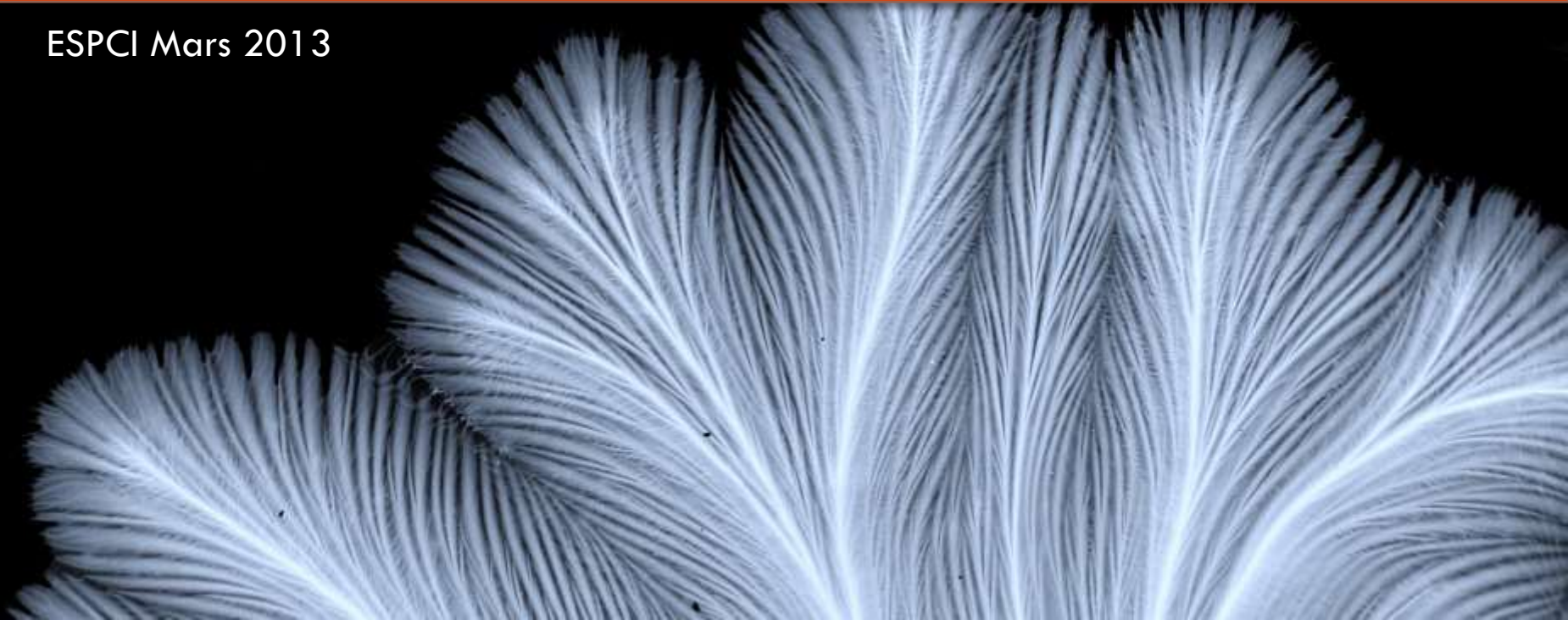




Patterns et mécanique

ESPCI Mars 2013

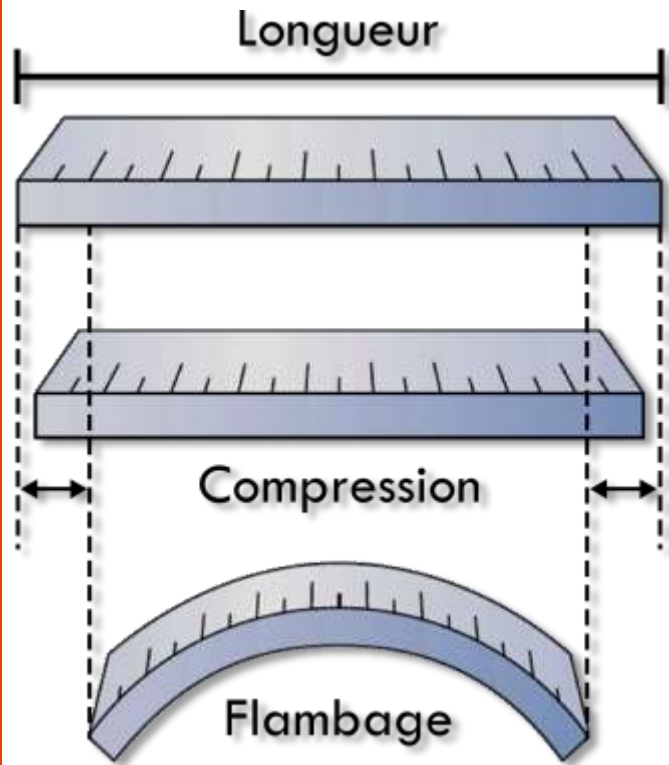


Plan



- Introduction:
 - Patterns naturels
 - Patterns induit par des forces mécaniques
- Notions d'élasticité
- Tige/membrane libre sous contrainte:
 - Stabilité d'une tige élastique (1D)
 - Hiérarchie de plis (2D)
- Membrane confinée sur substrat: influence de la rhéologie
 - Substrat liquide
 - Substrat élastique

Membrane confinée sans substrat



- Membrane mince comprimée uni-axialement = Déformation de taille comparable à la taille du système
- Energie de courbure $\sim \kappa^2 \Rightarrow$ minimisation courbure
- Déformation caractérisée par une seule ondulation
- Pas de structures réellement intéressantes
- Cependant les structures plissées sont omniprésentes avec une échelle de longueur caractéristique indépendante de la taille du système

Exemples de structures plissées



Membrane confinée avec substrat



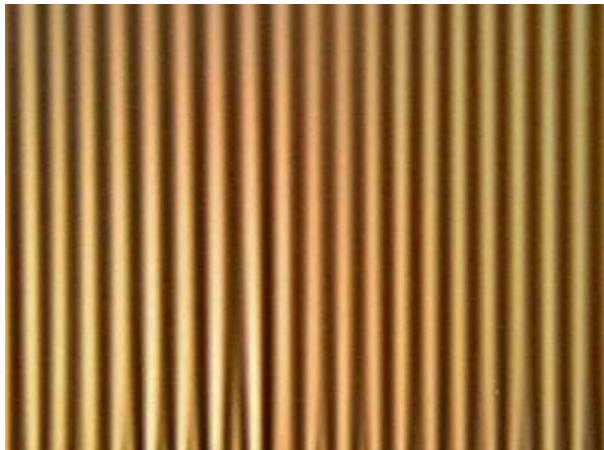
- Dans ces exemples, la couche rigide repose sur un substrat
- En plus de minimiser l'énergie de courbure (favorise les grandes déformations), il faut minimiser l'énergie de déformation du substrat (favorise les petites déformations)
- Le système choisi donc un compromis et sélectionne une taille intermédiaire pour la déformation

Membrane confinée avec substrat

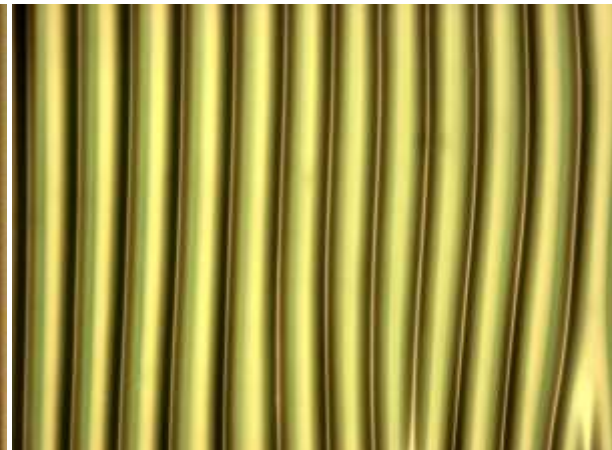


- Dans ces exemples, la couche rigide repose sur un substrat
- En plus de minimiser l'énergie de courbure (favorise les grandes déformations), il faut minimiser l'énergie de déformation du substrat (favorise les petites déformations)
- Le système choisi donc un compromis et sélectionne une taille intermédiaire pour la déformation

Substrat liquide



Substrat élastique



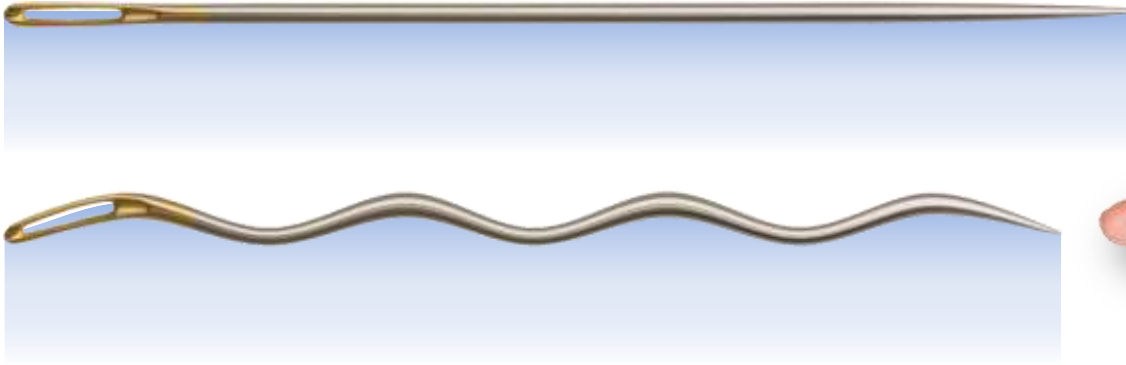
Equation déformation

- On considère une déformation sans étirement
- La tige/membrane se déforme dans un plan



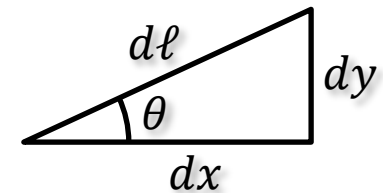
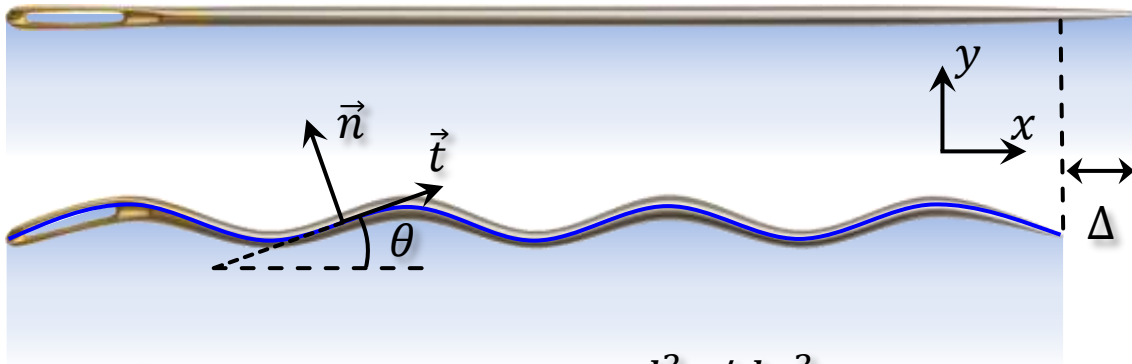
Equation déformation

- On considère une déformation sans étirement
- La tige/membrane se déforme dans un plan



Equation déformation

- On considère une déformation sans étirement
- La tige/membrane se déforme dans un plan



$$U_B = \frac{B}{2} \int \kappa^2 d\ell \quad \kappa = \frac{d^2 y / dx^2}{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}} \quad dx = d\ell \cos \theta \quad dy = d\ell \sin \theta$$

$$U_B = \frac{B}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{d\ell} \right)^2 d\ell \quad L - \Delta = \int_0^L \cos \theta d\ell \Rightarrow \int_0^L \left(1 - \cos \theta - \frac{\Delta}{L} \right) d\ell = 0$$

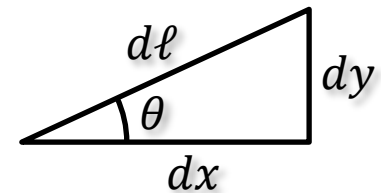
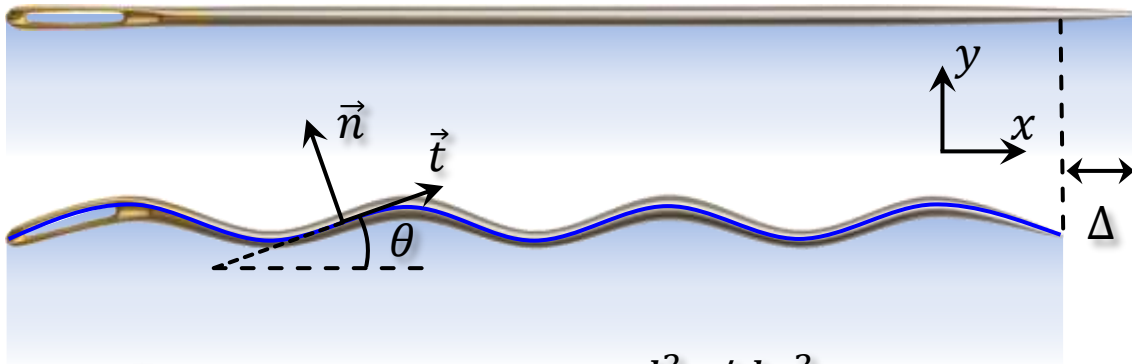
$$U = \int_0^L \left[\frac{B}{2} \theta'^2 - P \left(1 - \cos \theta - \frac{\Delta}{L} \right) + \frac{K}{2} u_s(y) + Q(\ell)(\sin \theta - y') \right] d\ell$$

$$= \int_0^L \mathcal{L}(\theta, \theta', y, y') d\ell$$

Pour une membrane, U est une énergie par unité de longueur transverse le long de l'axe z

Equation déformation

- On considère une déformation sans étirement
- La tige/membrane se déforme dans un plan



$$U_B = \frac{B}{2} \int \kappa^2 d\ell \quad \kappa = \frac{d^2 y / dx^2}{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}} \quad dx = d\ell \cos \theta \quad dy = d\ell \sin \theta$$

$$U_B = \frac{B}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{d\ell} \right)^2 d\ell \quad L - \Delta = \int_0^L \cos \theta d\ell \Rightarrow \int_0^L \left(1 - \cos \theta - \frac{\Delta}{L} \right) d\ell = 0$$

$$U = \int_0^L \left[\frac{B}{2} \theta'^2 - P \left(1 - \cos \theta - \frac{\Delta}{L} \right) + \frac{K}{2} u_s(y) + Q(\ell)(\sin \theta - y') \right] d\ell$$

$$= \int_0^L \mathcal{L}(\theta, \theta', y, y') d\ell$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{d\ell} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} = 0, \quad i = 1, 2, \quad q_1 = \theta, q_2 = y$$

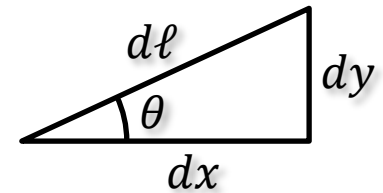
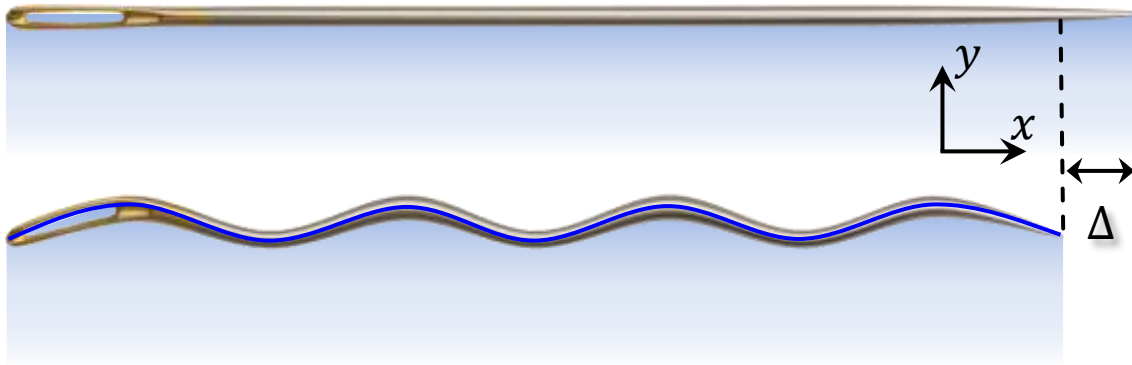
Plan



- Introduction:
 - Patterns naturels
 - Patterns induit par des forces mécaniques
- Notions d'élasticité
- Tige/membrane libre sous contrainte:
 - Stabilité d'une tige élastique (1D)
 - Hiérarchie de plis (2D)
- Membrane confinée sur substrat: influence de la rhéologie
 - Substrat liquide
 - Substrat élastique

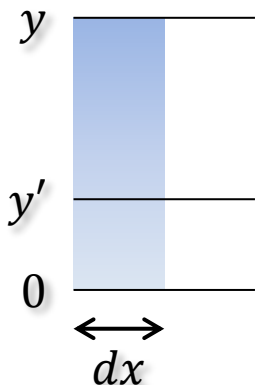
Substrat Liquide: énergie de déformation

- On considère une déformation sans étirement
- La tige/membrane se déforme dans un plan



$$dx = d\ell \cos \theta$$

$$dy = d\ell \sin \theta$$



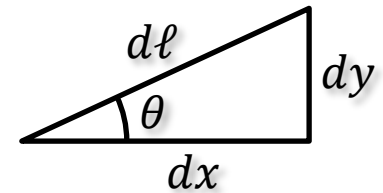
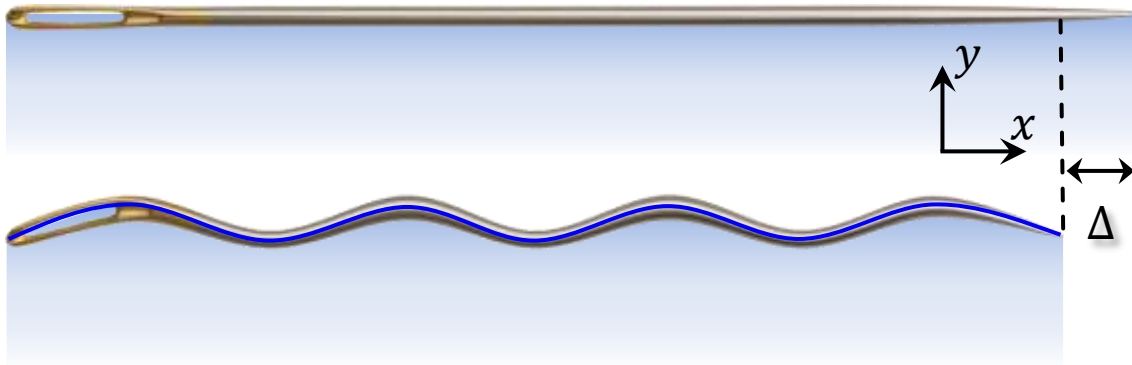
$$dU_S = \int_0^y \rho g \, dx \, y' \, dy' = \frac{1}{2} \rho g y^2 dx$$

$$U_S = \frac{1}{2} \int_0^{L-\Delta} \rho g y^2 dx = \frac{\rho g}{2} \int_0^L y^2 \cos \theta \, d\ell$$

Énergie par unité de longueur transverse

Substrat Liquide: énergie de déformation

- On considère une déformation sans étirement
- La tige/membrane se déforme dans un plan



$$dx = d\ell \cos \theta$$

$$dy = d\ell \sin \theta$$

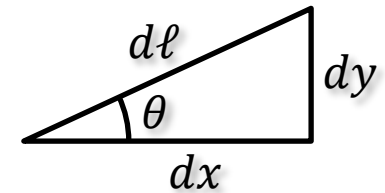
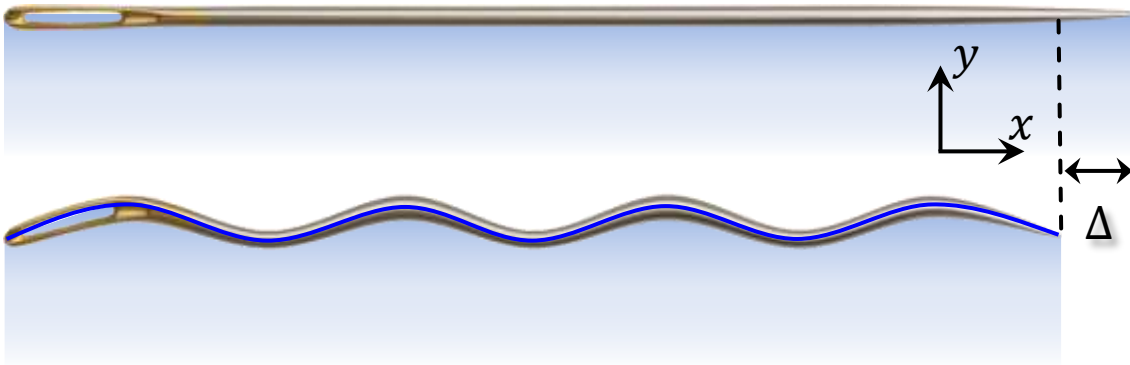
$$U_S = \frac{1}{2} \int_0^{L-\Delta} \rho g y^2 dx = \frac{\rho g}{2} \int_0^L y^2 \cos \theta d\ell$$

$$U = \int_0^L \left[\frac{B}{2} \theta'^2 - P \left(1 - \cos \theta - \frac{\Delta}{L} \right) + \frac{K}{2} u_S(y) + Q(\ell) (\sin \theta - y') \right] d\ell$$

$$\Rightarrow K = \rho g, \quad u_S(y) = y^2 \cos \theta$$

Substrat Liquide: énergie de déformation

- On considère une déformation sans étirement
- La tige/membrane se déforme dans un plan



$$dx = d\ell \cos \theta$$

$$dy = d\ell \sin \theta$$

$$U = \int_0^L \left[\frac{B}{2} \theta'^2 - P \left(1 - \cos \theta - \frac{\Delta}{L} \right) + \frac{\rho g}{2} y^2 \cos \theta + Q(\ell) (\sin \theta - y') \right] d\ell$$

$$= \int_0^L \mathcal{L}(\theta, \theta', y, y') d\ell$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{d\ell} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} = 0, \quad i = 1, 2, \quad q_1 = \theta, q_2 = y$$

Substrat Liquide: équation déformation



$$\mathcal{L} = \frac{B}{2} \theta'^2 - P \left(1 - \cos \theta - \frac{\Delta}{L} \right) + \frac{\rho g}{2} y^2 \cos \theta + Q(\ell)(\sin \theta - y')$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{d\ell} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} = 0 \quad L \rightarrow \infty, y = \theta = \theta' = 0 \quad \text{pour} \quad \ell \rightarrow \pm \infty$$

$$\Rightarrow B\theta'' + \frac{K}{2} y^2 \sin \theta + P \sin \theta + Q \cos \theta = 0 \quad Ky \cos \theta - Q' = 0$$

$$\Rightarrow \left(B\theta'' + \frac{K}{2} y^2 \sin \theta + P \sin \theta + Q \cos \theta \right)' = 0 \quad Q' = Ky \cos \theta$$

$$\Rightarrow B\theta''' + Ky + \frac{K}{2} y^2 \theta' \cos \theta + P\theta' \cos \theta - Q\theta' \sin \theta = 0 \quad (*)$$

$\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement de ℓ donc le hamiltonien est une constante (nulle à cause des conditions aux bords)

$$H = \sum_i q_i' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} - \mathcal{L} = \frac{B}{2} \theta'^2 - \frac{K}{2} y^2 \cos \theta + P(1 - \cos \theta) + Q \sin \theta = C = 0 \quad (**)$$

$$[(**)\theta' + (*)]' = \left[B\theta''' + \frac{B}{2} \theta'^3 + P\theta' + Ky \right]' = 0 = B\theta'''' + \frac{3B}{2} \theta'^2 \theta'' + P\theta'' + K \sin \theta$$

Substrat Liquide: équation déformation



$$B\theta''' + \frac{B}{2}\theta'^3 + P\theta' + Ky = 0$$

Equilibre des forces normales à la tige/membrane

$$\Rightarrow B\theta'''' + \frac{3B}{2}\theta'^2\theta'' + P\theta'' + K \sin \theta = 0$$

Equation impliquant θ uniquement

Substrat Liquide: solution linéaire



$$B\theta''' + \frac{B}{2}\theta'^3 + P\theta' + Ky = 0$$

Equilibre des forces normales à la tige/membrane

$$\Rightarrow B\theta'''' + \frac{3B}{2}\theta'^2\theta'' + P\theta'' + K\sin\theta = 0$$

Equation impliquant θ uniquement

Petites déformations: $\theta \ll 1$, $y' = \sin\theta \sim \theta$

$$By'''' + Py'' + Ky = 0$$

Soit $L \gg \lambda_0$: on néglige les influences des conditions aux bords

$\Rightarrow y = A \cos k\ell$ est solution pourvu que $P = Bk^2 + Kk^{-2}$

$$\bar{P} = \bar{k}^2 + \bar{k}^{-2} \quad \bar{P} = \frac{P}{\sqrt{BK}} \quad \bar{k} = \left(\frac{B}{K}\right)^{1/4} k$$

Substrat Liquide: solution linéaire



$$B\theta''' + \frac{B}{2}\theta'^3 + P\theta' + Ky = 0$$

Equilibre des forces normales à la tige/membrane

$$\Rightarrow B\theta'''' + \frac{3B}{2}\theta'^2\theta'' + P\theta'' + K\sin\theta = 0$$

Equation impliquant θ uniquement

Petites déformations: $\theta \ll 1$, $y' = \sin\theta \sim \theta$

$$By'''' + Py'' + Ky = 0$$

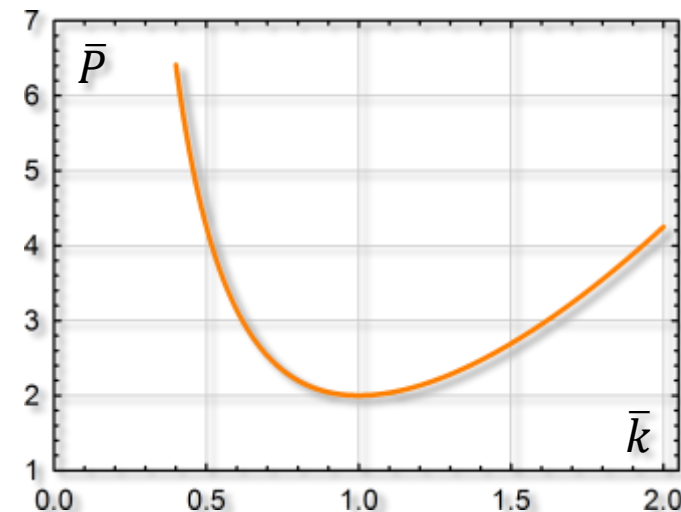
Soit $L \gg \lambda_0$: on néglige les influences des conditions aux bords

$\Rightarrow y = A \cos k\ell$ est solution pourvu que $P = Bk^2 + Kk^{-2}$

$$\bar{P} = \bar{k}^2 + \bar{k}^{-2} \quad \bar{P} = \frac{P}{\sqrt{BK}} \quad \bar{k} = \left(\frac{B}{K}\right)^{1/4} k$$

Pour $\bar{P} < 2$ pas de nombre d'onde correspondant: stable

Pour $\bar{P} = 2$, $\bar{k} = 1$: émergence instabilité



Substrat Liquide: solution linéaire



$$B\theta''' + \frac{B}{2}\theta'^3 + P\theta' + Ky = 0$$

Equilibre des forces normales à la tige/membrane

$$\Rightarrow B\theta'''' + \frac{3B}{2}\theta'^2\theta'' + P\theta'' + K\sin\theta = 0$$

Equation impliquant θ uniquement

Petites déformations: $\theta \ll 1$, $y' = \sin\theta \sim \theta$

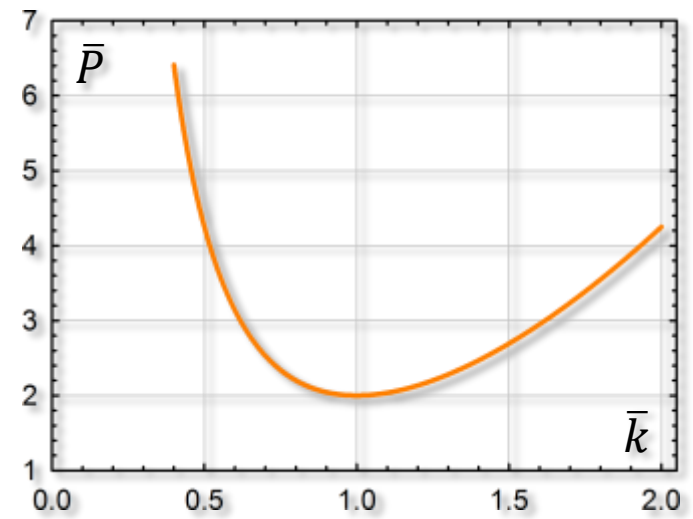
$$By'''' + Py'' + Ky = 0$$

Soit $L \gg \lambda_0$: on néglige les influences des conditions aux bords

$\Rightarrow y = A \cos k\ell$ est solution pourvu que $P = Bk^2 + Kk^{-2}$

$$\bar{P} = \bar{k}^2 + \bar{k}^{-2} \qquad \bar{P} = \frac{P}{\sqrt{BK}} \qquad \bar{k} = \left(\frac{B}{K}\right)^{1/4} k$$

$$\bar{k} = 1 = \left(\frac{B}{K}\right)^{1/4} k = \left(\frac{B}{K}\right)^{1/4} \frac{2\pi}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = 2\pi \left(\frac{B}{K}\right)^{1/4}$$



Substrat Liquide: solution linéaire



$$B\theta''' + \frac{B}{2}\theta'^3 + P\theta' + Ky = 0$$

Equilibre des forces normales à la tige/membrane

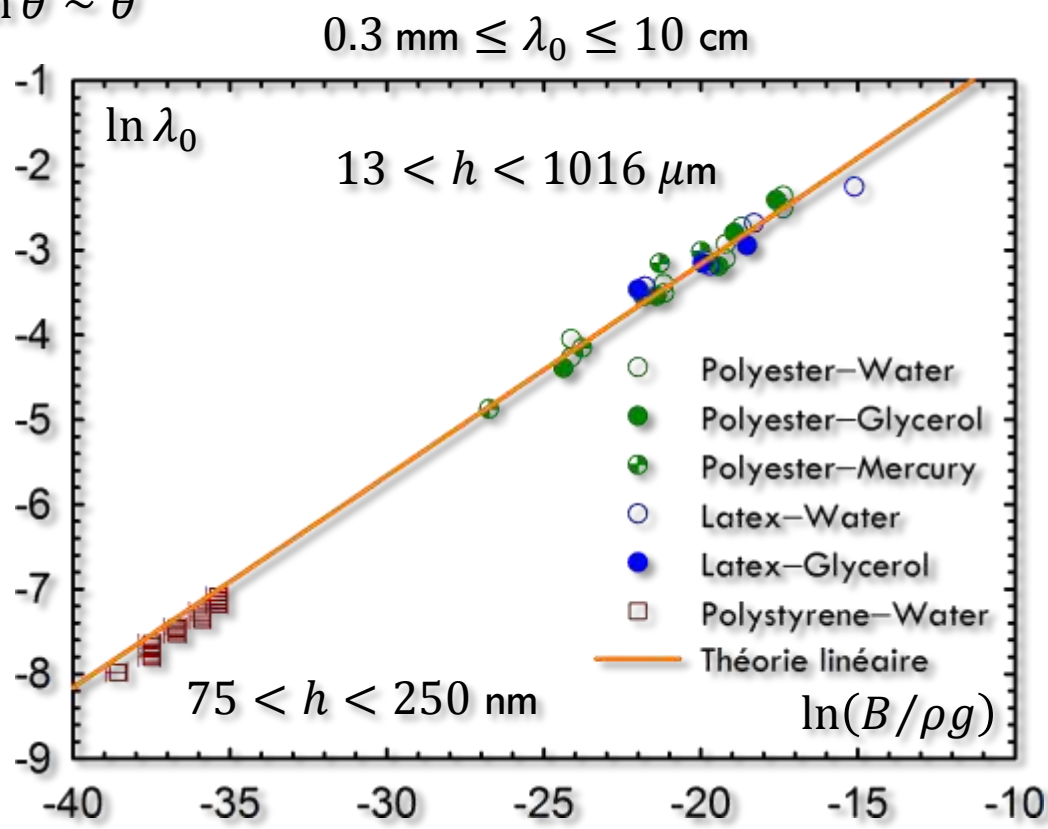
$$\Rightarrow B\theta'''' + \frac{3B}{2}\theta'^2\theta'' + P\theta'' + K\sin\theta = 0$$

Equation impliquant θ uniquement

Petites déformations: $\theta \ll 1$, $y' = \sin\theta \sim \theta$

$$\lambda_0 = 2\pi \left(\frac{B}{\rho g}\right)^{1/4} \sim h^{3/4} \left(\frac{E}{\rho g}\right)^{1/4}$$

Bien vérifié sur 4 ordres de grandeur pour l'épaisseur et 1 ordre en densité



Substrat Liquide: solution non-linéaire



$$B\theta''' + \frac{B}{2}\theta'^3 + P\theta' + Ky = 0$$

Equilibre des forces normales à la tige/membrane

$$\Rightarrow B\theta'''' + \frac{3B}{2}\theta'^2\theta'' + P\theta'' + K \sin \theta = 0$$

Equation impliquant θ uniquement

Grandes déformations:

On rescale avec les quantités identifiées lors de l'analyse linéaire:

$$\bar{P} = \frac{P}{\sqrt{BK}} \quad \bar{k} = \left(\frac{B}{K}\right)^{1/4} k \quad \Rightarrow \quad \bar{\ell} = \left(\frac{K}{B}\right)^{1/4} \ell$$

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + \bar{P}\theta'' + \sin \theta = 0$$

Solution exacte: stratégie

1. Lien entre cette équation et celle du pendule simple, $\theta'' + q^2 \sin \theta = 0 \Rightarrow$ lien entre $\bar{P}$ et q
2. Transformation de Bäcklund: construction itérative de solutions
3. Transformation de Bäcklund: principe de superposition non-linéaire

Substrat Liquide: solution non-linéaire



1. Relation avec le pendule simple:

$$U = \frac{\theta'^2}{2} + q^2(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{dU}{d\ell} = 0 = \theta'' + q^2 \sin \theta$$

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + \bar{P}\theta'' + \sin \theta = 0$$

Substrat Liquide: solution non-linéaire



1. Relation avec le pendule simple:

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + \bar{P}\theta'' + \sin\theta = 0$$

$$U = \frac{\theta'^2}{2} + q^2(1 - \cos\theta) \Rightarrow q^2 \cos\theta = \frac{\theta'^2}{2} + q^2 - U$$

$$\frac{dU}{d\ell} = 0 = (\theta'' + q^2 \sin\theta)'' = \theta'''' - q^2 \sin\theta \theta'^2 + q^2 \cos\theta \theta''$$

Substrat Liquide: solution non-linéaire



1. Relation avec le pendule simple:

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + \bar{P}\theta'' + \sin\theta = 0$$

$$U = \frac{\theta'^2}{2} + q^2(1 - \cos\theta) \Rightarrow q^2 \cos\theta = \frac{\theta'^2}{2} + q^2 - U$$

$$\frac{dU}{d\ell} = 0 = (\theta'' + q^2 \sin\theta)'' = \theta'''' - \underbrace{q^2 \sin\theta \theta'^2}_{-\theta''} + \underbrace{q^2 \cos\theta \theta''}_{\frac{\theta'^2}{2} + q^2 - U} + \underbrace{q^{-2}\theta'' + \sin\theta}_0$$

Substrat Liquide: solution non-linéaire



1. Relation avec le pendule simple:

$$U = \frac{\theta'^2}{2} + q^2(1 - \cos \theta) \Rightarrow q^2 \cos \theta = \frac{\theta'^2}{2} + q^2 - U$$

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + (q^2 + q^{-2} - U)\theta'' + \sin \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = q^2 + q^{-2} - U$$

Une solution de l'équation du pendule est solution de notre équation pourvu que $\bar{P}$ et q soient reliés par cette relation avec $U = \text{constante} = 0$.

Substrat Liquide: solution non-linéaire



1. Relation avec le pendule simple:

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + \bar{P}\theta'' + \sin\theta = 0$$

$$U = \frac{\theta'^2}{2} + q^2(1 - \cos\theta) \Rightarrow q^2 \cos\theta = \frac{\theta'^2}{2} + q^2 - U$$

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + (q^2 + q^{-2})\theta'' + \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = q^2 + q^{-2}$$

2. Transformation de Bäcklund:

$$\theta'_1 - \theta'_0 = 2i a q \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_0}{2}\right)$$

$$\theta'_1 + \theta'_0 = 2i a^{-1} q \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{2}\right)$$

a : facteur d'échelle arbitraire

Substrat Liquide: solution non-linéaire



1. Relation avec le pendule simple:

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + \bar{P}\theta'' + \sin\theta = 0$$

$$U = \frac{\theta'^2}{2} + q^2(1 - \cos\theta) \Rightarrow q^2 \cos\theta = \frac{\theta'^2}{2} + q^2 - U$$

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + (q^2 + q^{-2})\theta'' + \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = q^2 + q^{-2}$$

2. Transformation de Bäcklund:

$$\left[\theta'_1 - \theta'_0 = 2i a q \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_0}{2}\right) \right]'$$

$$\left[\theta'_1 + \theta'_0 = 2i a^{-1} q \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{2}\right) \right]'$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))$$

$$\theta''_1 - \theta''_0 = -q^2 (\sin\theta_1 - \sin\theta_0)$$

$$\theta''_1 + \theta''_0 = -q^2 (\sin\theta_1 + \sin\theta_0)$$

$$\Sigma: \quad \theta''_1 = -q^2 \sin\theta_1$$

$\Rightarrow \theta_0, \theta_1$ sont solutions de l'équation du pendule

$$\neq: \quad \theta''_0 = -q^2 \sin\theta_0$$

Substrat Liquide: solution non-linéaire



1. Relation avec le pendule simple:

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + \bar{P}\theta'' + \sin\theta = 0$$

$$U = \frac{\theta'^2}{2} + q^2(1 - \cos\theta) \Rightarrow q^2 \cos\theta = \frac{\theta'^2}{2} + q^2 - U$$

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + (q^2 + q^{-2})\theta'' + \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = q^2 + q^{-2}$$

2. Transformation de Bäcklund: construction itérative de solutions

$$\theta'_1 - \theta'_0 = 2i a_1 q \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_0}{2}\right) \quad \text{Si } \theta_0 \text{ est solution} \Rightarrow \theta_1 \text{ est aussi solution}$$

$$\theta'_2 - \theta'_1 = 2i a_2 q \sin\left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\right) \quad \text{Si } \theta_1 \text{ est solution} \Rightarrow \theta_2 \text{ est aussi solution, etc.}$$

Mais équation de plus en plus compliquée à résoudre exactement.

Néanmoins il existe une relation entre les solutions construites en suivant cette procédure.

Substrat Liquide: solution non-linéaire



3. Transformation de Bäcklund: principe de superposition non-linéaire

$$\theta'_1 - \theta'_0 = 2i a_1 q \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_0}{2}\right) \quad (\blacksquare)$$

$$\theta'_2 - \theta'_0 = 2i a_2 q \sin\left(\frac{\theta_2 + \theta_0}{2}\right) \quad (\blacksquare)$$

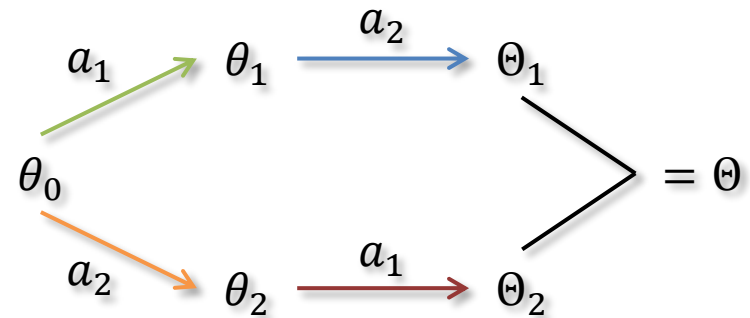
$$\Theta' - \theta'_1 = 2i a_2 q \sin\left(\frac{\Theta + \theta_1}{2}\right) \quad (\blacksquare)$$

$$\Theta' - \theta'_2 = 2i a_1 q \sin\left(\frac{\Theta + \theta_2}{2}\right) \quad (\blacksquare)$$

$$(\blacksquare - \blacksquare) + (\blacksquare - \blacksquare)$$

$$a_1 \left[\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_0}{2}\right) - \sin\left(\frac{\Theta + \theta_2}{2}\right) \right] + a_2 \left[\sin\left(\frac{\Theta + \theta_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_2 + \theta_0}{2}\right) \right] = 0$$

$$\tan \frac{\Theta - \theta_0}{4} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan \frac{\theta_1 - \theta_2}{4}$$



Substrat Liquide: solution non-linéaire



1. Relation avec le pendule simple:

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + \bar{P}\theta'' + \sin\theta = 0$$

$$U = \frac{\theta'^2}{2} + q^2(1 - \cos\theta) \Rightarrow q^2 \cos\theta = \frac{\theta'^2}{2} + q^2 - U$$

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + (q^2 + q^{-2})\theta'' + \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = q^2 + q^{-2}$$

Solutions du pendule:

$$\theta'_1 - \theta'_0 = 2i \boxed{a_1 q} \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_0}{2}\right) = 2i \boxed{q_1} \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_0}{2}\right)$$

$$\text{Soit } \theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = 4 \arctan(A_1 e^{iq_1 \bar{\ell}})$$

$$\theta'_2 - \theta'_0 = 2i \boxed{a_2 q} \sin\left(\frac{\theta_2 + \theta_0}{2}\right) = 2i \boxed{q_2} \sin\left(\frac{\theta_2 + \theta_0}{2}\right)$$

$$\text{Soit } \theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 4 \arctan(A_2 e^{iq_2 \bar{\ell}})$$

A_i constantes arbitraires

Substrat Liquide: solution non-linéaire



1. Relation avec le pendule simple:

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + \bar{P}\theta'' + \sin\theta = 0$$

$$U = \frac{\theta'^2}{2} + q^2(1 - \cos\theta) \Rightarrow q^2 \cos\theta = \frac{\theta'^2}{2} + q^2 - U$$

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + (q^2 + q^{-2})\theta'' + \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = q^2 + q^{-2}$$

Solutions du pendule:

$$\theta'_1 - \theta'_0 = 2i a_1 q \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_0}{2}\right) = 2i q_1 \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_0}{2}\right)$$

$$\text{Soit } \theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \theta_1 = 4 \arctan(A_1 e^{iq_1 \bar{\ell}})$$

$$\theta'_2 - \theta'_0 = 2i a_2 q \sin\left(\frac{\theta_2 + \theta_0}{2}\right) = 2i q_2 \sin\left(\frac{\theta_2 + \theta_0}{2}\right)$$

$$\text{Soit } \theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \theta_2 = 4 \arctan(A_2 e^{iq_2 \bar{\ell}})$$

$$q = \pm\alpha \pm i\beta \quad \alpha = \frac{1}{2}(2 + \bar{P})^{1/2} \quad \beta = \frac{1}{2}(2 - \bar{P})^{1/2}$$

Substrat Liquide: solution non-linéaire



1. Relation avec le pendule simple:

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + \bar{P}\theta'' + \sin\theta = 0$$

$$U = \frac{\theta'^2}{2} + q^2(1 - \cos\theta) \Rightarrow q^2 \cos\theta = \frac{\theta'^2}{2} + q^2 - U$$

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + (q^2 + q^{-2})\theta'' + \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = q^2 + q^{-2}$$

Solutions de notre problème:

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = 4 \arctan(A_1 e^{iq_1 \bar{\ell}}), \quad \theta_2 = 4 \arctan(A_2 e^{iq_2 \bar{\ell}}),$$

$$q = \pm\alpha \pm i\beta, \quad \alpha = \frac{1}{2}(2 + \bar{P})^{1/2}, \quad \beta = \frac{1}{2}(2 - \bar{P})^{1/2}, \quad \tan \frac{\Theta - \theta_0}{4} = \frac{q_1 + q_2}{q_1 - q_2} \tan \frac{\theta_1 - \theta_2}{4}$$

Substrat Liquide: solution non-linéaire



1. Relation avec le pendule simple:

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + \bar{P}\theta'' + \sin\theta = 0$$

$$U = \frac{\theta'^2}{2} + q^2(1 - \cos\theta) \Rightarrow q^2 \cos\theta = \frac{\theta'^2}{2} + q^2 - U$$

$$\theta'''' + \frac{3}{2}\theta'^2\theta'' + (q^2 + q^{-2})\theta'' + \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{P} = q^2 + q^{-2}$$

Solutions de notre problème:

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = 4 \arctan(A_1 e^{iq_1 \bar{\ell}}), \quad \theta_2 = 4 \arctan(A_2 e^{iq_2 \bar{\ell}}),$$

$$q = \pm\alpha \pm i\beta, \quad \alpha = \frac{1}{2}(2 + \bar{P})^{1/2}, \quad \beta = \frac{1}{2}(2 - \bar{P})^{1/2}, \quad \tan \frac{\Theta - \theta_0}{4} = \frac{q_1 + q_2}{q_1 - q_2} \tan \frac{\theta_1 - \theta_2}{4}$$

$$A_1 = A_2 = 1 \\ q_1 = \alpha - i\beta, \quad q_2 = -\alpha - i\beta$$

$$A_1 = i, A_2 = -i \\ q_1 = \alpha - i\beta, \quad q_2 = -\alpha - i\beta$$

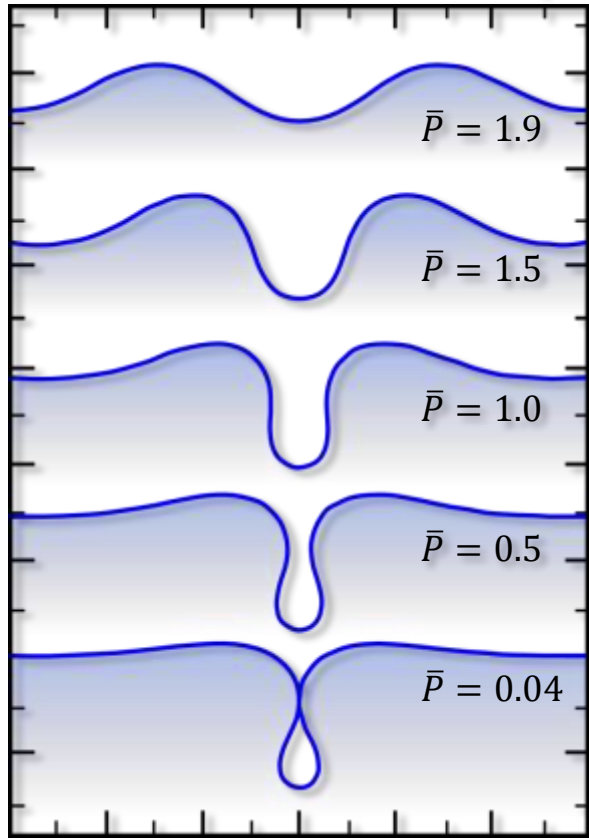
$$\Theta_S = 4 \arctan \left[\frac{\beta \sin(\alpha \bar{\ell})}{\alpha \cosh(\beta \bar{\ell})} \right]$$

$$\Theta_A = 4 \arctan \left[\frac{\beta \cos(\alpha \bar{\ell})}{\alpha \cosh(\beta \bar{\ell})} \right]$$

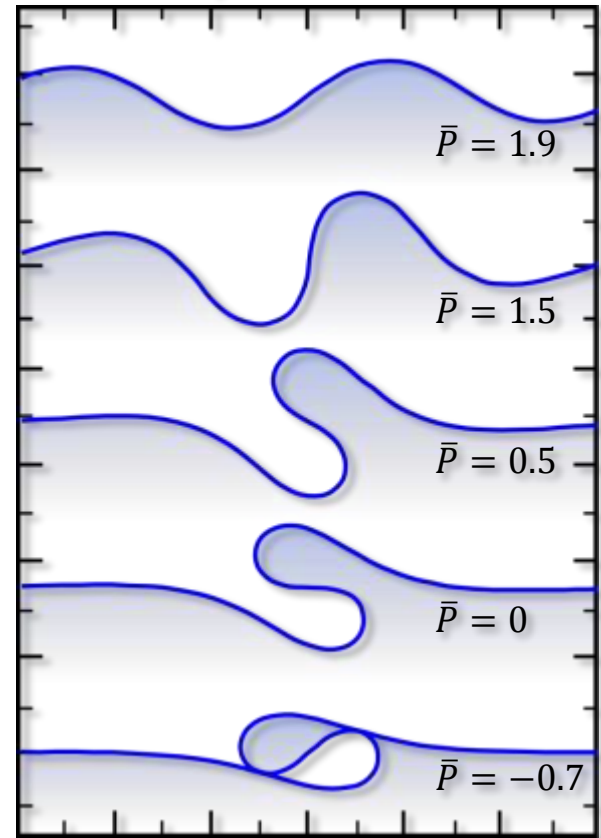
Substrat Liquide: solution non-linéaire



$$(x, y) = \left(\int_0^{\bar{\ell}} \cos \Theta(\ell') d\ell', \int_0^{\bar{\ell}} \sin \Theta(\ell') d\ell' \right)$$



$$\Theta_S = 4 \arctan \left[\frac{\beta \sin(\alpha \bar{\ell})}{\alpha \cosh(\beta \bar{\ell})} \right]$$



$$\Theta_A = 4 \arctan \left[\frac{\beta \cos(\alpha \bar{\ell})}{\alpha \cosh(\beta \bar{\ell})} \right]$$

Substrat Liquide: solution non-linéaire



Connexion avec le taux de confinement, relation entre $\bar{P}$ et Δ :

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos \Theta) d\ell$$
$$\Theta_S = 4 \arctan \left[\frac{\beta \sin(\alpha \bar{\ell})}{\alpha \cosh(\beta \bar{\ell})} \right] \quad \alpha = \frac{1}{2} (2 + \bar{P})^{1/2}$$
$$\Theta_A = 4 \arctan \left[\frac{\beta \cos(\alpha \bar{\ell})}{\alpha \cosh(\beta \bar{\ell})} \right] \quad \beta = \frac{1}{2} (2 - \bar{P})^{1/2}$$

$$\bar{\ell} = \left(\frac{K}{B} \right)^{1/4} \ell = \frac{2\pi}{\lambda_0} \ell \Rightarrow \quad \frac{\Delta}{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos \Theta) d\bar{\ell}$$

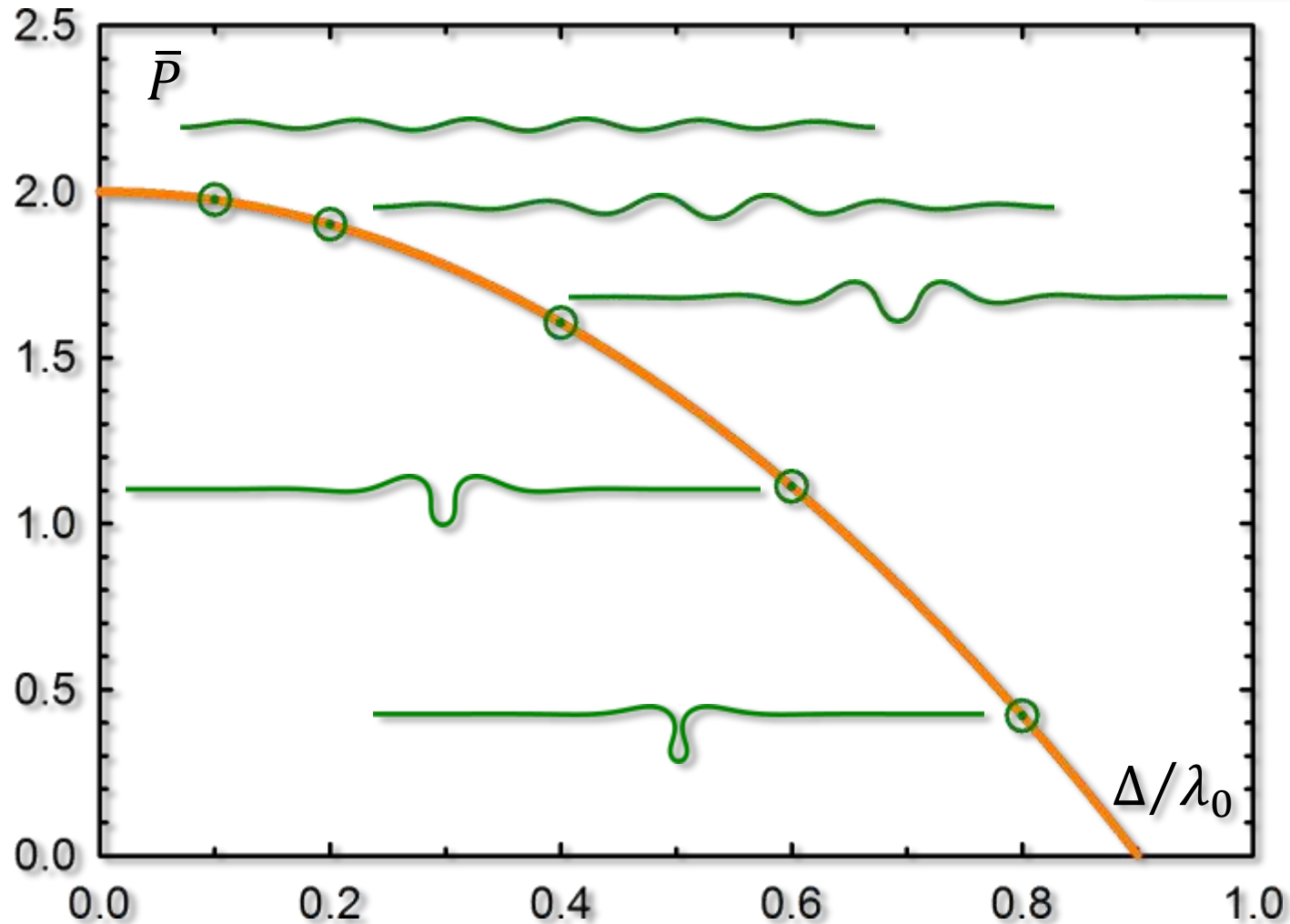
$$\frac{\Delta}{\lambda_0} = \frac{8\beta}{2\pi} = \frac{2}{\pi} (2 - \bar{P})^{1/2} \Rightarrow \quad \bar{P} = 2 - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\Delta}{\lambda_0} \right)^2$$

Substrat Liquide: solution non-linéaire



Connexion avec le taux de confinement, relation entre $\bar{P}$ et Δ :

$$\bar{P} = 2 - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\Delta}{\lambda_0} \right)^2$$



Substrat Liquide: comparaison théorie/expériences



$$\frac{\Delta}{\lambda_0} = 0.15$$

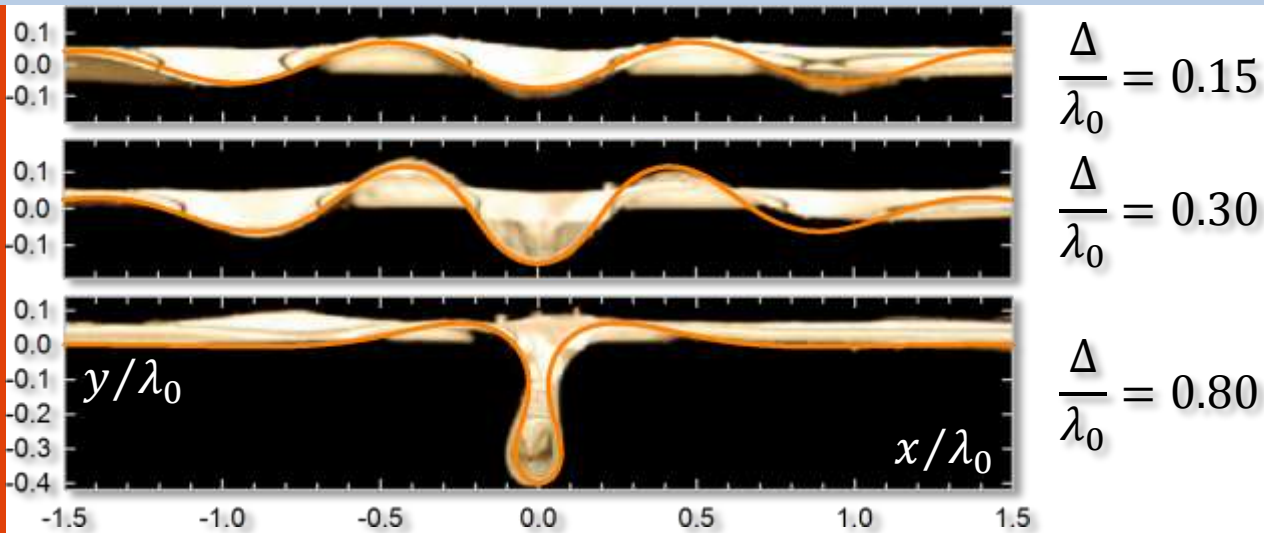
$$\frac{\Delta}{\lambda_0} = 0.30$$

$$\frac{\Delta}{\lambda_0} = 0.80$$

Evolution expérimentale:

- Faible compression ($\Delta/\lambda_0 < 0.3$) : pattern « sinusoïdal ». En fait pour une membrane infinie le profil est toujours localisé. La taille de la localisation diverge pour une compression nulle.
- Compression intermédiaire ($0.3 < \Delta/\lambda_0 < 0.7$) : l'amplitude des ondulations décroît sauf dans une zone de taille λ_0 où une focalisation émerge
- Forte compression ($\Delta/\lambda_0 > 0.7$) : il ne subsiste qu'un pli central où toute la déformation se focalise

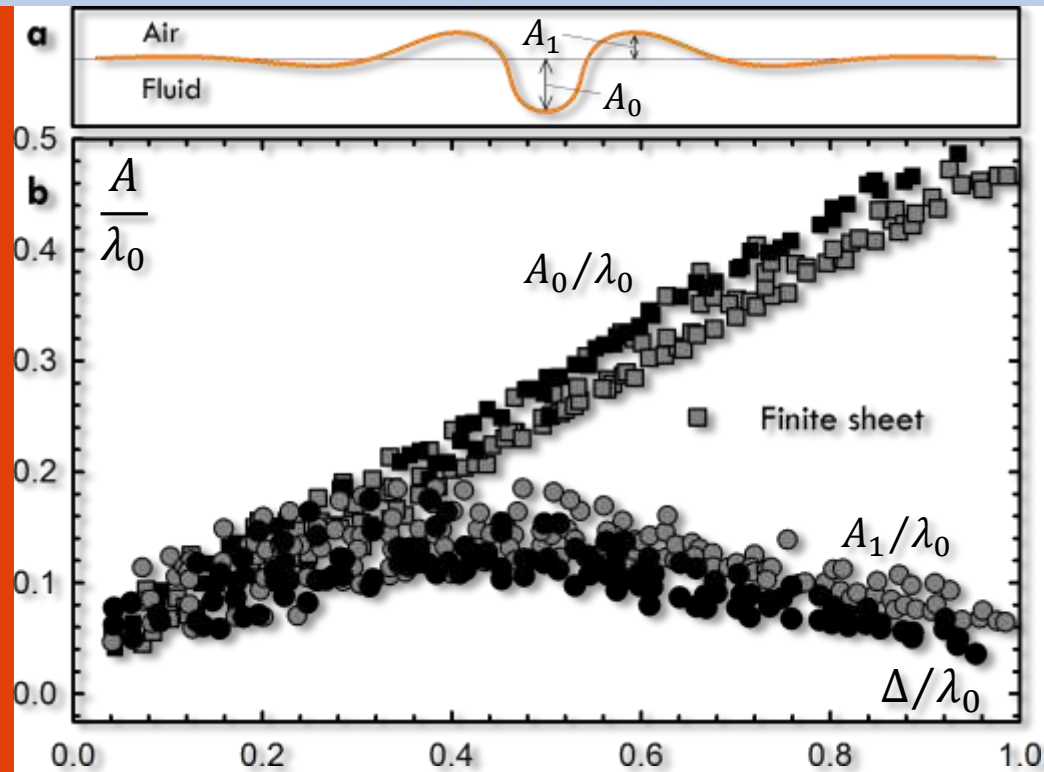
Substrat Liquide: comparaison théorie/expériences



Comparaison profil théorique/expérimental:

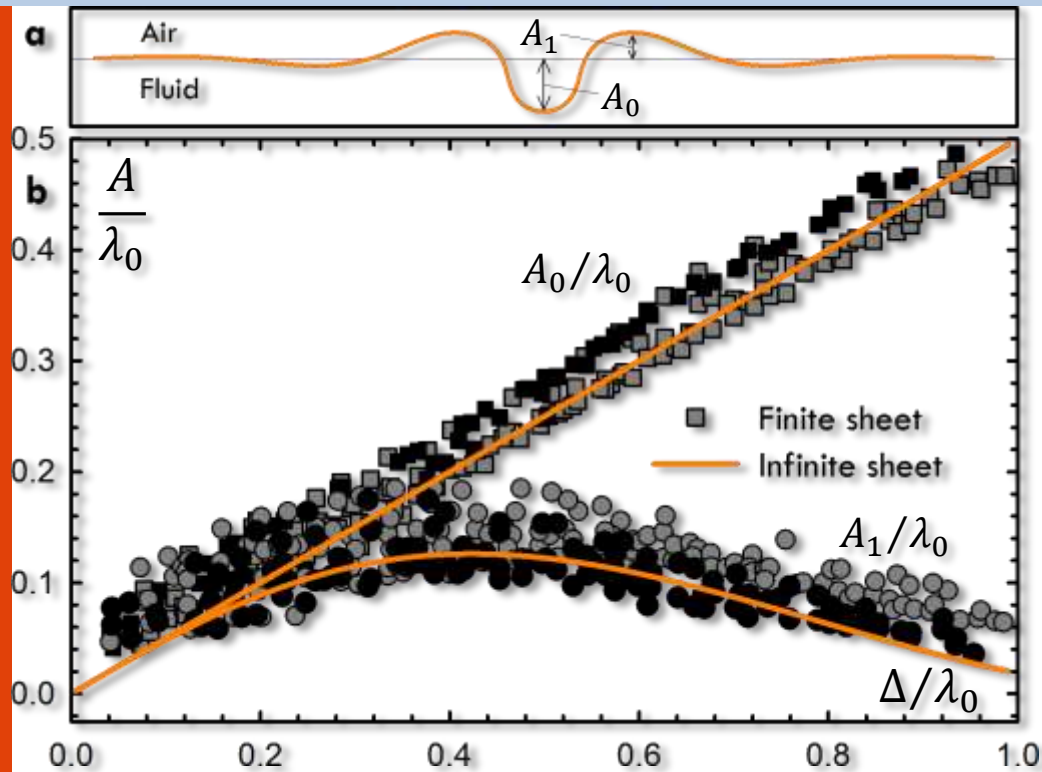
- Accord satisfaisant entre le profil théorique pour une membrane infinie et le profil expérimental d'une membrane finie
- La focalisation se produisant dans une région de taille réduite λ_0 , ce processus doit être universel et dépendre peu de la taille du système dès que cette taille vaut quelques λ_0
- Confirmation en étudiant l'évolution des amplitudes centrales

Substrat Liquide: comparaison théorie/expériences



Évolution expérimentale des amplitudes centrales A_0 et A_1 en fonction de la compression Δ

Substrat Liquide: comparaison théorie/expériences



Évolution expérimentale des amplitudes centrales A_0 et A_1 en fonction de la compression Δ

Comparaison avec l'évolution théorique

Dès que le processus de focalisation débute ($\Delta/\lambda_0 > 0.3$), l'accord entre théorie et expériences est très bon

Résumé



- Symétrie haut/bas (focalisation/localisation aussi bien vers le substrat que vers l'extérieur)
- Pas d'instabilité secondaire pour une membrane infinie
- Focalisation/localisation en un seul pli
- Compression maximale de l'ordre de λ_0 . Pour $L \gg \lambda_0$, la focalisation peut être atteinte pour $\Delta/L \rightarrow 0$. Difficile de voir le régime « sinusoïdal ».
- Solution exacte obtenue grâce au lien fort avec le pendule simple

Plan



- Introduction:
 - Patterns naturels
 - Patterns induit par des forces mécaniques
- Notions d'élasticité
- Tige/membrane libre sous contrainte:
 - Stabilité d'une tige élastique (1D)
 - Hiérarchie de plis (2D)
- Membrane confinée sur substrat: influence de la rhéologie
 - Substrat liquide
 - Substrat élastique

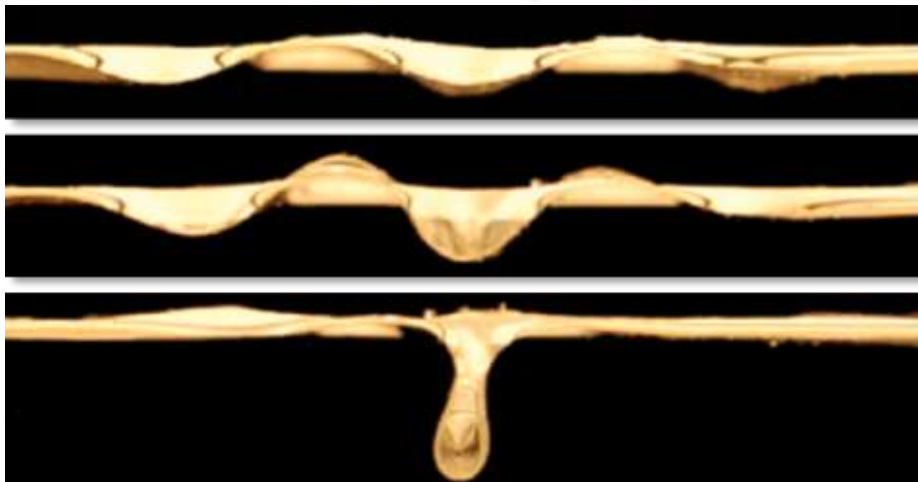
Substrat Elastique: phénoménologie



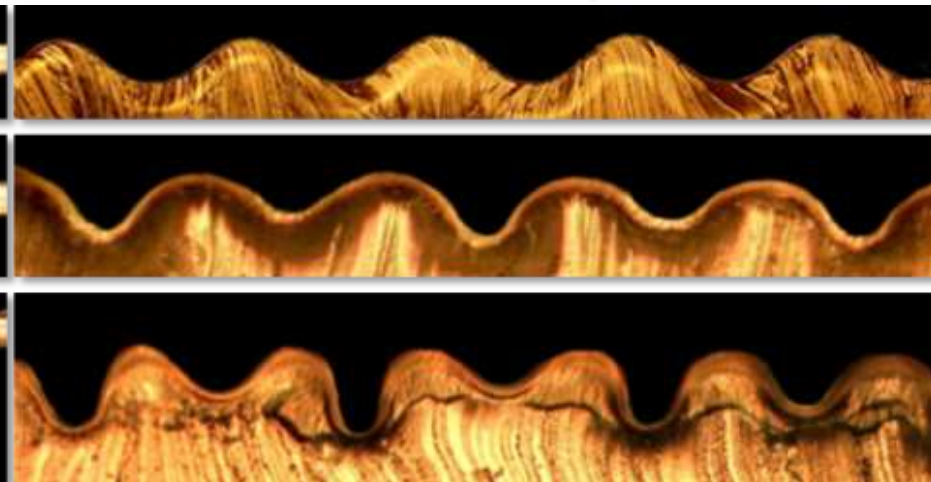
Evolution expérimentale:

- Faible compression ($\delta = \Delta/L < 0.2$) : pattern « sinusoïdal » similaire au cas d'un substrat liquide.
- Compression plus importante ($\delta = \Delta/L > 0.2$) : émergence d'une instabilité secondaire avec doublement de période et focalisation périodique.

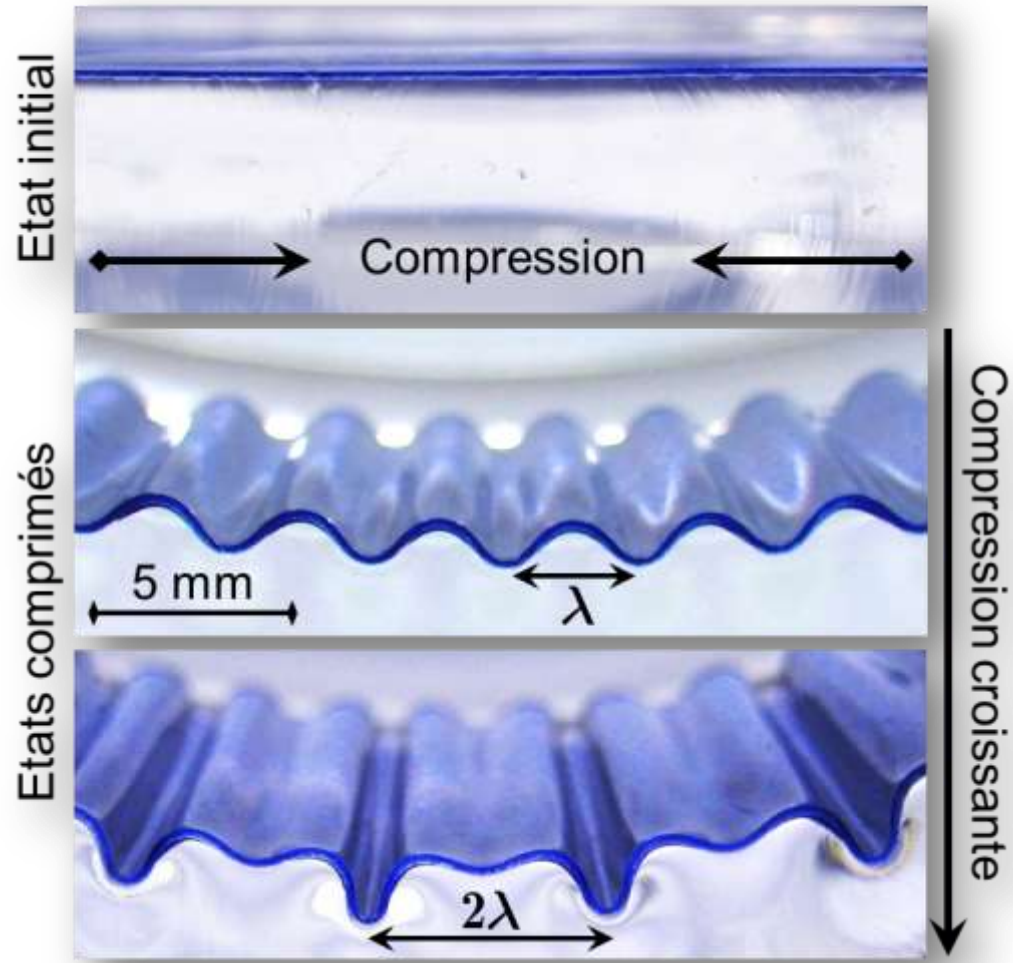
Substrat liquide



Substrat élastique



Substrat Elastique: phénoménologie



Substrat Elastique: phénoménologie



Evolution expérimentale:

- Faible compression ($\delta = \Delta/L < 0.2$) : pattern « sinusoïdal » similaire au cas d'un substrat liquide.
- Compression plus importante ($\delta = \Delta/L > 0.2$) : émergence d'une instabilité secondaire avec doublement de période et focalisation périodique.
 - La focalisation se produit toujours vers le substrat : brisure explicite de la symétrie haut/bas!
 - La membrane ne peut briser cette symétrie. Cette brisure provient du substrat.
 - Les caractéristiques de l'instabilité secondaire doivent donc être contrôlées par le substrat. Elastomère isotrope $\rightarrow E, \sigma$.
 - Le taux critique δ_2 auquel apparaît l'instabilité est sans dimension. Donc fonction de σ uniquement.

Substrat Elastique: équation déformation



Dans le cas d'un substrat liquide, on avait obtenu l'équation suivante

$$\underbrace{B\theta''' + \frac{B}{2}\theta'^3 + P\theta'}_{\text{membrane}} + \underbrace{Ky}_{\substack{\text{réponse} \\ \text{substrat}}} = 0 \quad \text{Equilibre des forces normales à la tige/membrane}$$

- Pour un substrat élastique : même équation avec une réponse modifiée $Ky \rightarrow F_y$
- Calcul faiblement non-linéaire
- La première non-linéarité provient du substrat et est quadratique
- Développement des termes associés à la membrane à l'ordre correspondant

$$y' = \sin \theta \Rightarrow$$

$$By'''' + Py'' + F_y + O(y^3) = 0$$

Substrat Elastique: équation déformation

$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

Petites déformations: $F_y = K\mathcal{H}(\partial_\ell y)$

$$\mathcal{H}(f) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{f(t + \tau) - f(t - \tau)}{\tau} d\tau$$

Opérateur linéaire:

$$\mathcal{H}(f + g) = \mathcal{H}(f) + \mathcal{H}(g)$$

$$\mathcal{H}(af) = a \mathcal{H}(f)$$

$\mathcal{H}$ = transformée de Hilbert

$$K = E_s \frac{2(1 - \sigma_s)}{(1 + \sigma_s)(3 - 4\sigma_s)}$$

Action simple sur fonctions trigonométriques:

$$\mathcal{H}(\sin qx) = -\cos qx$$

$$\mathcal{H}(\cos qx) = \sin qx$$

Substrat Elastique: équation déformation

$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

Petites déformations: $F_y = K\mathcal{H}(\partial_\ell y)$

$$\mathcal{H}(f) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{f(t+\tau) - f(t-\tau)}{\tau} d\tau$$

Opérateur linéaire:

$$\mathcal{H}(f+g) = \mathcal{H}(f) + \mathcal{H}(g)$$

$$\mathcal{H}(af) = a \mathcal{H}(f)$$

$\mathcal{H}$ = transformée de Hilbert

$$K = E_S \frac{2(1 - \sigma_S)}{(1 + \sigma_S)(3 - 4\sigma_S)}$$

Action simple sur fonctions trigonométriques:

$$\mathcal{H}(\sin qx) = -\cos qx$$

$$\mathcal{H}(\cos qx) = \sin qx$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\sin t) &= -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{\sin(t+\tau) - \sin(t-\tau)}{\tau} d\tau = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{2 \cos t \sin \tau}{\tau} d\tau \\ &= -\frac{2 \cos t}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = -\frac{2 \cos t}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right) = -\cos t \end{aligned}$$

Substrat Elastique: solution linéaire



$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

Petites déformations: $F_y = K\mathcal{H}(\partial_\ell y)$ $\mathcal{H}(\sin qx) = -\cos qx$, $\mathcal{H}(\cos qx) = \sin qx$

Soit $L \gg \lambda_0$: on néglige les influences des conditions aux bords

$\Rightarrow y = A \cos k\ell$ est solution pourvu que $P = Bk^2 + Kk^{-1}$

$$B Ak^4 \cos k\ell - PAk^2 \cos k\ell + K\mathcal{H}(-Ak \sin k\ell) = 0$$

$$[Bk^4 - Pk^2 + Kk] A \cos k\ell = 0$$

Substrat Elastique: solution linéaire



$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

Petites déformations: $F_y = K\mathcal{H}(\partial_\ell y)$ $\mathcal{H}(\sin qx) = -\cos qx$, $\mathcal{H}(\cos qx) = \sin qx$

Soit $L \gg \lambda_0$: on néglige les influences des conditions aux bords

$\Rightarrow y = A \cos k\ell$ est solution pourvu que $P = Bk^2 + Kk^{-1}$

$$\bar{P} = \bar{k}^2 + 2\bar{k}^{-1} \quad \bar{P} = \frac{P}{[B(K/2)^2]^{1/3}} \quad \bar{k} = \left(\frac{2B}{K}\right)^{1/3} k$$

Substrat Elastique: solution linéaire



$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

Petites déformations: $F_y = K\mathcal{H}(\partial_\ell y)$ $\mathcal{H}(\sin qx) = -\cos qx$, $\mathcal{H}(\cos qx) = \sin qx$

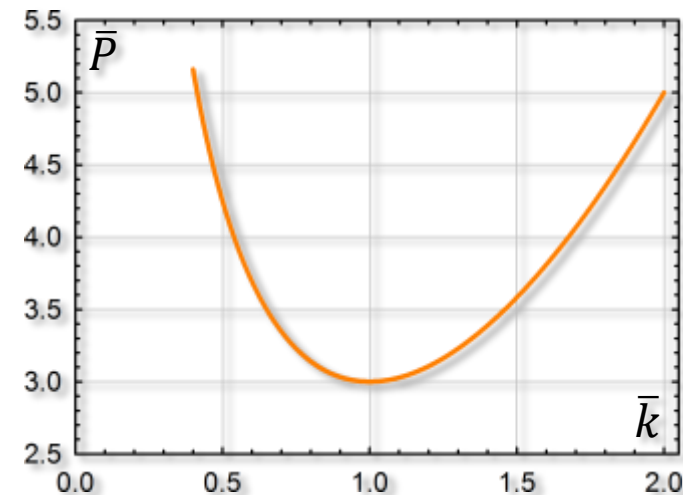
Soit $L \gg \lambda_0$: on néglige les influences des conditions aux bords

$\Rightarrow y = A \cos k\ell$ est solution pourvu que $P = Bk^2 + Kk^{-1}$

$$\bar{P} = \bar{k}^2 + 2\bar{k}^{-1} \quad \bar{P} = \frac{P}{[B(K/2)^2]^{1/3}} \quad \bar{k} = \left(\frac{2B}{K}\right)^{1/3} k$$

Pour $\bar{P} < 3$ pas de nombre d'onde correspondant: stable

Pour $\bar{P} = 3$, $\bar{k} = 1$: émergence instabilité



Substrat Elastique: solution linéaire



$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

Petites déformations: $F_y = K\mathcal{H}(\partial_\ell y)$ $\mathcal{H}(\sin qx) = -\cos qx$, $\mathcal{H}(\cos qx) = \sin qx$

Soit $L \gg \lambda_0$: on néglige les influences des conditions aux bords

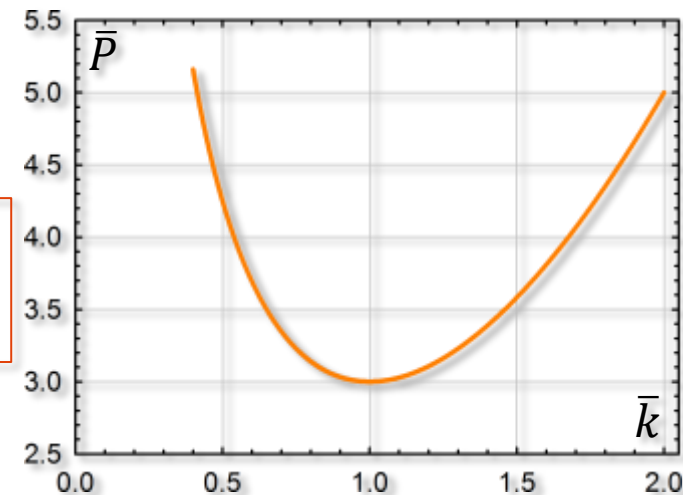
$\Rightarrow y = A \cos k\ell$ est solution pourvu que $P = Bk^2 + Kk^{-1}$

$$\bar{P} = \bar{k}^2 + 2\bar{k}^{-1} \quad \bar{P} = \frac{P}{[B(K/2)^2]^{1/3}} \quad \bar{k} = \left(\frac{2B}{K}\right)^{1/3} k$$

Pour $\bar{P} < 3$ pas de nombre d'onde correspondant: stable

Pour $\bar{P} = 3$, $\bar{k} = 1$: émergence instabilité

$$\bar{k} = 1 = \left(\frac{2B}{K}\right)^{1/3} k = \left(\frac{2B}{K}\right)^{1/3} \frac{2\pi}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = 2\pi \left(\frac{2B}{K}\right)^{1/3}$$



Substrat Elastique: solution linéaire

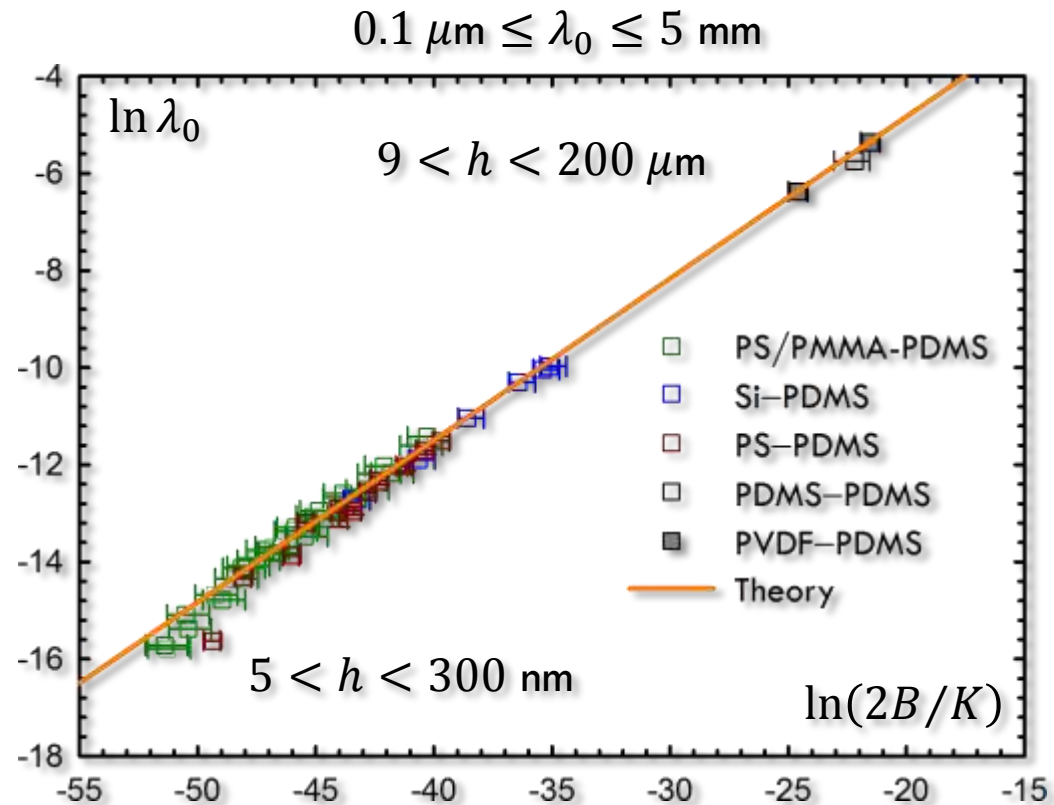


$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

Petites déformations:

$$\lambda_0 = 2\pi \left(\frac{2B}{K} \right)^{1/3} \sim h \left(\frac{E_M}{E_S} \right)^{1/3}$$

Bien vérifié sur 4-5 ordres de grandeur pour l'épaisseur, 5 ordres pour E_M et 2 ordres pour E_S



Substrat Elastique: solution linéaire



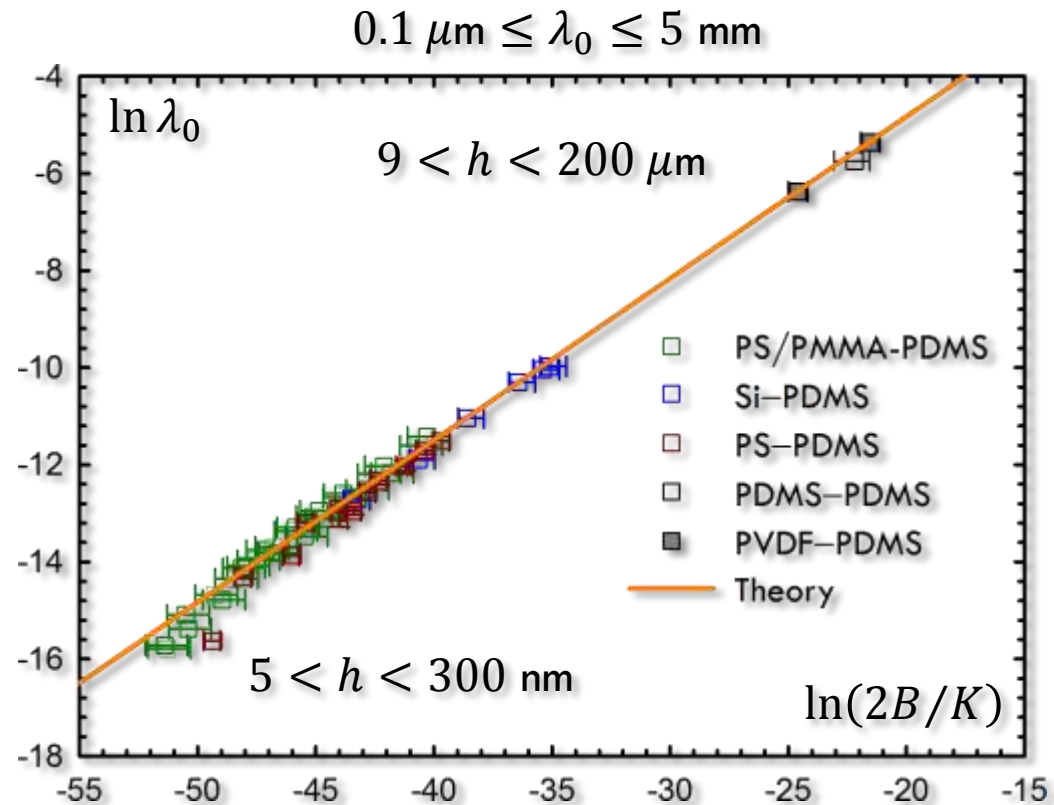
$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

Petites déformations:

$$\lambda_0 = 2\pi \left(\frac{2B}{K} \right)^{1/3} \sim h \left(\frac{E_M}{E_S} \right)^{1/3}$$

Bien vérifié sur 4-5 ordres de grandeur pour l'épaisseur, 5 ordres pour E_M et 2 ordres pour E_S

$$P_0 = k_0^2 + 2k_0^{-1} = 3 \left(\frac{K^2 B}{4} \right)^{1/3}$$



Substrat Elastique: solution linéaire



$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

Petites déformations:

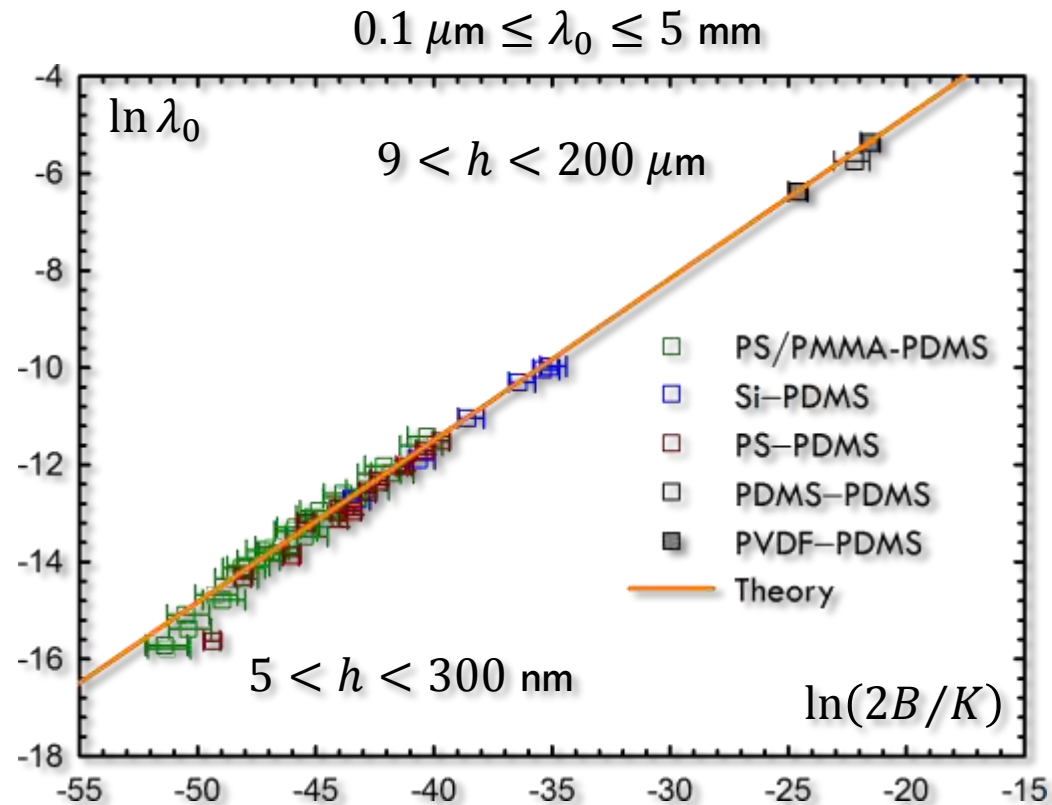
$$\lambda_0 = 2\pi \left(\frac{2B}{K} \right)^{1/3} \sim h \left(\frac{E_M}{E_S} \right)^{1/3}$$

Bien vérifié sur 4-5 ordres de grandeur pour l'épaisseur, 5 ordres pour E_M et 2 ordres pour E_S

$$P_0 = k_0^2 + 2k_0^{-1} = 3 \left(\frac{K^2 B}{4} \right)^{1/3}$$

$$\Delta = \int_0^L (1 - \cos \theta) d\ell$$

$$\delta = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{\lambda_0} (1 - \cos \theta) d\ell$$



Substrat Elastique: solution linéaire



$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

Petites déformations:

$$\lambda_0 = 2\pi \left(\frac{2B}{K} \right)^{1/3} \sim h \left(\frac{E_M}{E_S} \right)^{1/3}$$

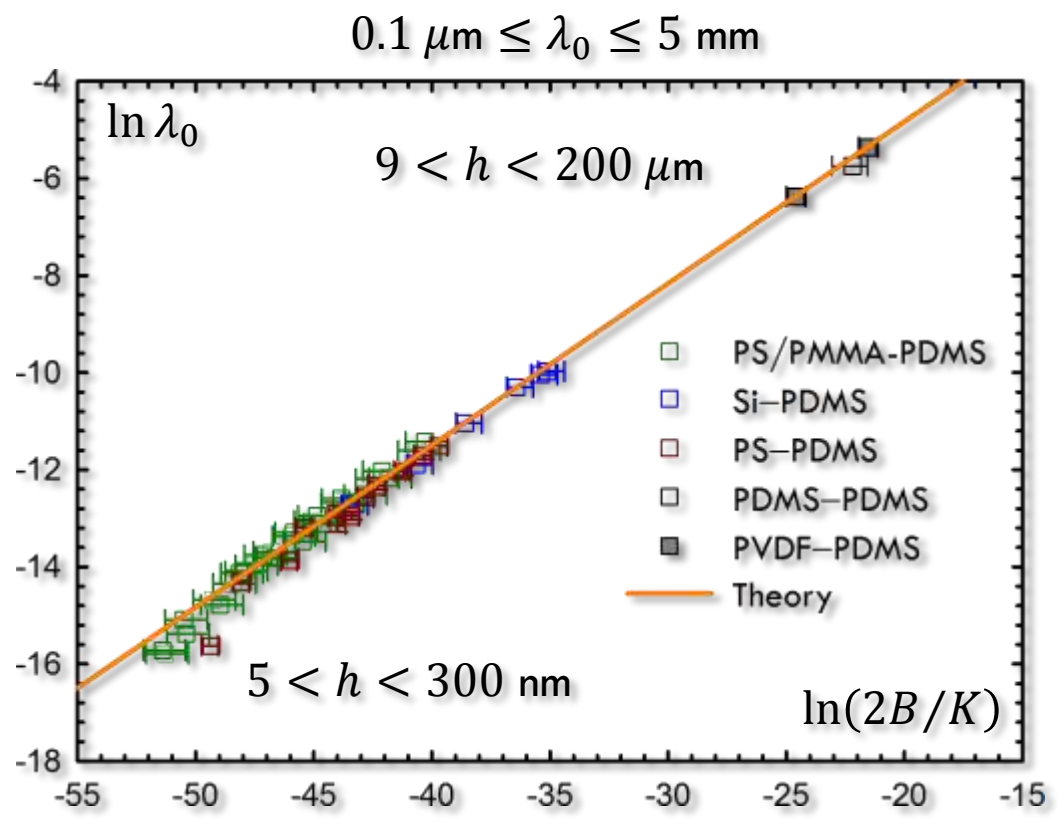
Bien vérifié sur 4-5 ordres de grandeur pour l'épaisseur, 5 ordres pour E_M et 2 ordres pour E_S

$$P_0 = k_0^2 + 2k_0^{-1} = 3 \left(\frac{K^2 B}{4} \right)^{1/3}$$

$$y' = \sin \theta \sim \theta \quad y = A \cos k_0 \ell$$

$$\delta = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{\lambda_0} (1 - \cos \theta) d\ell \simeq \frac{1}{2\lambda_0} \int_0^{\lambda_0} y'^2 d\ell \Rightarrow$$

$$|A| = \frac{\lambda_0}{\pi} \delta^{1/2}$$



Substrat Elastique: solution linéaire



$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

Petites déformations:

$$\lambda_0 = 2\pi \left(\frac{2B}{K} \right)^{1/3} \sim h \left(\frac{E_M}{E_S} \right)^{1/3}$$

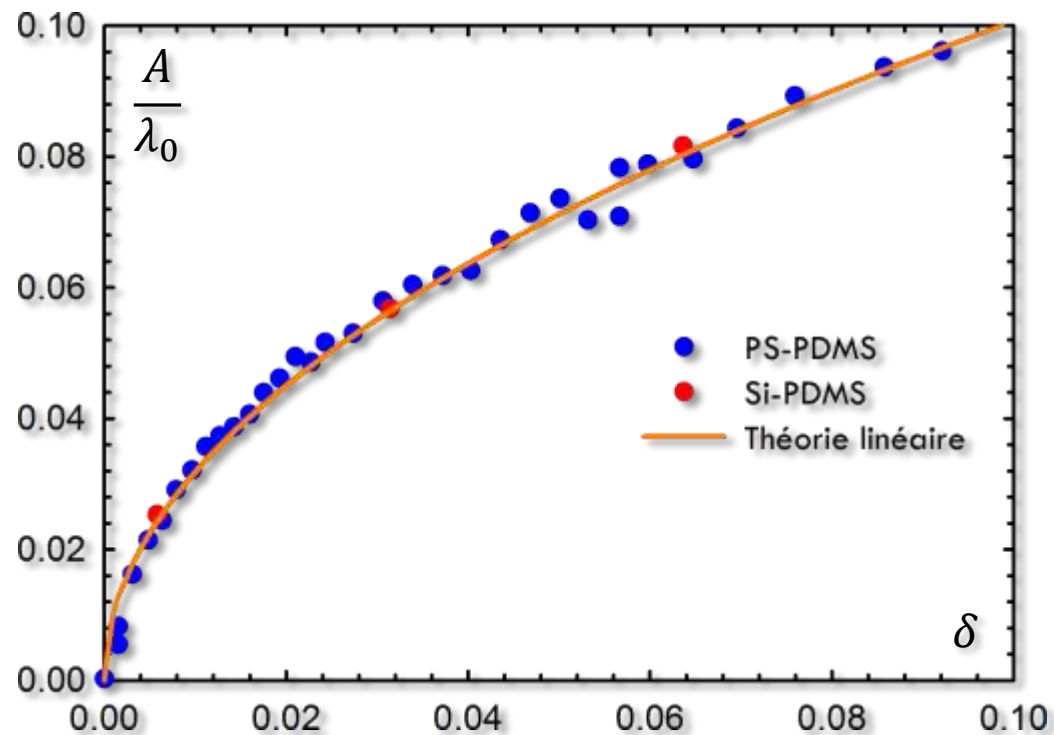
Bien vérifié sur 4-5 ordres de grandeur pour l'épaisseur, 5 ordres pour E_M et 2 ordres pour E_S

$$P_0 = k_0^2 + 2k_0^{-1} = 3 \left(\frac{K^2 B}{4} \right)^{1/3}$$

$$y' = \sin \theta \sim \theta \quad y = A \cos k_0 \ell$$

$$\delta = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{\lambda_0} (1 - \cos \theta) d\ell \simeq \frac{1}{2\lambda_0} \int_0^{\lambda_0} y'^2 d\ell \Rightarrow$$

$$|A| = \frac{\lambda_0}{\pi} \delta^{1/2}$$



Substrat Elastique: équation non-linéaire



$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

« Grandes » déformations:

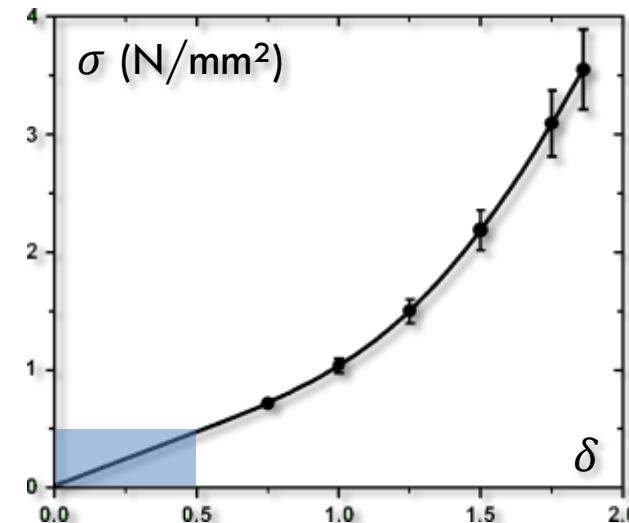
$$F_y = K\mathcal{H}(\partial_\ell y) + K_2[\mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 - \langle \mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 \rangle] \quad \langle \cdot \rangle = \lambda_0^{-1} \int_0^{\lambda_0} \cdot d\ell$$

- Expression obtenue en utilisant les équations non-linéaires de l'élasticité:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad \vec{u}: \text{champ de déformation}, \vec{\bar{u}}: \text{tenseur déformation}$$

- Loi de Hook: $\delta \simeq 0.2$ et $A/\lambda_0 < 0.15 \Rightarrow$ faibles étirement du substrat

$$\sigma_{ik} = \frac{E_S}{1 + \sigma_S} \left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} u_{jj} \delta_{ik} \right)$$



Substrat Elastique: équation non-linéaire

$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

« Grandes » déformations:

$$F_y = K\mathcal{H}(\partial_\ell y) + K_2[\mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 - \langle \mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 \rangle] \quad \langle \cdot \rangle = \lambda_0^{-1} \int_0^{\lambda_0} \cdot d\ell$$

- Expression obtenue en utilisant les équations non-linéaires de l'élasticité:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad \vec{u}: \text{champ de déformation}, \vec{\vec{u}}: \text{tenseur déformation}$$

- Loi de Hook:

$$\sigma_{ik} = \frac{E_S}{1 + \sigma_S} \left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} u_{jj} \delta_{ik} \right)$$

- Équation d'équilibre:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow \text{Équation pour } \vec{u} \text{ pour lequel on connaît les conditions aux bords à imposer}$$

Substrat Elastique: équation non-linéaire

$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

« Grandes » déformations:

$$F_y = K\mathcal{H}(\partial_\ell y) + K_2[\mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 - \langle \mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 \rangle] \quad \langle \cdot \rangle = \lambda_0^{-1} \int_0^{\lambda_0} \cdot d\ell$$

- Quand $\vec{u}$ est connu, on calcule $\vec{\sigma}$ et on obtient finalement F_y :

$F_y = \sigma_{yi} n_i$, évalué à la surface de la fondation.

$\vec{n}$: normale à la surface.

Substrat Elastique: équation non-linéaire

$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

« Grandes » déformations:

$$F_y = K\mathcal{H}(\partial_\ell y) + K_2[\mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 - \langle \mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 \rangle] \quad \langle \cdot \rangle = \lambda_0^{-1} \int_0^{\lambda_0} \cdot d\ell$$

- Quand $\vec{u}$ est connu, on calcule $\vec{\sigma}$ et on obtient finalement F_y :

$F_y = \sigma_{yi} n_i$, évalué à la surface de la fondation.

$\vec{n}$: normale à la surface.

- A l'ordre le plus bas (linéaire), F_y peut se calculer pour toute déformation de la surface
 $u_y(x, y = 0) = y(x)$

Substrat Elastique: équation non-linéaire

$$By'''' + Py'' + F_y = 0$$

« Grandes » déformations:

$$F_y = K\mathcal{H}(\partial_\ell y) + K_2[\mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 - \langle \mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 \rangle]$$

$$\langle \cdot \rangle = \lambda_0^{-1} \int_0^{\lambda_0} \cdot d\ell$$

- Quand $\vec{u}$ est connu, on calcule $\vec{\sigma}$ et on obtient finalement F_y :

$F_y = \sigma_{yi} n_i$, évalué à la surface de la fondation.

$\vec{n}$: normale à la surface.

- A l'ordre le plus bas (linéaire), F_y peut se calculer pour toute déformation de la surface
 $u_y(x, y = 0) = y(x)$
- A l'ordre suivant, F_y est calculé perturbativement en supposant que la forme de la surface est donnée par $y = A \cos kx + C \cos 2kx$, avec A d'ordre $\delta^{1/2}$ et C d'ordre δ

$$K_2 = E_s \frac{(1 - 2\sigma_s)(13 - 16\sigma_s)}{2(1 + \sigma_s)(3 - 4\sigma_s)^2}$$

Substrat Elastique: solution non-linéaire



$$By'''' + Py'' + K\mathcal{H}(\partial_\ell y) + K_2[\mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 - \langle \mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 \rangle] = 0$$

$$K = E_S \frac{2(1 - \sigma_S)}{(1 + \sigma_S)(3 - 4\sigma_S)}$$

$$K_2 = E_S \frac{(1 - 2\sigma_S)(13 - 16\sigma_S)}{2(1 + \sigma_S)(3 - 4\sigma_S)^2}$$

$$\langle \cdot \rangle = \lambda_0^{-1} \int_0^{\lambda_0} \cdot d\ell$$

Substrat Elastique: solution non-linéaire



$$By'''' + Py'' + K\mathcal{H}(\partial_\ell y) + K_2[\mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 - \langle \mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 \rangle] = 0$$

$$K = E_S \frac{2(1 - \sigma_S)}{(1 + \sigma_S)(3 - 4\sigma_S)}$$

$$K_2 = E_S \frac{(1 - 2\sigma_S)(13 - 16\sigma_S)}{2(1 + \sigma_S)(3 - 4\sigma_S)^2}$$

$$\langle \cdot \rangle = \lambda_0^{-1} \int_0^{\lambda_0} \cdot d\ell$$

On rescale avec les quantités identifiées lors de l'analyse linéaire:

$$u = \left(\frac{2k_0 K_2}{K} \right) y, \quad \bar{P} = \frac{P}{P_0}, \quad \bar{\ell} = k_0 \ell$$

$$u'''' + 3\bar{P}u'' + 2\mathcal{H}(u') + \mathcal{H}(u')^2 - \langle \mathcal{H}(u')^2 \rangle = 0$$

Substrat Elastique: solution non-linéaire



$$By'''' + Py'' + K\mathcal{H}(\partial_\ell y) + K_2[\mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 - \langle \mathcal{H}(\partial_\ell y)^2 \rangle] = 0$$

$$K = E_S \frac{2(1 - \sigma_S)}{(1 + \sigma_S)(3 - 4\sigma_S)}$$

$$K_2 = E_S \frac{(1 - 2\sigma_S)(13 - 16\sigma_S)}{2(1 + \sigma_S)(3 - 4\sigma_S)^2}$$

$$\langle \cdot \rangle = \lambda_0^{-1} \int_0^{\lambda_0} \cdot d\ell$$

On rescale avec les quantités identifiées lors de l'analyse linéaire:

$$u = \left(\frac{2k_0 K_2}{K} \right) y, \quad \bar{P} = \frac{P}{P_0}, \quad \bar{\ell} = k_0 \ell$$

$$u'''' + 3\bar{P}u'' + 2\mathcal{H}(u') + \mathcal{H}(u')^2 - \langle \mathcal{H}(u')^2 \rangle = 0$$

Guidé par les observations expérimentales où les profils restent périodiques et développent un mode sous-harmonique, on cherche des solutions en utilisant le développement suivant:

$$u(\bar{\ell}) = \sum_{j=1}^N c_j \cos\left(\frac{j}{2}\bar{\ell}\right)$$

On obtient alors un système de N équations algébriques non-linéaires pour $N + 1$ inconnues. Les N coefficient c_j s'expriment alors en fonction de $\bar{P}$ (comme pour un substrat liquide). La condition d'inextensibilité permet de relier $\bar{P}$ à δ .

Substrat Elastique: solution non-linéaire



$$u'''' + 3\bar{P}u'' + 2\mathcal{H}(u') + \mathcal{H}(u')^2 - \langle \mathcal{H}(u')^2 \rangle = 0$$

$$u(\bar{\ell}) = \sum_{j=1}^N c_j \cos\left(\frac{j}{2}\bar{\ell}\right)$$

$$u = \left(\frac{2k_0K_2}{K}\right)y$$

Substrat Elastique: solution non-linéaire



$$u'''' + 3\bar{P}u'' + 2\mathcal{H}(u') + \mathcal{H}(u')^2 - \langle \mathcal{H}(u')^2 \rangle = 0$$

$$u(\bar{\ell}) = \sum_{j=1}^N c_j \cos\left(\frac{j}{2}\bar{\ell}\right)$$

$N = 2$: $u = c_1 \cos(\bar{\ell}/2) + c_2 \cos \bar{\ell}$

$$u = \left(\frac{2k_0 K_2}{K}\right)y$$

$c_1 = 0, \bar{P} = 1 \Rightarrow$ solution linéaire

$$c_1 = \pm \sqrt{6(\bar{P} - 1)c_2} \quad c_2 = \frac{12\bar{P} - 17}{8} \Rightarrow \boxed{c_1 = \pm \sqrt{(5 + 8c_2)c_2/2} \quad \bar{P} = 1 + \frac{5 + 8c_2}{12}}$$

Physiquement, le mode sous-harmonique $\cos \bar{\ell}/2$ ne peut émerger que s'il décroît l'énergie
 $\Rightarrow \bar{P} \leq 1$ et si c_1 est réel.

Quand on comprime le système c_2 croît comme $\delta^{1/2}$.

Si $c_2 > 0 \Rightarrow \bar{P} > 1$. Pas d'émergence de mode sous-harmonique.

Si $c_2 < 0 \Rightarrow \bar{P} < 1$ quand l'amplitude du mode harmonique $\cos \bar{\ell}$ est suffisamment grande (en module): $-c_2 \geq 5/8$. **Sélection du signe de c_2 due à la brisure explicite de symétrie.**

Substrat Elastique: solution non-linéaire



$$u'''' + 3\bar{P}u'' + 2\mathcal{H}(u') + \mathcal{H}(u')^2 - \langle \mathcal{H}(u')^2 \rangle = 0$$

$$u(\bar{\ell}) = \sum_{j=1}^N c_j \cos\left(\frac{j}{2}\bar{\ell}\right)$$

$N = 2$: $u = c_1 \cos(\bar{\ell}/2) + c_2 \cos \bar{\ell}$

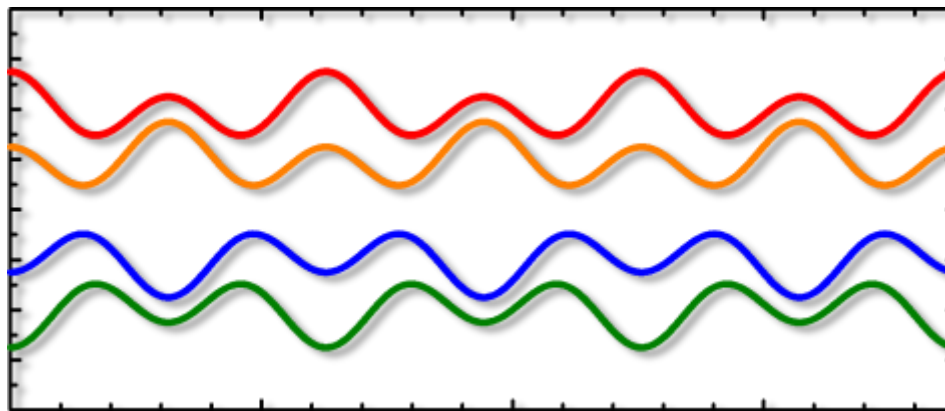
$$u = \left(\frac{2k_0 K_2}{K}\right) y$$

$c_1 = 0, \bar{P} = 1 \Rightarrow$ solution linéaire

$$c_1 = \pm \sqrt{6(\bar{P} - 1)c_2} \quad c_2 = \frac{12\bar{P} - 17}{8} \Rightarrow \quad c_1 = \pm \sqrt{(5 + 8c_2)c_2/2} \quad \bar{P} = 1 + \frac{5 + 8c_2}{12}$$

$c_2 > 0, c_1 > 0$

$c_2 > 0, c_1 < 0$



$c_2 < 0, c_1 > 0$

$c_2 < 0, c_1 < 0$

Substrat Elastique: solution non-linéaire



$$u'''' + 3\bar{P}u'' + 2\mathcal{H}(u') + \mathcal{H}(u')^2 - \langle \mathcal{H}(u')^2 \rangle = 0$$

$$u(\bar{\ell}) = \sum_{j=1}^N c_j \cos\left(\frac{j}{2}\bar{\ell}\right)$$

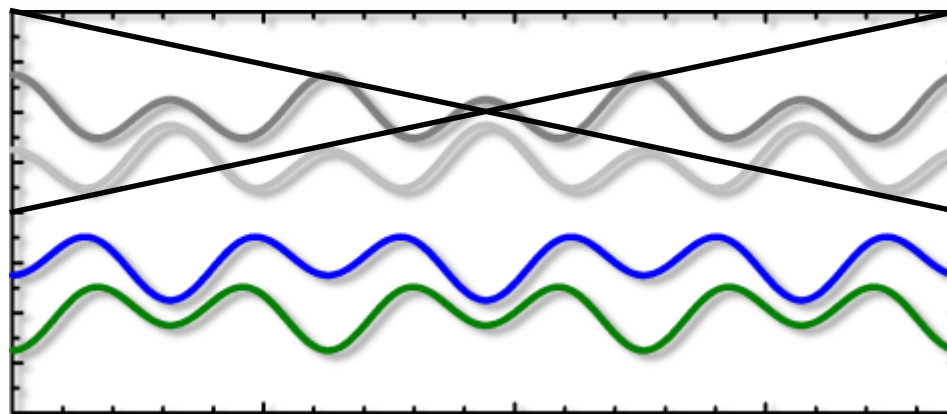
$N = 2$: $u = c_1 \cos(\bar{\ell}/2) + c_2 \cos \bar{\ell}$

$$u = \left(\frac{2k_0 K_2}{K}\right) y$$

$c_1 = 0, \bar{P} = 1 \Rightarrow$ solution linéaire

$$c_1 = \pm \sqrt{6(\bar{P} - 1)c_2} \quad c_2 = \frac{12\bar{P} - 17}{8} \Rightarrow \quad c_1 = \pm \sqrt{(5 + 8c_2)c_2/2} \quad \bar{P} = 1 + \frac{5 + 8c_2}{12}$$

**Pas observé
expérimentalement**



$$c_2 < 0, c_1 > 0$$

$$c_2 < 0, c_1 < 0$$

En plus de prédire l'émergence d'un mode sous-harmonique, le modèle sélectionne aussi la bonne configuration avec les focalisations orientées vers le substrat.

Substrat Elastique: solution non-linéaire



$$u'''' + 3\bar{P}u'' + 2\mathcal{H}(u') + \mathcal{H}(u')^2 - \langle \mathcal{H}(u')^2 \rangle = 0$$

$$u(\bar{\ell}) = \sum_{j=1}^N c_j \cos\left(\frac{j}{2}\bar{\ell}\right)$$

$N = 2$: $u = c_1 \cos(\bar{\ell}/2) + c_2 \cos \bar{\ell}$

$$u = \left(\frac{2k_0 K_2}{K}\right)y$$

$c_1 = 0, \bar{P} = 1 \Rightarrow$ solution linéaire

$$c_1 = \pm \sqrt{6(\bar{P} - 1)c_2} \quad c_2 = \frac{12\bar{P} - 17}{8} \Rightarrow \quad c_1 = \pm \sqrt{(5 + 8c_2)c_2/2} \quad \bar{P} = 1 + \frac{5 + 8c_2}{12}$$

A cause de l'invariance pas translation il n'y a normalement pas de différence entre $\cos x$ et $-\cos x$!! **Pourquoi une sélection dans le signe de c_2 ?**

Substrat Elastique: solution non-linéaire



$$u'''' + 3\bar{P}u'' + 2\mathcal{H}(u') + \mathcal{H}(u')^2 - \langle \mathcal{H}(u')^2 \rangle = 0$$

$$\underline{N=2}: \quad u = c_1 \cos(\bar{\ell}/2) + c_2 \cos \bar{\ell}$$

$$c_1 = 0, \bar{P} = 1 \Rightarrow \text{solution linéaire}$$

$$c_1 = \pm \sqrt{6(\bar{P} - 1)c_2} \quad c_2 = \frac{12\bar{P} - 17}{8} \Rightarrow \quad c_1 = \pm \sqrt{(5 + 8c_2)c_2/2} \quad \bar{P} = 1 + \frac{5 + 8c_2}{12}$$

A cause de l'invariance pas translation il n'y a normalement pas de différence entre $\cos x$ et $-\cos x$!! **Pourquoi une sélection dans le signe de c_2 ?**

L'invariance par translation (choix arbitraire de la position de l'origine) a été invoquée pour utiliser, **sans perte de généralité**, un développement n'impliquant que des modes cosinusoidaux.

Quand le profil minimisant l'énergie a été identifié avec ce choix particulier d'origine, on peut utiliser l'invariance par translation pour générer d'autres profils équivalents.

$$u(\bar{\ell} - \pi) = c_1 \sin(\bar{\ell}/2) - c_2 \cos \bar{\ell}$$

$$u(\bar{\ell}) = \sum_{j=1}^N c_j \cos\left(\frac{j}{2}\bar{\ell}\right)$$

$$u = \left(\frac{2k_0 K_2}{K}\right)y$$

Substrat Elastique: solution non-linéaire



$$u'''' + 3\bar{P}u'' + 2\mathcal{H}(u') + \mathcal{H}(u')^2 - \langle \mathcal{H}(u')^2 \rangle = 0$$

$$\underline{N=2}: \quad u = c_1 \cos(\bar{\ell}/2) + c_2 \cos \bar{\ell}$$

$$c_1 = 0, \bar{P} = 1 \Rightarrow \text{solution linéaire}$$

$$c_1 = \pm \sqrt{6(\bar{P} - 1)c_2} \quad c_2 = \frac{12\bar{P} - 17}{8} \Rightarrow \quad c_1 = \pm \sqrt{(5 + 8c_2)c_2/2} \quad \bar{P} = 1 + \frac{5 + 8c_2}{12}$$

A cause de l'invariance pas translation il n'y a normalement pas de différence entre $\cos x$ et $-\cos x$!! **Pourquoi une sélection dans le signe de c_2 ?**

Donc $c_2 \cos \bar{\ell}$ avec $c_2 < 0$ est instable par rapport à l'émergence d'un mode $\cos(\bar{\ell}/2)$

Donc $c_2 \cos \bar{\ell}$ avec $c_2 > 0$ est instable par rapport à l'émergence d'un mode $\sin(\bar{\ell}/2)$

Profils identiques mais translatés.

$$u(\bar{\ell}) = \sum_{j=1}^N c_j \cos\left(\frac{j}{2}\bar{\ell}\right)$$

$$u = \left(\frac{2k_0 K_2}{K}\right)y$$

Substrat Elastique: solution non-linéaire



$$u'''' + 3\bar{P}u'' + 2\mathcal{H}(u') + \mathcal{H}(u')^2 - \langle \mathcal{H}(u')^2 \rangle = 0$$

$$u(\bar{\ell}) = \sum_{j=1}^N c_j \cos\left(\frac{j}{2}\bar{\ell}\right)$$

$$\underline{N=2}: \quad u = c_1 \cos(\bar{\ell}/2) + c_2 \cos \bar{\ell}$$

$$u = \left(\frac{2k_0 K_2}{K}\right) y$$

$$c_1 = 0, \bar{P} = 1 \Rightarrow \text{solution linéaire}$$

$$c_1 = \pm \sqrt{6(\bar{P} - 1)c_2} \quad c_2 = \frac{12\bar{P} - 17}{8} \Rightarrow \quad c_1 = \pm \sqrt{(5 + 8c_2)c_2/2} \quad \bar{P} = 1 + \frac{5 + 8c_2}{12}$$

$$\text{Si } -c_2 \geq 5/8 \Rightarrow \bar{P} < 1$$

En retournant aux variables initiales, l'instabilité secondaire émerge si l'amplitude A du mode harmonique excède la valeur

$$|c_2| = \frac{2k_0 K_2}{K} |A| \geq \frac{5}{8} \Rightarrow |A| \geq \frac{5\lambda_0}{32\pi} \frac{K}{K_2} \quad |A| = \frac{\lambda_0}{\pi} \delta^{1/2}$$

Ou encore quand le taux de compression excède la valeur

$$\delta_2 = \left(\frac{5}{32} \frac{K}{K_2}\right)^2$$

Substrat Elastique: solution non-linéaire



$$u'''' + 3\bar{P}u'' + 2\mathcal{H}(u') + \mathcal{H}(u')^2 - \langle \mathcal{H}(u')^2 \rangle = 0$$

$$u(\bar{\ell}) = \sum_{j=1}^N c_j \cos\left(\frac{j}{2}\bar{\ell}\right)$$

$N = 2$: $u = c_1 \cos(\bar{\ell}/2) + c_2 \cos \bar{\ell}$

$$u = \left(\frac{2k_0 K_2}{K}\right)y$$

$c_1 = 0, \bar{P} = 1 \Rightarrow$ solution linéaire

$$c_1 = \pm \sqrt{6(\bar{P} - 1)c_2} \quad c_2 = \frac{12\bar{P} - 17}{8} \Rightarrow \quad c_1 = \pm \sqrt{(5 + 8c_2)c_2/2} \quad \bar{P} = 1 + \frac{5 + 8c_2}{12}$$

Expérimentalement on trouve que $\delta_2 \simeq 0.2$

$$\delta_2 = \left(\frac{5}{32} \frac{K}{K_2}\right)^2 \simeq 0.2 \Rightarrow \frac{K_2}{K} \simeq 0.35 \Rightarrow \sigma_S \simeq 0.41$$

Substrat Elastique: solution non-linéaire



$$u'''' + 3\bar{P}u'' + 2\mathcal{H}(u') + \mathcal{H}(u')^2 - \langle \mathcal{H}(u')^2 \rangle = 0$$

$$u(\bar{\ell}) = \sum_{j=1}^N c_j \cos\left(\frac{j}{2}\bar{\ell}\right)$$

$N = 8$:

$$u = \left(\frac{2k_0K_2}{K}\right)y$$

Valeur corrigée de la valeur critique de c_2 pour laquelle l'instabilité secondaire apparaît:

$$-c_2 \simeq 0.42$$

En répétant ce qui vient d'être fait avec cette nouvelle valeur, on obtient une valeur corrigée du taux de compression critique:

$$\delta_2 = \left(0.105 \frac{K}{K_2}\right)^2$$

En utilisant la valeur expérimentale $\delta_2 \simeq 0.2$, on trouve

$$\delta_2 = \left(0.105 \frac{K}{K_2}\right)^2 \simeq 0.2 \Rightarrow \frac{K_2}{K} \simeq 0.25 \Rightarrow \sigma_S \simeq 0.44$$

Littérature: $0.45 \leq \sigma_S \leq 0.48$

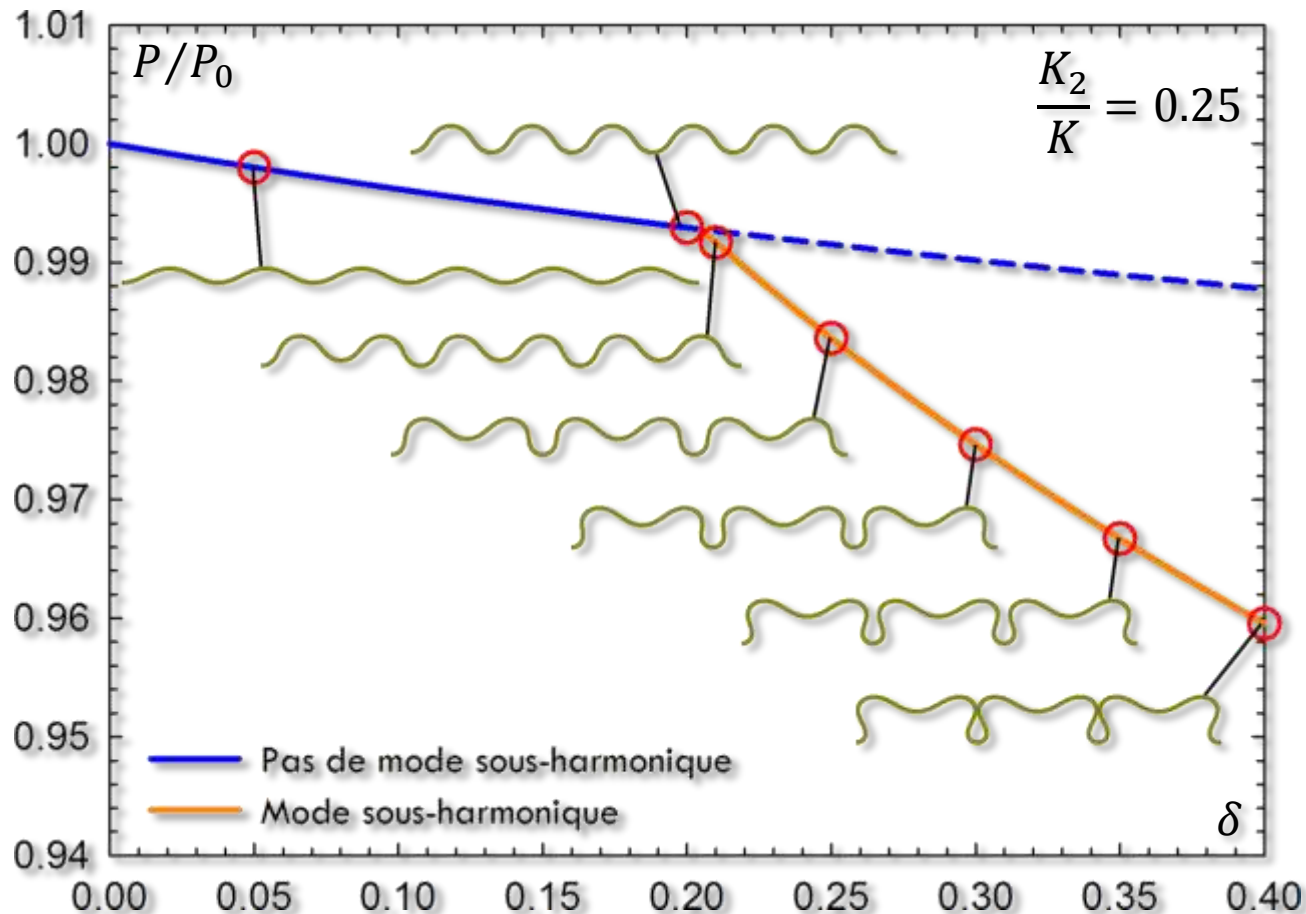
Substrat Elastique: solution non-linéaire



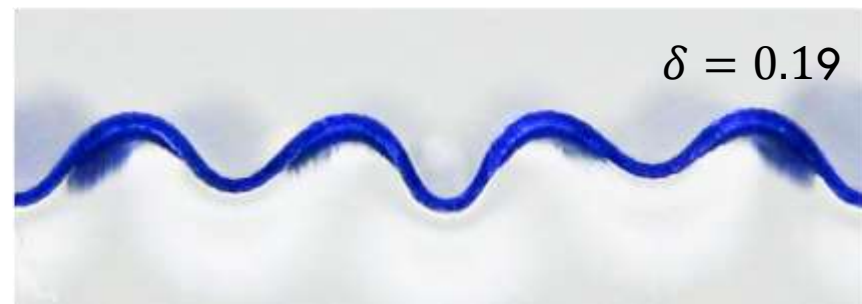
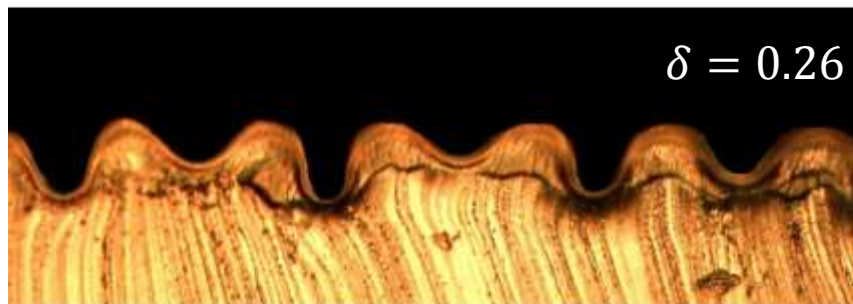
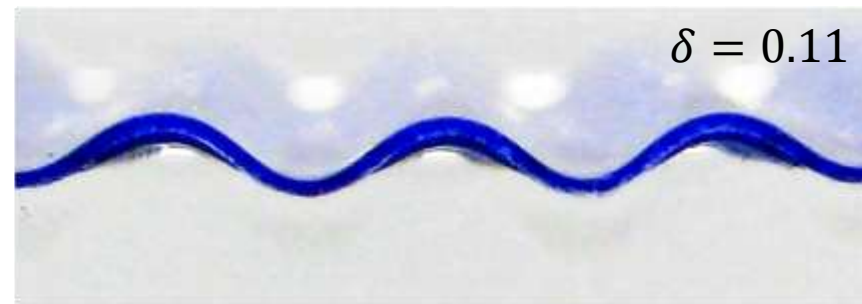
$$u'''' + 3\bar{P}u'' + 2\mathcal{H}(u') + \mathcal{H}(u')^2 - \langle \mathcal{H}(u')^2 \rangle = 0$$

$$u(\bar{\ell}) = \sum_{j=1}^N c_j \cos\left(\frac{j}{2}\bar{\ell}\right)$$

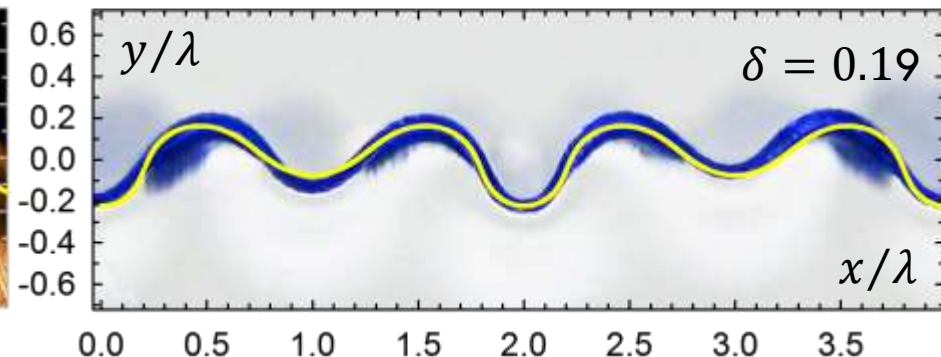
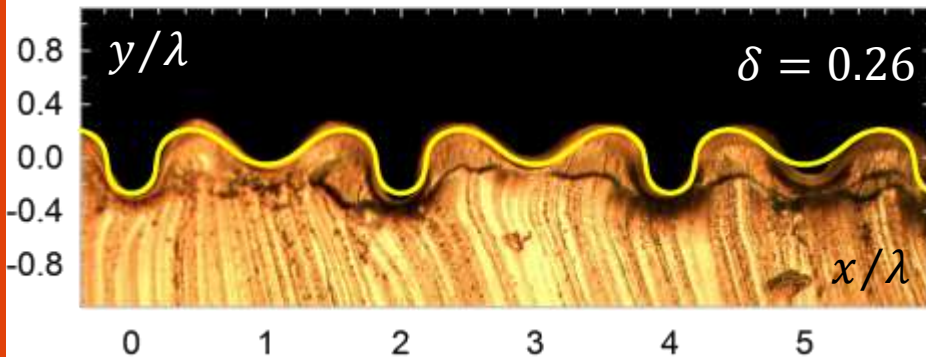
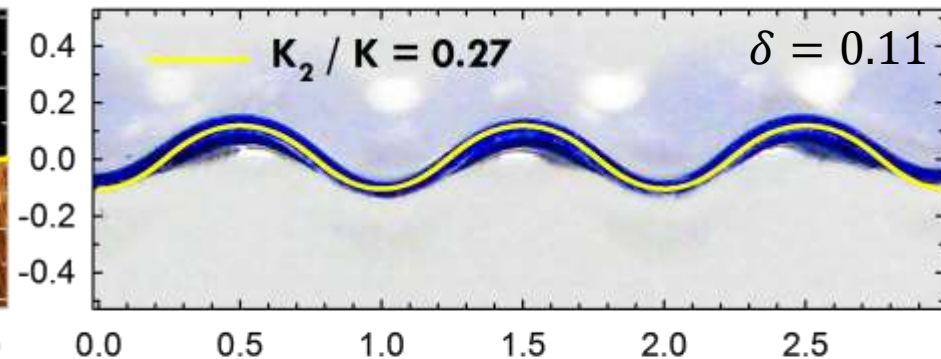
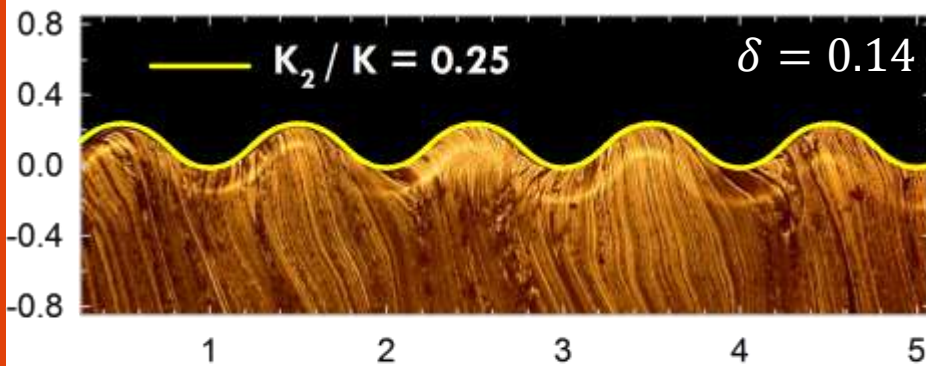
$N = 8$:



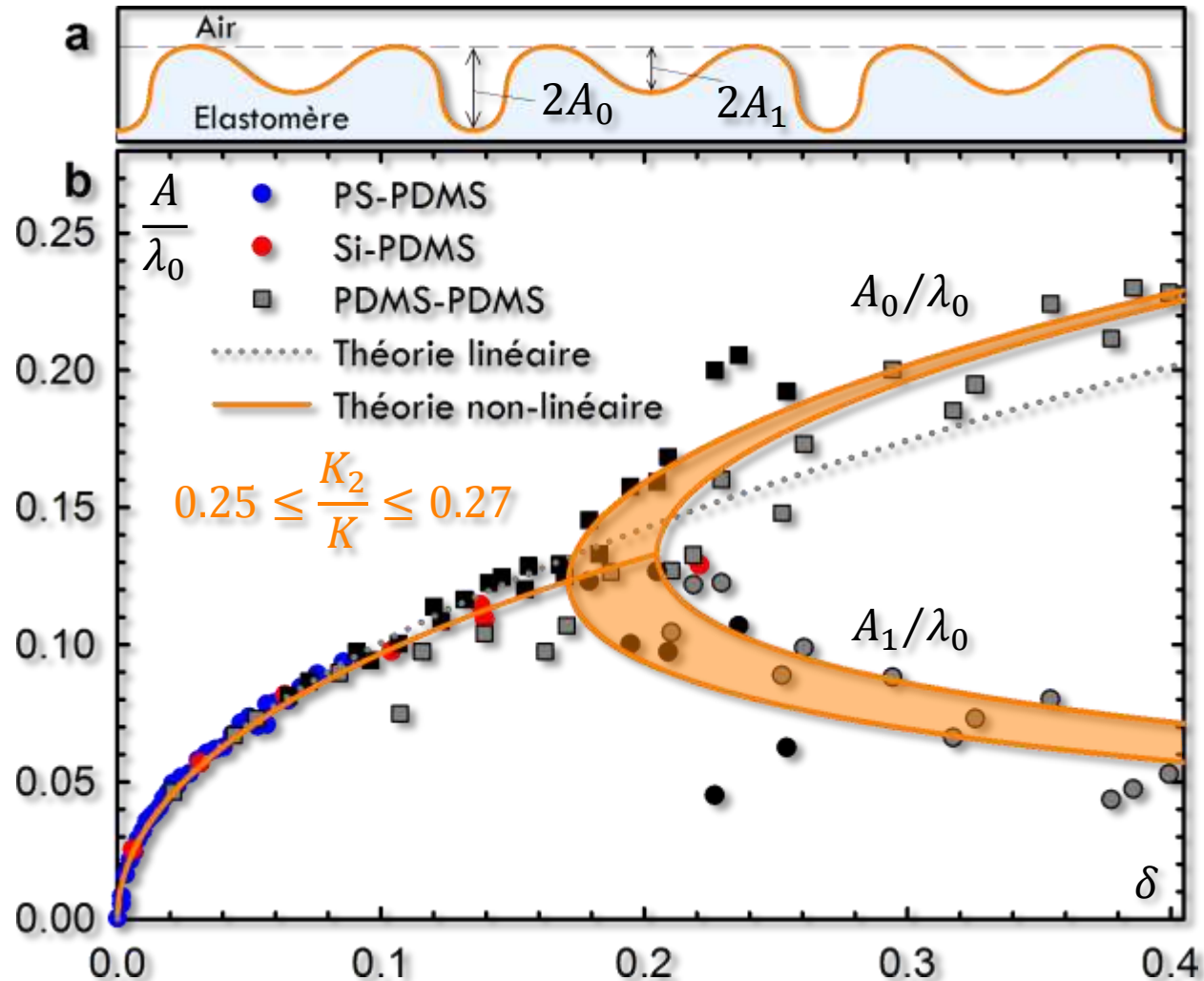
Substrat Elastique: comparaison théorie/expériences



Substrat Elastique: comparaison théorie/expériences

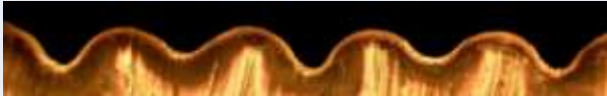


Substrat Elastique: comparaison théorie/expériences



Résumé et comparaison



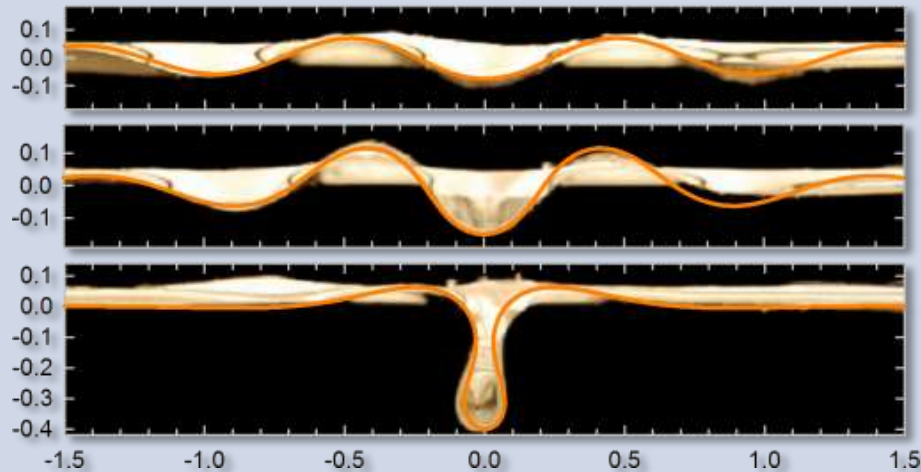
Substrat liquide	Substrat élastique
$\Delta/\lambda_0 < 0.3$: déformation sinusoïdale $\lambda_0 = 2\pi (B/\rho g)^{1/4} \sim h^{\frac{3}{4}} (E/\rho g)^{\frac{1}{4}}$ 	$\delta < 0.2$: déformation sinusoïdale $\lambda_0 = 2\pi (2B/K)^{1/3} \sim h (E_M/E_S)^{\frac{1}{3}}$ 
$0.3 < \Delta/\lambda_0 < 0.7$: amplitude des ondulations décroît sauf dans une région de taille de l'ordre de λ_0 	$\delta \simeq 0.2$: émergence d'une instabilité secondaire de doublement de période 
$\Delta/\lambda_0 > 0.7$: profil essentiellement plat sauf dans une région de taille λ_0 où l'entièreté de la déformation est localisée 	$\delta > 0.2$: focalisation périodique de la membrane 
La compression est limitée à $\Delta \simeq \lambda_0$, pour $L \gg \lambda_0 \Rightarrow$ focalisation pour $\delta \rightarrow 0$	Pas de limite pour Δ, seul $\delta = \Delta/L$ joue un rôle

Résumé et comparaison



Substrat liquide

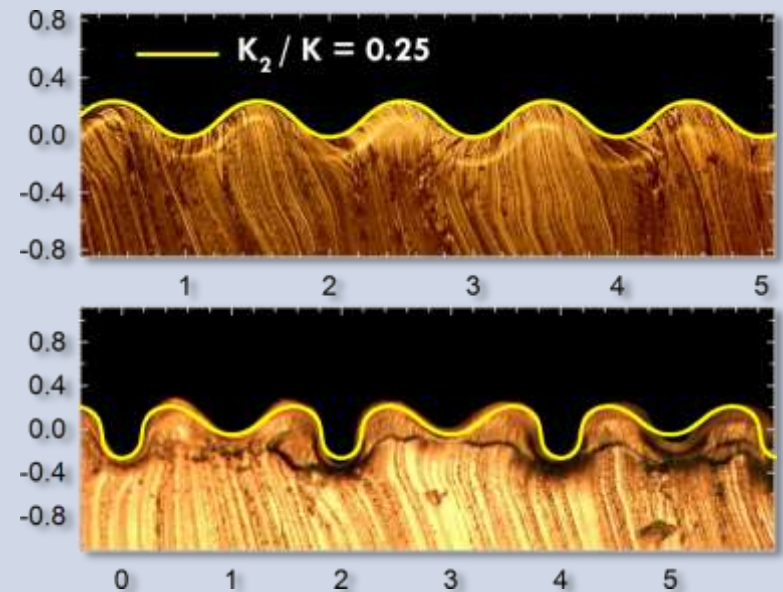
Solution exacte pour membrane infinie



Pas de transition secondaire pour une membrane infinie

Substrat élastique

Solution perturbative pour membrane infinie



Transition secondaire du second ordre avec l'émergence d'un doublement de période (mode sous-harmonique)

Références



- Membrane confinée sur liquide
 - L. Pocivavsek, R. Dellsy, A. Kern, S. Johnson, B. Lin, K.Y.C. Lee, E. Cerda, Science **320**, 912 (2008)
 - H. Diamant et T.A. Witten, Phys. Rev. Lett. **107**, 164302 (2011)
- Membrane confinée sur élastomère
 - F. Brau, H. Vandeparre, A. Sabbah, C. Poulard, A. Boudaoud et P. Damman, Nature Physics **7**, 56 (2011)