Stabilité - Bifurcation en plasticité et en rupture

C. Stolz

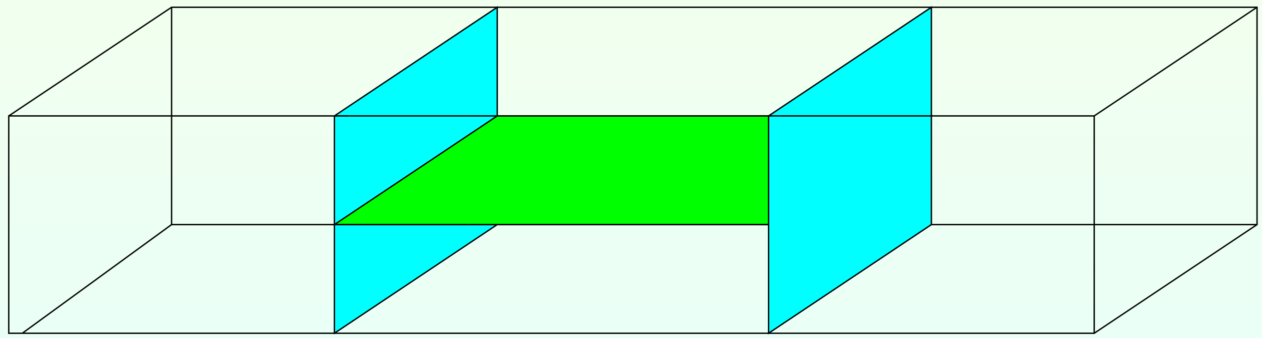
LMS, UMR7649, Ecole polytechnique,

LAMSID, UMR2832, EdF R&D Clamart.

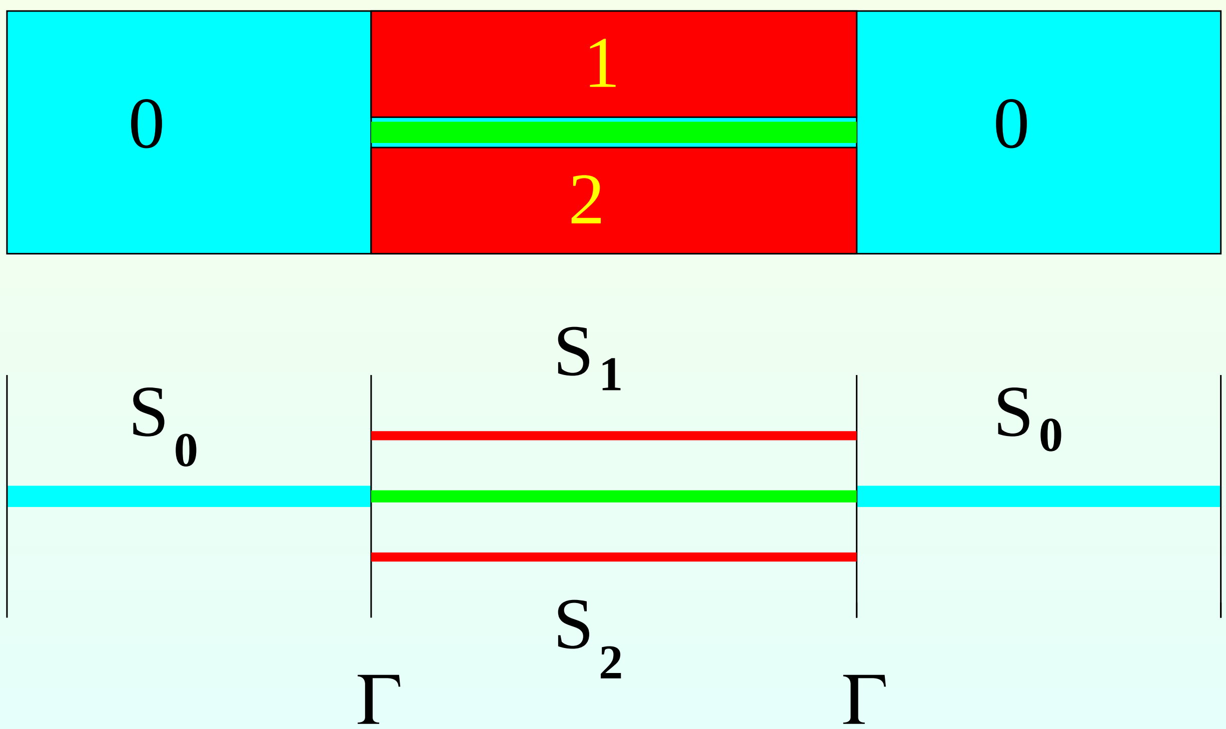
1 Exemples en plasticité et rupture

- Systèmes à n ddl
- Systèmes continus
- Conlusion

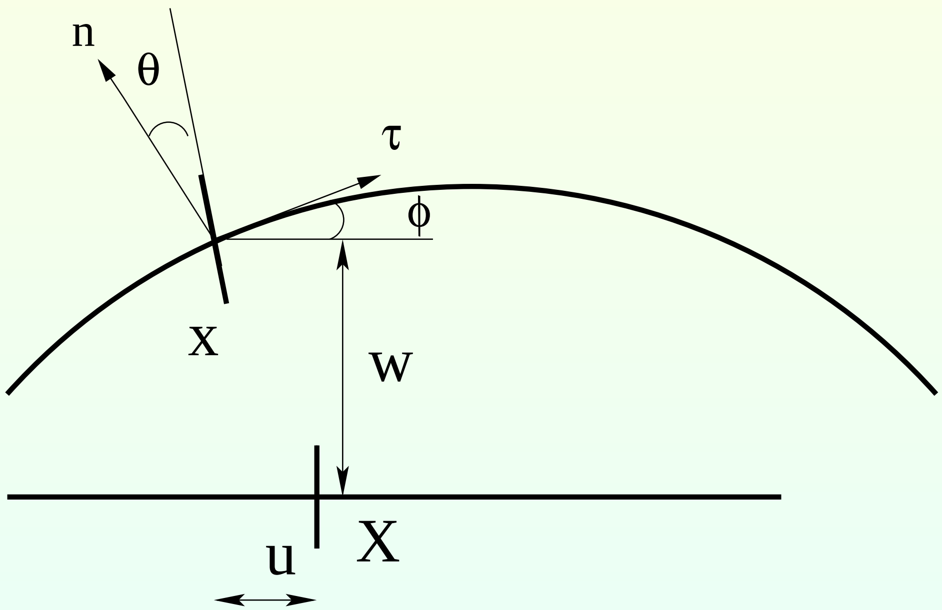
Modèle rupture simplifié



Modélisation simplifiée



Cinématique



Déplacement :

$$\underline{u}_i = u_i(x)\underline{e}_x + w_i(x)\underline{e}_y - y\theta_i(x)\underline{e}_x$$

Déformation

- déformation :

$$\varepsilon_{xx} = u'(x) - y\theta'$$

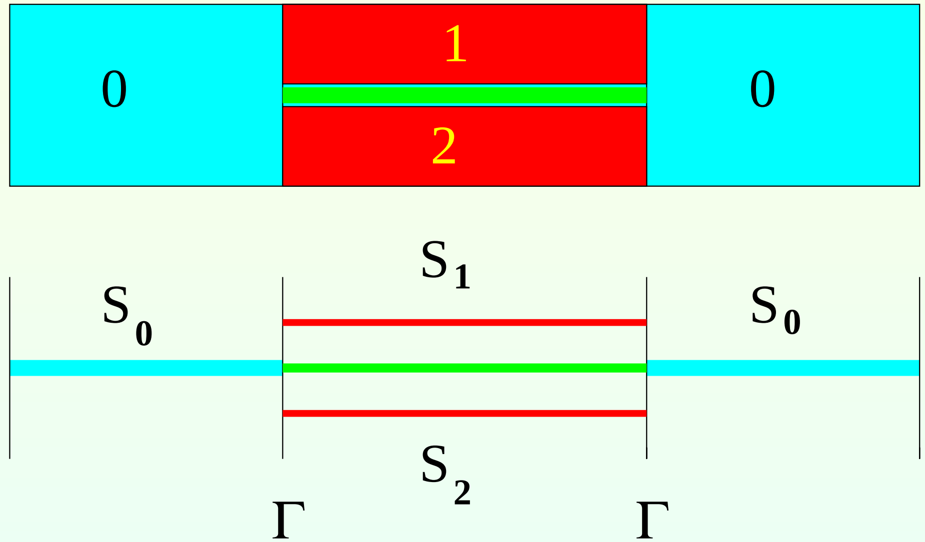
- distorsion

$$\varepsilon_{xy} = w_i' - \theta_i = \gamma$$

- Rotation des sections droites

$$\kappa_i = \theta_i'$$

Aspect cinématique : continuité



$$\underline{u}_i = \underline{u}_o + h_i \theta_o$$

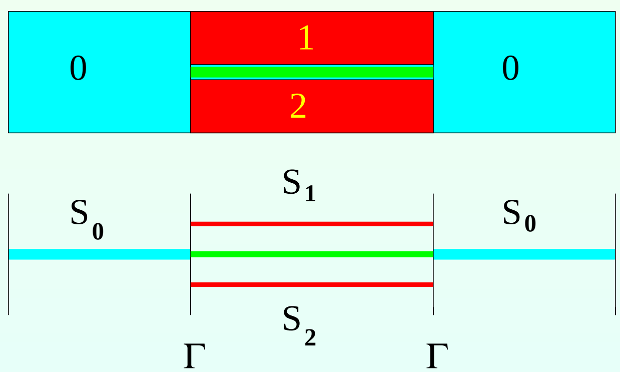
$$w_i = w_o, \quad \underline{\theta}_i = \underline{\theta}_o$$

Modèle de Bernoulli

$$\gamma = 0, \theta = w'$$

$$N = ESu', \quad M = EIw"$$

Déplacement U imposé en $x = 0$, encastrement aux extrêmités



Cas de poutres identiques collées

Déplacement imposé en 0, $-l_1 \leq x \leq l_2$

Energie

$$W(l_1, l_2; U) = \frac{3}{2} EIU^2 (\frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2})^3$$

Dissipation et Discussion du problème d’évolution

Dissipation ($Puis_e = R\dot{U} = \dfrac{\partial W}{\partial U}\dot{U}$)

$$D_m = Puis_e - \frac{d}{dt}W = \mathcal{G}_1\dot{l}_1 + \mathcal{G}_2\dot{l}_2 \geq 0$$

Taux de restitution d'énergie

$$\mathcal{G}_i = -\frac{\partial W}{\partial l_i}$$

Critère

$$\mathcal{G}_i - G_c \leq 0, \quad \dot{l}_i \geq 0, \quad \dot{l}_i(\mathcal{G}_i - G_c) = 0$$

Loi d'évolution : déterminer $\dot{l}_i$.

Critère

$$\mathcal{G}_i - G_c \leq 0, \quad \dot{l}_i \geq 0, \quad \dot{l}_i(\mathcal{G}_i - G_c) = 0$$

Ainsi, si $\mathcal{G}_i = G_c$ alors $\dot{G}_i \leq 0$ et

$$\dot{l}_i \dot{\mathcal{G}}_i = 0$$

$\forall \beta_i \geq 0, \ i/\mathcal{G}_i = G_c, \quad \beta_i = 0$ sinon

$$\sum_i (\dot{l}_i - \beta_i)\dot{\mathcal{G}}_i \geq 0$$

$$-\dot{\mathcal{G}}_i = \boxed{\frac{\partial^2 W}{\partial l_i \partial l_j}\dot{l}_j} + \frac{\partial^2 W}{\partial l_i \partial U}\dot{U}$$

alors :

$$(\dot{l}_1 - \beta_1, \dot{l}_2 - \beta_2).[\boxed{W"}.(\dot{l}_1, \dot{l}_2) + T.\dot{U}] \leq 0$$

L'unicité dépend de $W"(l_1, l_2; U)$

$$W'' = 18EIU^2 \frac{l_1 + l_2}{l_1^5 l_2^5} \begin{vmatrix} l_2^3(l_1 + 2l_2) & (l_1 l_2)^2 \\ (l_1 l_2)^2 & l_1^3(2l_1 + l_2) \end{vmatrix}$$

Toujours positif pour $l_1 = l_2$.

Unicité et stabilité

Force imposée

$$W = -F^2/k, k = (\frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2})^3$$

perte de positivité.

bifurcation.

$$W(\underline{q}, \lambda);\ \underline{Q} = -\frac{\partial W}{\partial \underline{q}}$$

Loi de normalité

$$f_i = f_i(Q_i) \leq 0, \mu_i \geq 0, \mu_i f_i = 0$$

$$\dot{q}_i = \mu_i \frac{\partial f_i}{\partial Q_i} = \mu_i N_i$$

Loi d'évolution

$$(\mu_i - \beta_i)\Big(\sum_j \boxed{N_i \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} N_j} \mu_j + \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \lambda} \dot{\lambda}\Big) \leq 0$$

$$\mathcal{Q}_{ij} = N_i \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} . N_j$$

$$f_i = 0$$

Condition d’existence (stabilité)

$$B_i \mathcal{Q}_{ij} B_j \geq 0, \forall B_i \geq 0$$

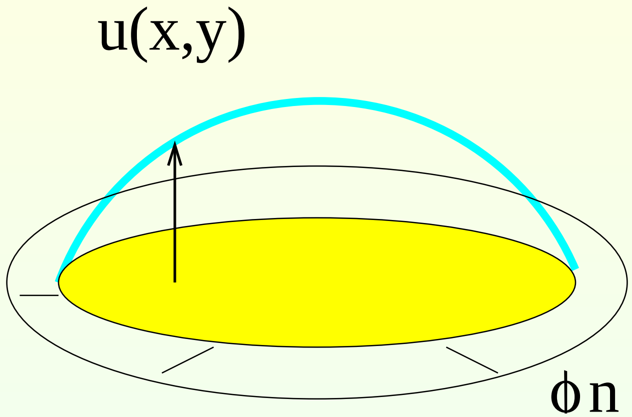
Condition d’unicité (non-bifurcation)

$$B_i \mathcal{Q}_{ij} B_j \geq 0, \forall B_i \neq 0$$

2 Test de gonflement

- Modélisation
- Le problème aux limites
- Analyse de la solution

Modélisation



$$\mathcal{E}(u, S, p) = \int_S \frac{1}{2} K \nabla u^2 - pu \, \mathrm{d}S$$

Conditions aux limites

$$u = 0, \text{ sur } \partial S = \Gamma$$

Equilibre

$$\int_s K \nabla u . \nabla \delta u - p \delta u \, \mathrm{d}S = 0$$

Dissipation $D_m = \int_S -pv \;\mathrm{d}S - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E} = \int_S K\nabla u.\nabla v - pv - \dot{p}u \;\mathrm{d}S + \int_{\partial S} (\frac{1}{2}K\nabla u^2 - pu)\phi \; ds$$

+ Equilibre + compatiblité $(v + \phi\nabla u.\underline{n} = 0)$

$$D_m = \int_\Gamma \mathcal{G}(s)\phi(s)\;\mathrm{d}s$$

$$\mathcal{G} = -(\frac{1}{2}K\nabla u^2 - pu) + K\nabla u.\underline{n}\nabla u.\underline{n}$$

alors

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}K(\nabla u.\underline{n})^2 = \frac{1}{2}K||\nabla u||^2$$

Loi d'évolution

$$\mathcal{G}(s) - G_c \leq 0, \quad \phi \geq 0, \quad \phi(s)\,(\mathcal{G}(s) - G_c) = 0$$

Même raisonnement $\forall \beta(s) \geq 0, s/\mathcal{G} = G_c$

$$(\phi(s) - \beta(s))\,\mathcal{D}_\phi \mathcal{G} = 0$$

Le problème d'évolution

$$\mathcal{D}_\phi \mathcal{G} = K \nabla u . (\nabla v + \phi \nabla \nabla u . \underline{n})$$

Le potentiel des vitesses s'écrit

$$\mathcal{F}(v, \phi; \dot{p}) = \int_S \frac{1}{2} K \nabla v . \nabla v - \dot{p} v \, \mathrm{d}S + \int_\Gamma \phi^2 K \nabla u . \nabla \nabla u . \underline{n} \, \mathrm{d}S$$

défini sur l'ensemble

$$\mathcal{K} = \{ v, \phi \; / v + \phi \nabla u = 0 \; \text{ sur } \Gamma \}$$

Une solution vérifie

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}.\delta v + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi}\delta\phi \geq 0$$

défini sur l'ensemble

$$\mathcal{K}^* = \{\delta v, \delta\phi / \delta v + \delta\phi \nabla u.\underline{n} = 0 sur S\}$$

$$\delta\phi = \phi - \beta$$

$\phi(s) \geq 0,$ si $G(s) = G_c, = 0$ sinon

Problème aux limites

Equilibre

$$\int_S (K\Delta v + \dot{p})\delta v \, \mathrm{d}S = 0$$

Continuité

$$\underline{v} + \phi \nabla u . \underline{n} = 0$$

Loi d’évolution

$$\int_\Gamma (\phi - \beta)\mathcal{D}_\phi \mathcal{G}(s) \, \mathrm{d}s \geq 0$$

Propriété des solutions.

Géométrie initiale un cercle:

Solution fondamentale

$$u = -p/4K(r^2 - R^2)$$

$$pR < 2\sigma_c$$

Conservation du cercle impossible

Développement en série de Fourier

Non unicité $\delta\phi = \alpha_o + \alpha_1 cos\theta + \beta_1 sin\theta$

$$\int_S \delta\phi W" \delta\phi = 2\pi G_c(-2\alpha_o^2 + \sum_i (i-1)(\alpha_i^2 + \beta_i^2))$$

L'équilibre est alors instable vis-à-vis du mode 0

Contrôle du volume :

$$\int_S u \, \mathrm{d}s = u^d$$

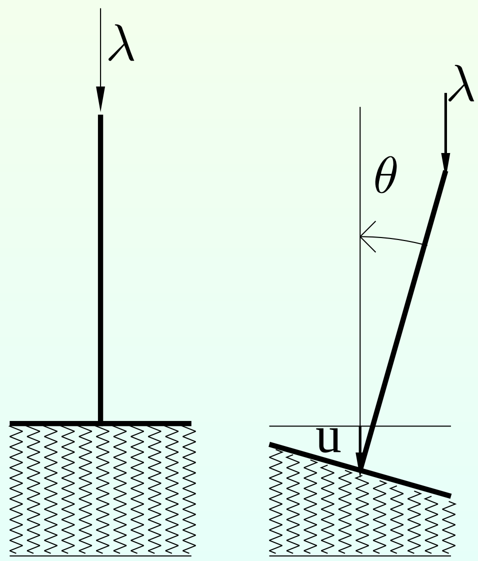
$$\delta p = -4p/R \; \delta\alpha_o$$

$$\int_S \delta\phi W\text{''}\delta\phi = 2\pi G_c(6\alpha_o^2 + \sum_i (i-1)(\alpha_i^2 + \beta_i^2))$$

Critère de stabilité satisfait,

Bifurcation en mode 1 possible. $\phi = a_o + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta \geq 0$

Colonne de Shanley : ressort élastoplastique, écrouissage cinématique.



Problème discret : Charge critique, un ressort en décharge $\dot{\theta} \neq 0$

Problème continu : Charge critique, point de bifurcation,

Apparition d'une zone de décharge à vitesse de croissance finie. Développement asymptotique de la solution

Poutre élastoplastique en compression

Charge critique, bifurcation en mode sinus,

Apparition d’une zone de décharge :

$$ysin(\pi X/L) = m(t), \quad |y| \leq l$$

La zone de décharge gouverne la bifurcation.

Critère de stabilité satisfait.

Conclusions

Irréversibilité : perte de stabilité $\neq$ bifurcation

Critères différents

Le respect du second principe permet d'avoir plusieurs solutions stables du problème d'évolution : il y a bifurcation.

Quelques auteurs :

Plasticité

R. Hill, J. Hutchinson, Triantafyllidis, Petryck,

A. Cimetière, A. Léger, M. Potier Ferry,

Nguyen Quoc Son, C. Stolz

Rupture, Endommagement, Interfaces

B Storakers, Cochelin, Marigo J.J.,

R.M. Pradeilles Duval, C. Stolz

+ tous ceux que j'ai oubliés...