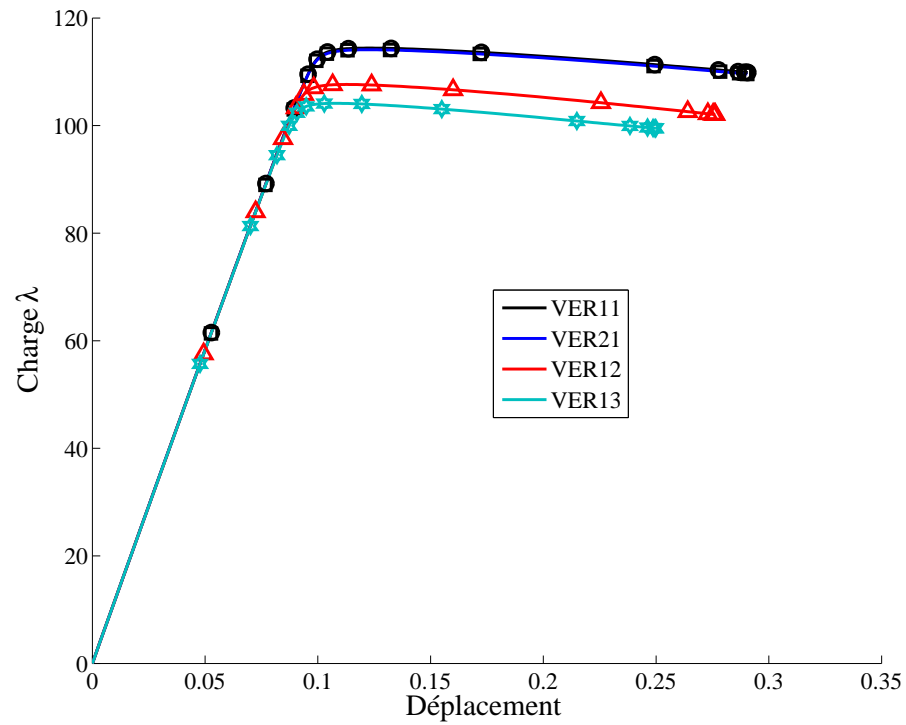
2) Micro-flambage élastique d'un composite



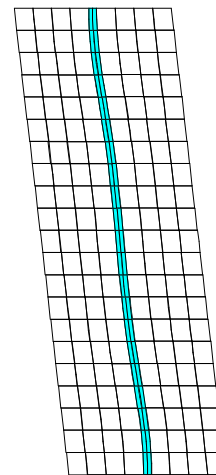
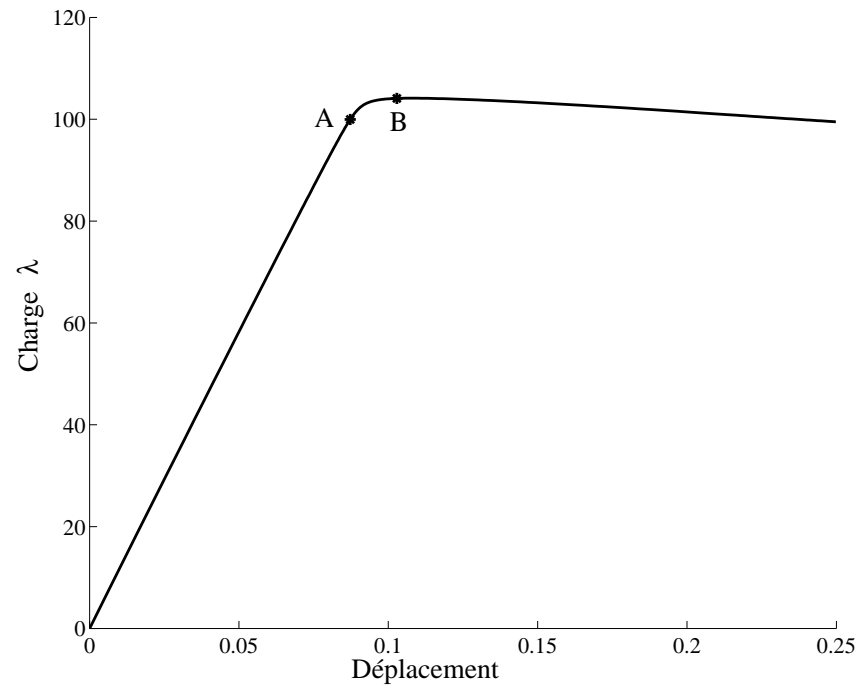
Différents VER sont construits à partir de la cellule élémentaire.

Cellule élémentaire $E_{Fibre} / E_{Matrice} = 1000$)

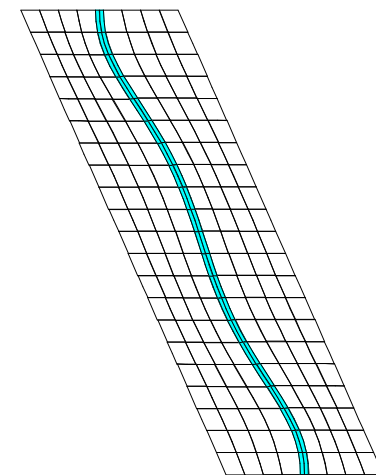
2) Micro-flambage élastique d'un composite



2) Micro-flambage élastique d'un composite

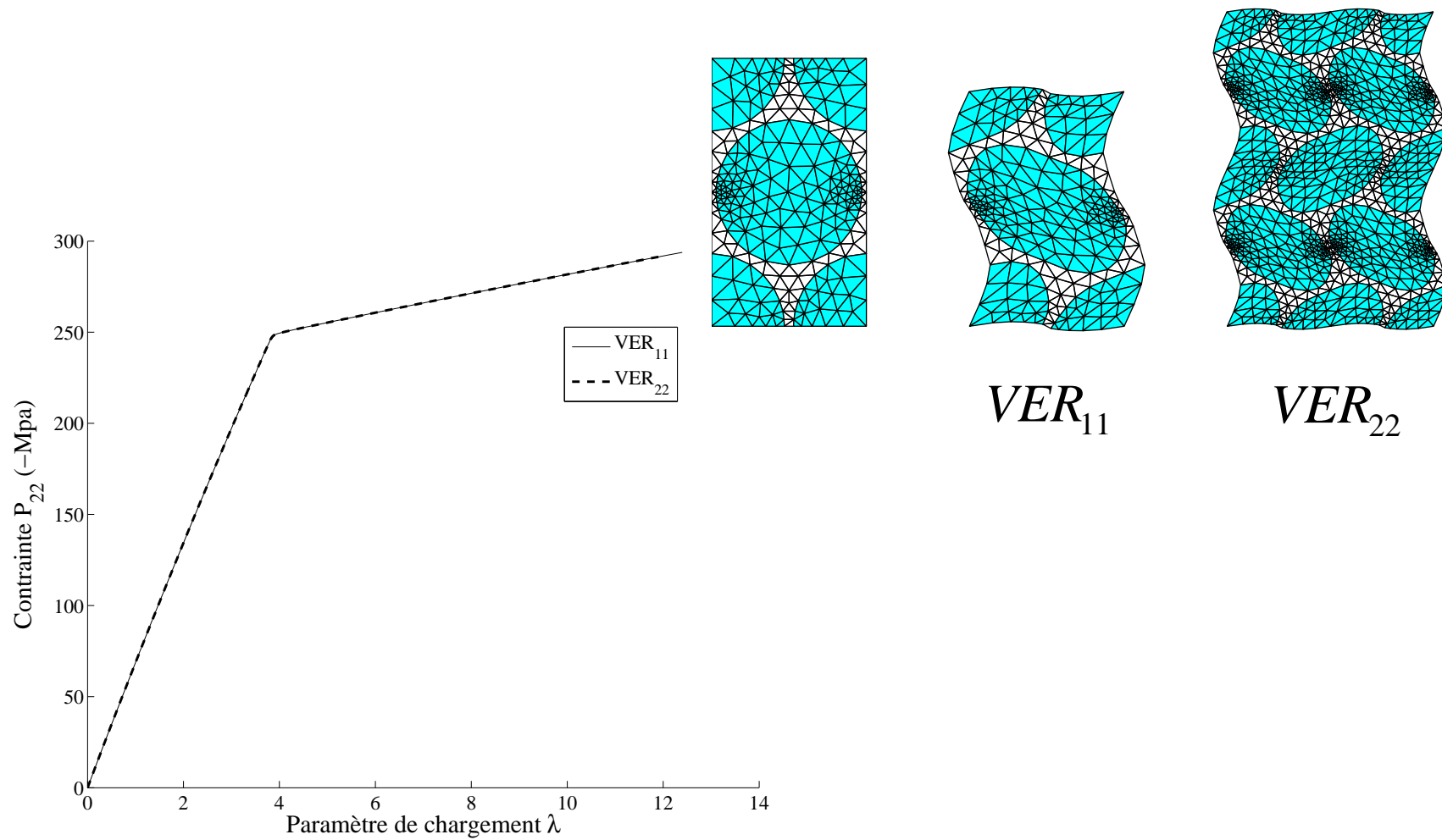


Point A

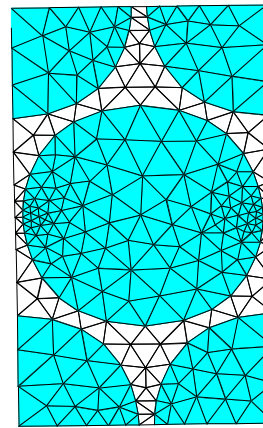
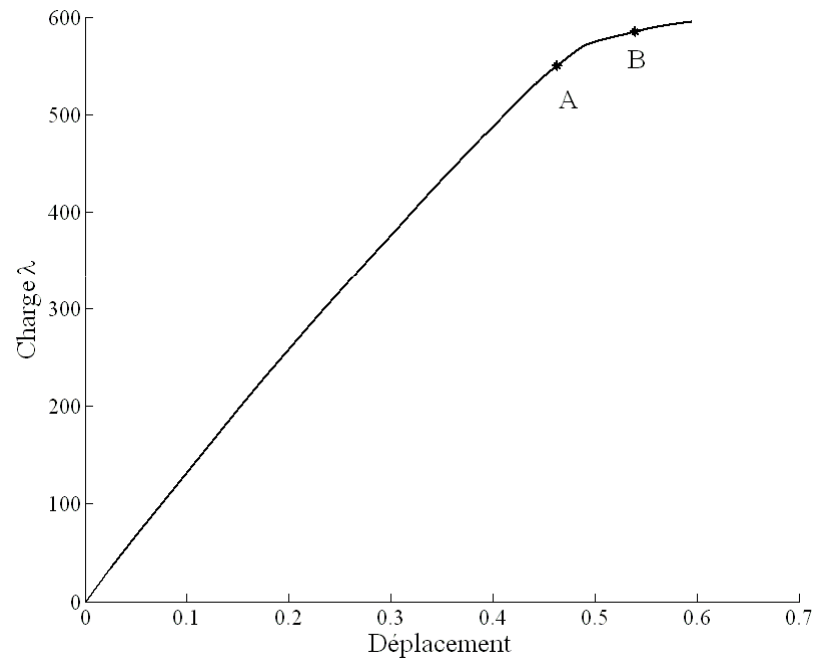


Point B

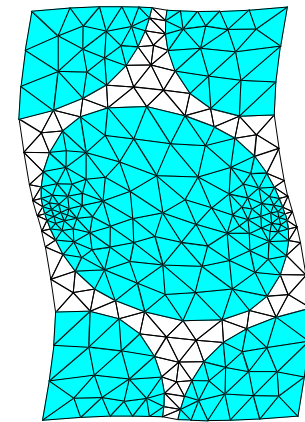
2) Micro-flambage élastique d'un composite



2) Micro-flambage élastique d'un composite



Point A



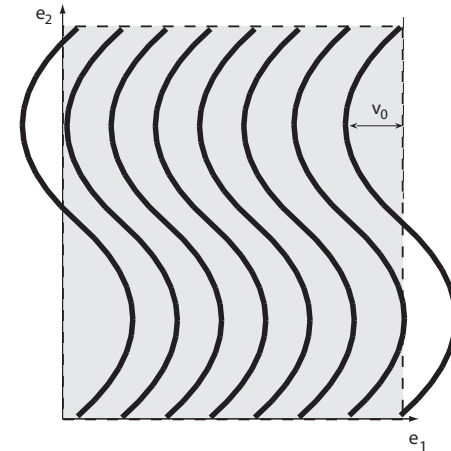
Point B

3) Micro-flambage plastique d'un composite

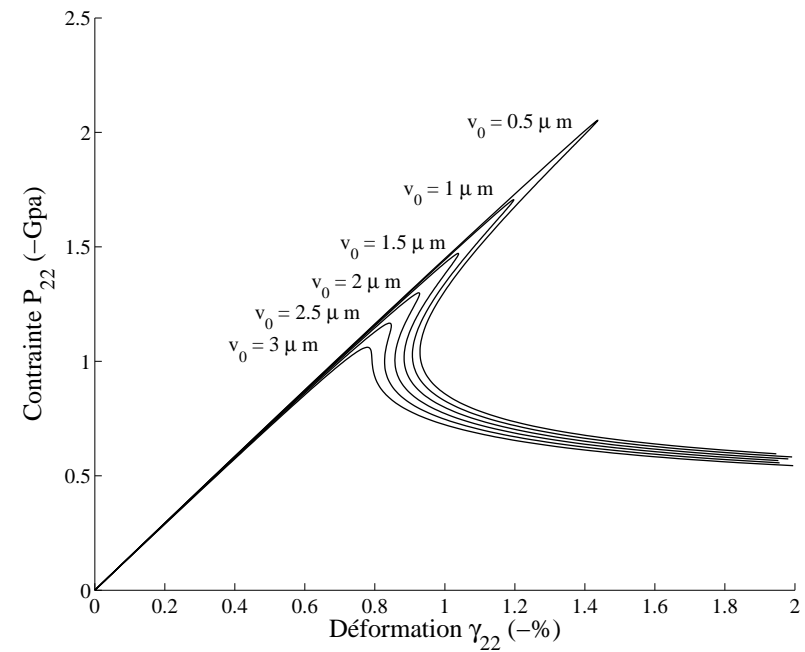
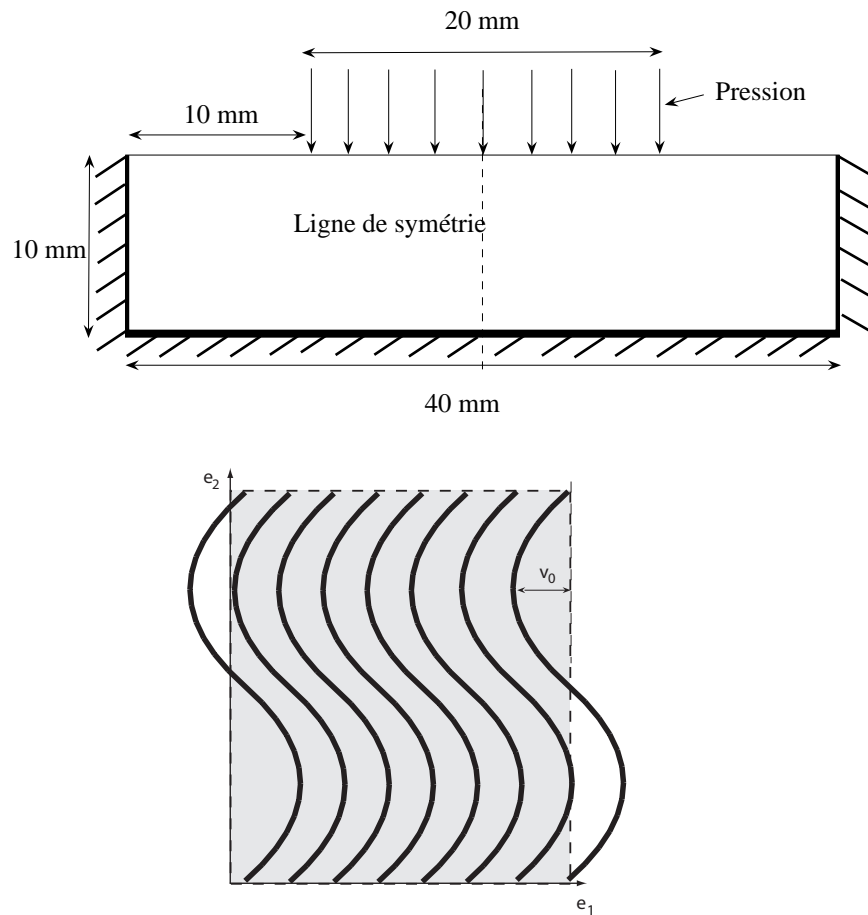
Deux conditions pour une prévision réaliste de la rupture en compression des composites à fibres longues (Budiansky, 1983, Grandidier, Drapier, 1992-2001, ...)

- *Prise en compte de la réponse non-linéaire de la matrice (ici, théorie de déformation totale)*
- *Désalignement des fibres*

$$E \boldsymbol{\varepsilon} = (1 + \nu) \boldsymbol{\sigma}^d - (1 - 2\nu) P \mathbf{I} + \frac{3}{2} \alpha \left[\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y} \right]^{n-1} \boldsymbol{\sigma}^d$$

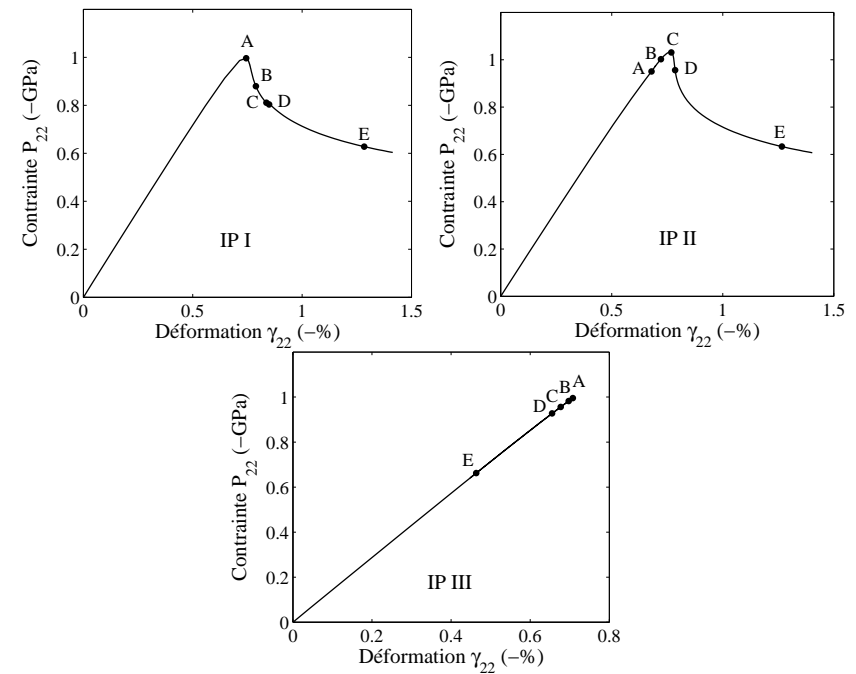
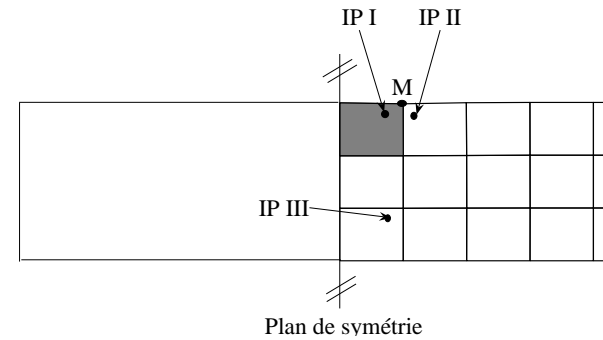
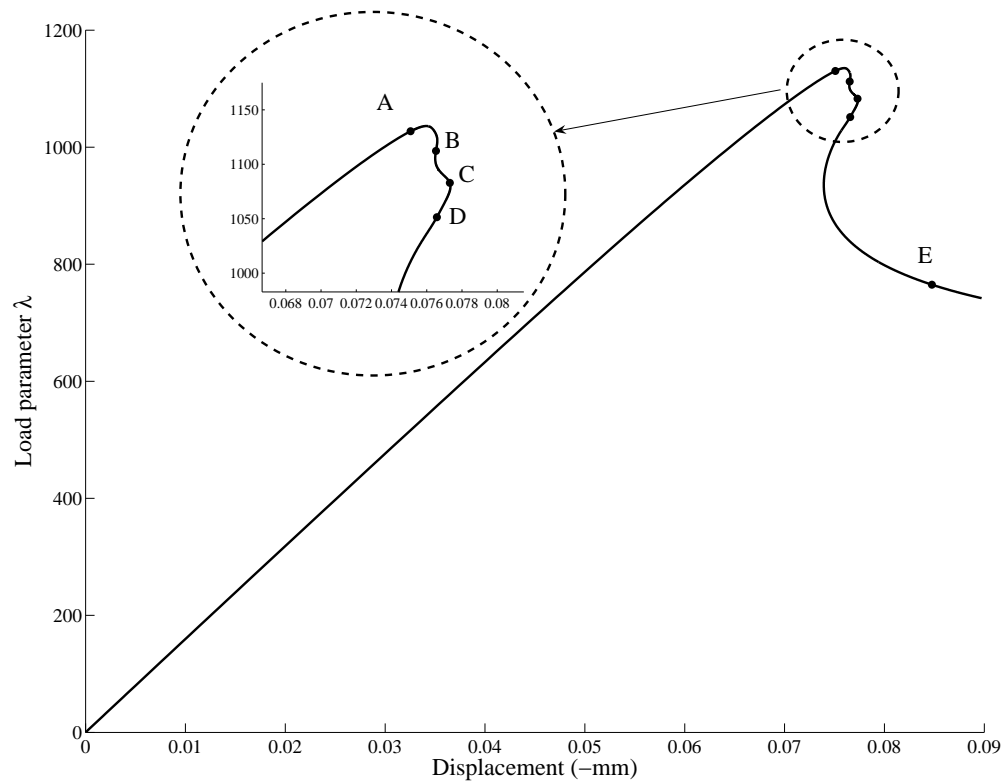


3) Micro-flambage plastique d'un composite

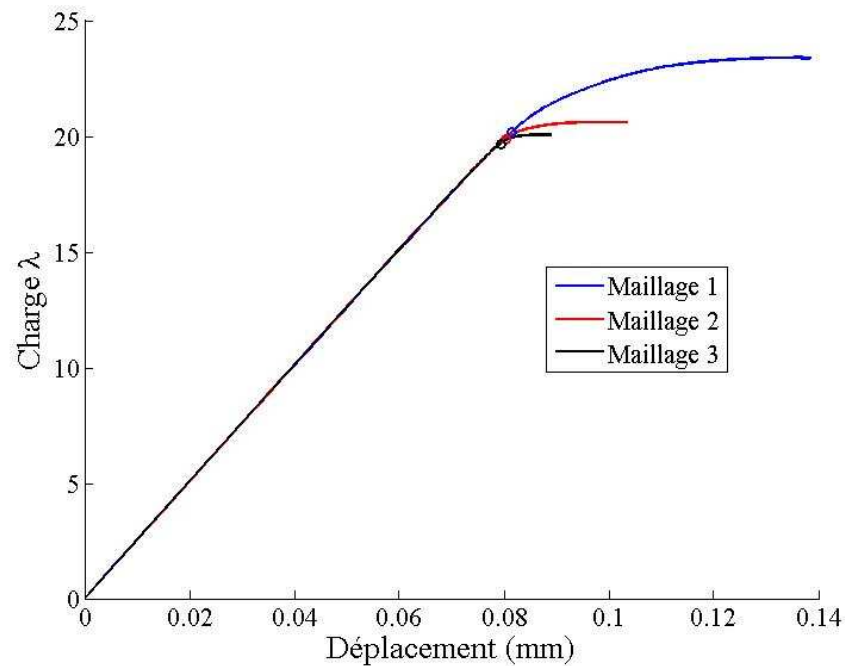


Nezamabadi et al. 2010, IJMCE

3) Micro-flambage plastique d'un composite



4) Le problème macroscopique n'est pas bien posé



Nezamabadi et al, en progrès

- Perte d'ellipticité du modèle macroscopique
- Sensibilité au maillage au delà

4) Une solution: l'homogénéisation du second ordre?

- Transformer le problème macroscopique en milieu continu à longueur interne (Cosserat, second gradient...)
- Homogénéisation premier gradient → second gradient (Kousnetzova et al. 2002 et 2004).

Au niveau micro, on se donne une déformée quadratique sur le bord:

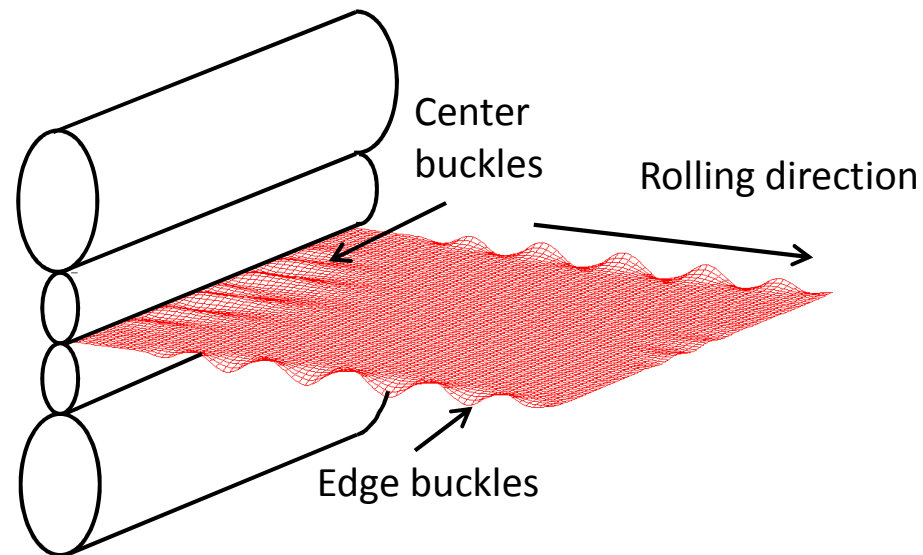
$$\Delta \mathbf{x} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \Delta \mathbf{X} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{X} \cdot \bar{\mathbf{G}} \cdot \Delta \mathbf{X} + \Delta \mathbf{w} \quad \text{sur } \partial \omega \quad \bar{\mathbf{G}} = \nabla \bar{\mathbf{F}}$$

Passage micro-macro en contraintes (condition de Hill-Mandel):

$${}^t \bar{\mathbf{P}} : \delta \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{Q}} : \delta \bar{\mathbf{G}} = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} {}^t \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} d\omega \quad \text{où:} \quad \bar{\mathbf{Q}} = \frac{1}{2|\omega|} \int_{\omega} ({}^t \mathbf{P} \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{P}) d\omega$$

Approches de type Landau-Ginzburg ?

- Peut-on penser les analyses de bifurcation de type Landau-Ginzburg en termes d'homogénéisation?
- Une première approche: méthode de Fourier à deux échelles (Damil, MPF CR Méca 2006, JMPS 2010)



Approches de type Landau-Ginzburg

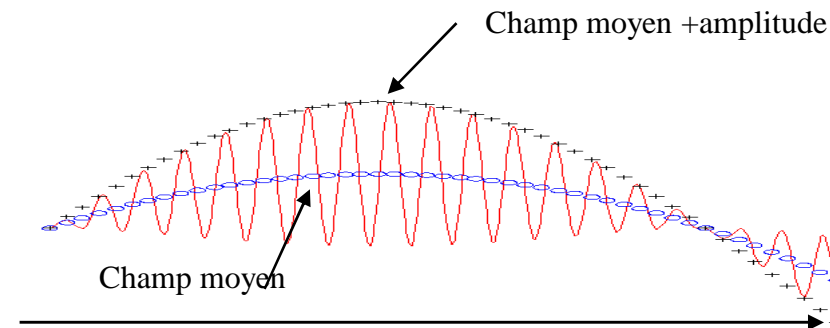
Exemple: poutre élastique non linéaire (modèle de Von Karman)

$$\frac{dn}{dx} + f = 0$$

$$\frac{n}{ES} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2$$

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{d}{dx} \left(n \frac{dv}{dx} \right) - g = 0, \quad -g(v) = Cv + C_3 v^3$$

Approches de type Landau-Ginzburg



- Principe de la méthode: faire un développement en **séries de Fourier à coefficients lentement variables**

$$U(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} U_j(x) e^{jiqx}.$$

- Les enveloppes $U_j(x)$ varient plus lentement que les sinusoides

Approches de type Landau-Ginzburg

- **Modèle pour le champ moyen** (harmonique 0), cas tronqué à l'harmonique 1

$$\frac{dn_0}{dx} + f = 0$$

$$\frac{n_0}{ES} = \frac{du_0}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv_0}{dx} \right)^2 + \left| \frac{dv_1}{dx} + iqv_1 \right|^2$$

- **Couplage entre champ moyen et fluctuation:**

$$n_0 = \langle n(x) \rangle, \quad v_1 = \langle v(x) e^{-iqx} \rangle$$

- **La contrainte macroscopique ne se réduit pas à la moyenne:** $n_k = \langle n(x) e^{-ikqx} \rangle, k = 0, 1, 2, \dots$

Quelques questions

- Une synthèse entre les deux approches, homogénéisation et Landau Ginzburg?
- Approche Landau Ginzburg dans le cas hétérogène?
- La meilleure façon de traiter les pertes d'ellipticité?
- Plus généralement, poser les problèmes de stabilité multi-échelles dans un cadre clair et net?
- Traitement des conditions aux limites pour l'approche LG?

Ce sera tout pour aujourd'hui

Merci de votre attention