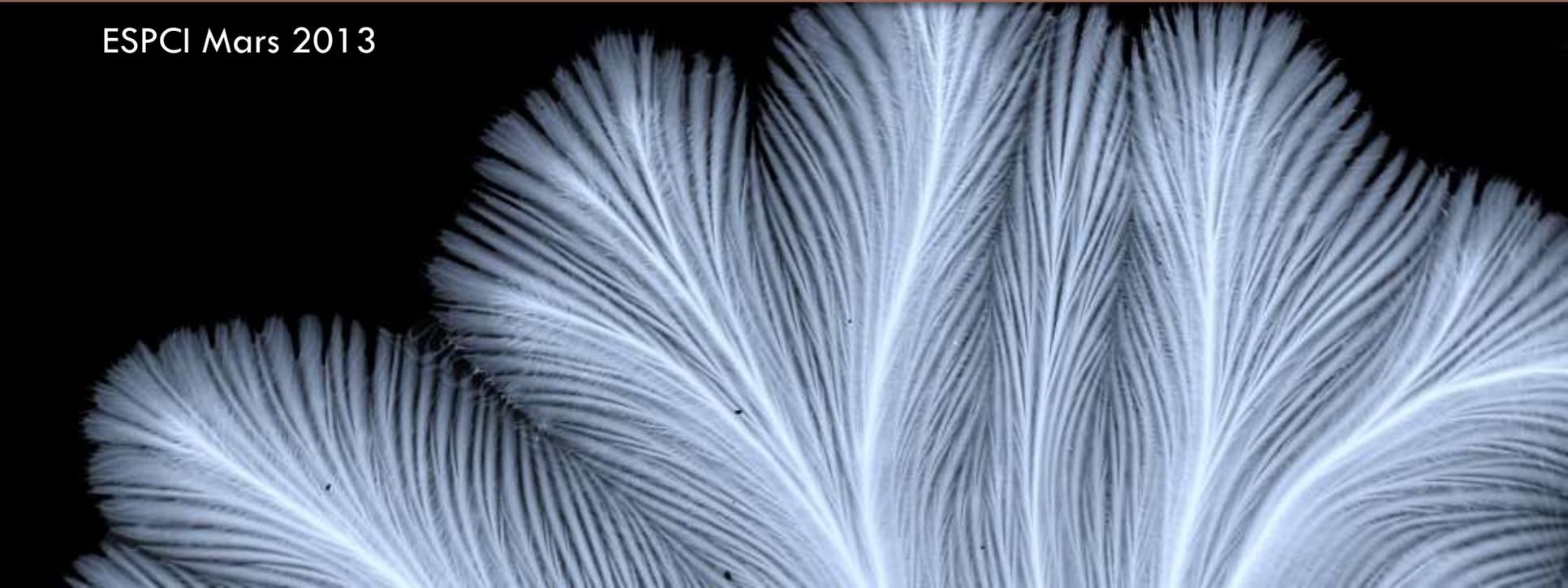




Patterns et mécanique

ESPCI Mars 2013



Plan



- Introduction:
 - Patterns naturels
 - Patterns induit par des forces mécaniques
- Notions d'élasticité
- Tige/membrane libre sous contrainte:
 - Stabilité d'une tige élastique (1D)
 - Hiérarchie de plis (2D)
- Membrane confinée sur substrat: influence de la rhéologie
 - Substrat liquide
 - Substrat élastique

Plan

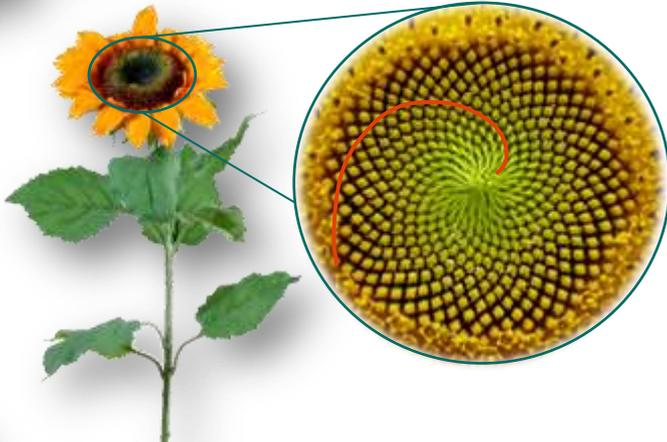
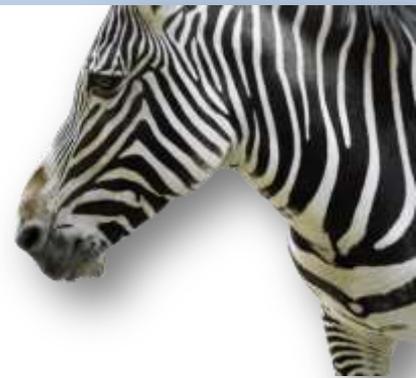


- Introduction:
 - Patterns naturels
 - Patterns induit par des forces mécaniques
- Notions d'élasticité
- Tige/membrane libre sous contrainte:
 - Stabilité d'une tige élastique (1D)
 - Hiérarchie de plis (2D)
- Membrane confinée sur substrat: influence de la rhéologie
 - Substrat liquide
 - Substrat élastique

Pattern dans la Nature



Pattern dans la Nature



Pattern dans la Nature



Pattern dans la Nature



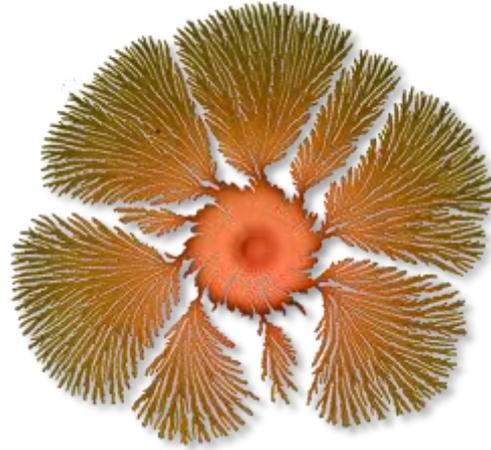
Pattern dans la Nature



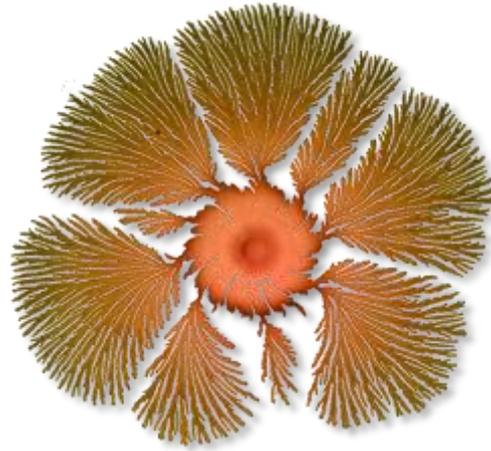
Pattern dans la Nature



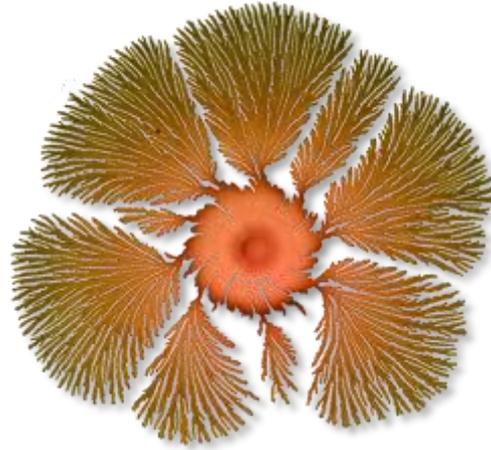
Pattern dans la Nature



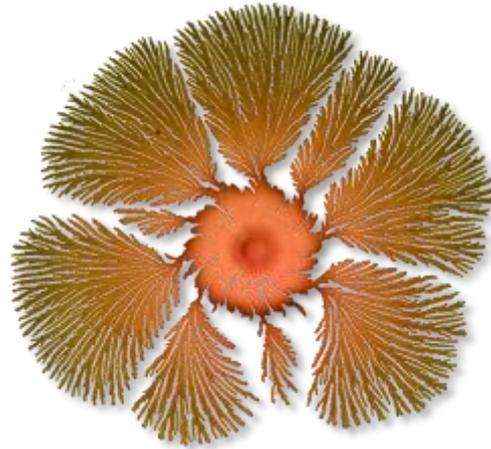
Pattern dans la Nature



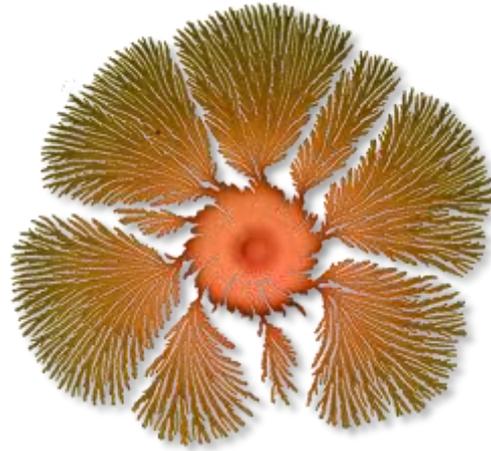
Pattern dans la Nature



Pattern dans la Nature



Pattern dans la Nature



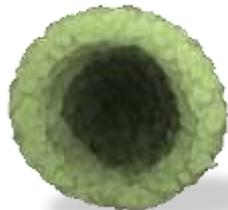
Patterns et mécanique: force externe



Patterns et mécanique: force externe



Patterns et mécanique: séchage/dessiccation



Patterns et mécanique: croissance



Plan

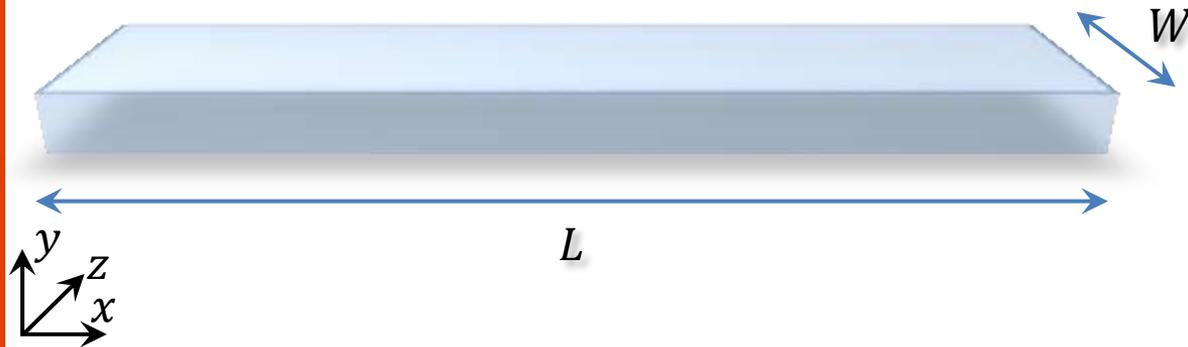


- Introduction:
 - Patterns naturels
 - Patterns induit par des forces mécaniques
- Notions d'élasticité
- Tige/membrane libre sous contrainte:
 - Stabilité d'une tige élastique (1D)
 - Hiérarchie de plis (2D)
- Membrane confinée sur substrat: influence de la rhéologie
 - Substrat liquide
 - Substrat élastique

Notions d'élasticité

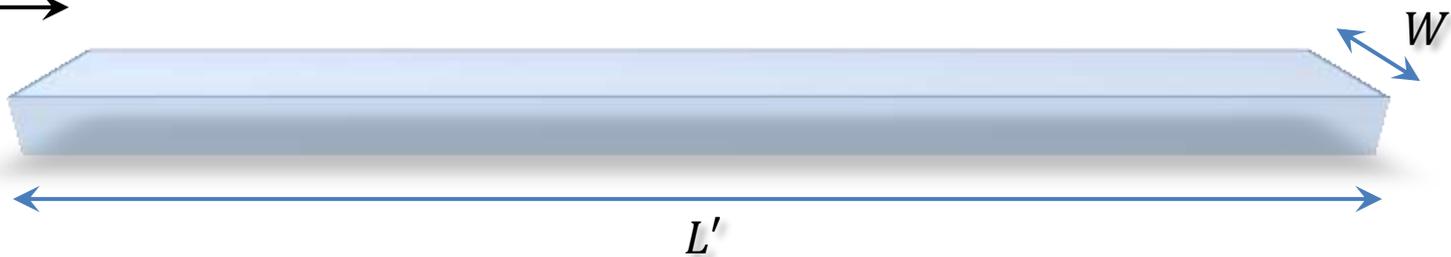


• Energie d'étirement/compression d'une plaque mince



$$\delta = \frac{L' - L}{L}$$

$$\nu = \frac{(W - W')/W}{(L' - L)/L}$$



$$y \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right]$$

$$U_S = \frac{E}{2} \iiint \delta^2 dx dy dz = \frac{Eh}{2} \iint \delta^2 dx dz$$

E : Module de Young.

Mesure comment un matériau résiste à une déformation

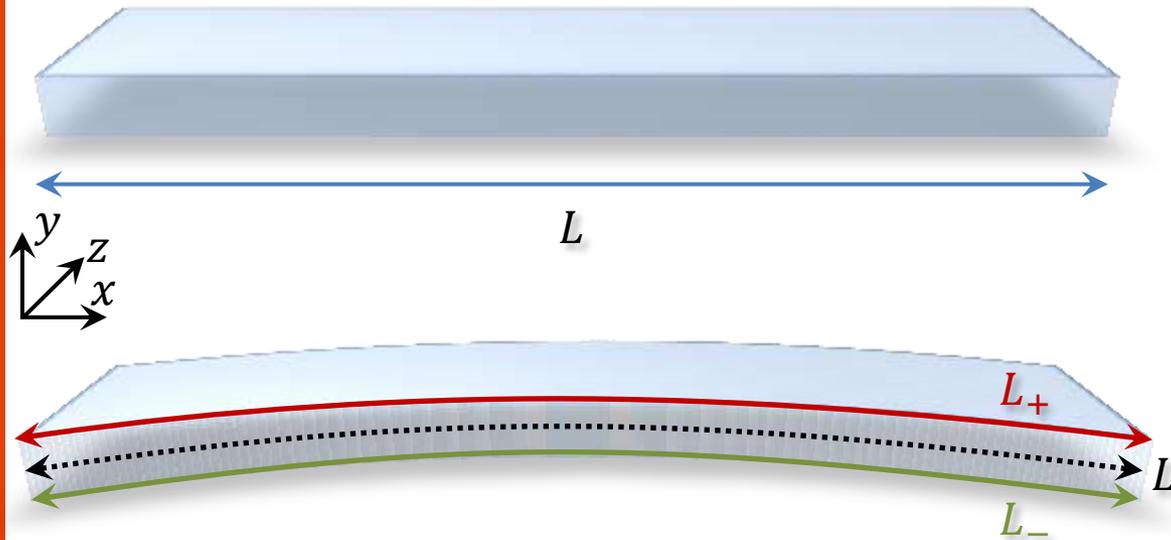
ν : Coefficient de Poisson.

Caractérise la contraction perpendiculaire à la direction de la contrainte

Notions d'élasticité



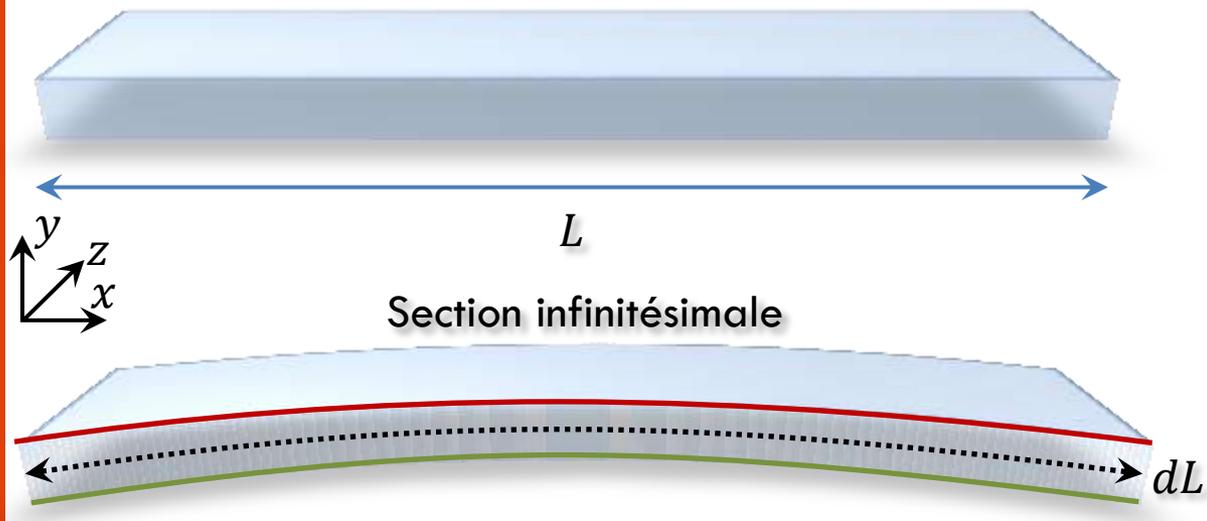
- Energie de courbure d'une plaque mince



Notions d'élasticité



- Energie de courbure d'une plaque mince



$$\delta = \frac{dL' - dL}{dL}$$

$$dL = \alpha R, \quad dL' = \alpha(R + y)$$

$$y \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right], \quad \delta = \frac{y}{R}$$

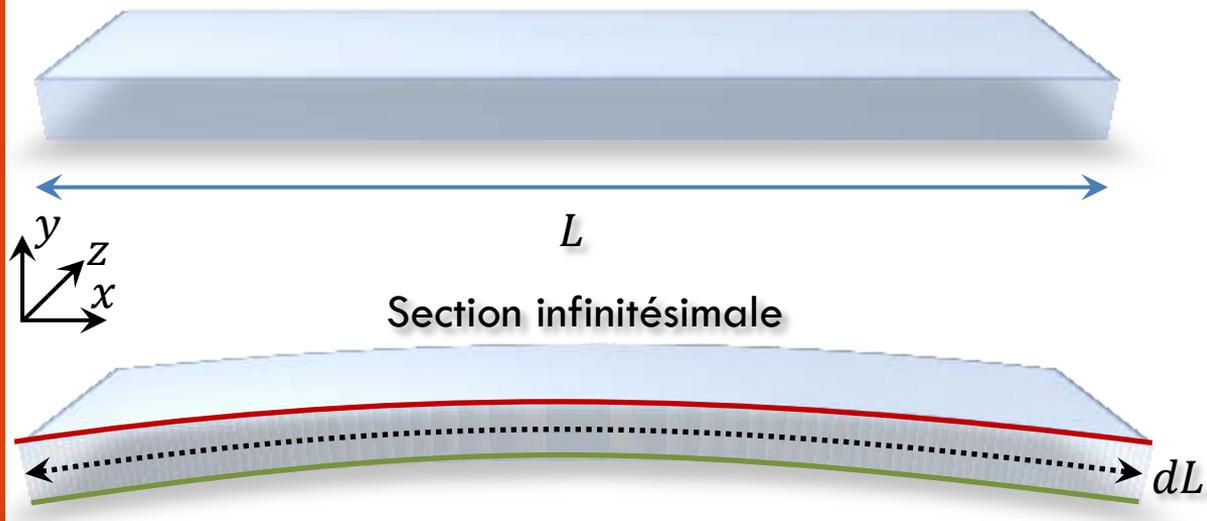
$$U_B = \frac{E}{2} \iiint \delta^2 dx dy dz = \frac{E}{2} \iint dx dz \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{y}{R}\right)^2 dy = \frac{Eh^3}{24} \iint \kappa^2 dx dz \quad \kappa = R^{-1}$$

$$U_B = \frac{B}{2} \iint \kappa^2 dS, \quad B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \text{ Module de flexion}$$

Notions d'élasticité



- Energie de courbure d'une plaque mince



$$\delta = \frac{dL' - dL}{dL}$$

$$dL = \alpha R, \quad dL' = \alpha(R + y)$$

$$y \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right], \quad \delta = \frac{y}{R}$$

- Pour une tige:

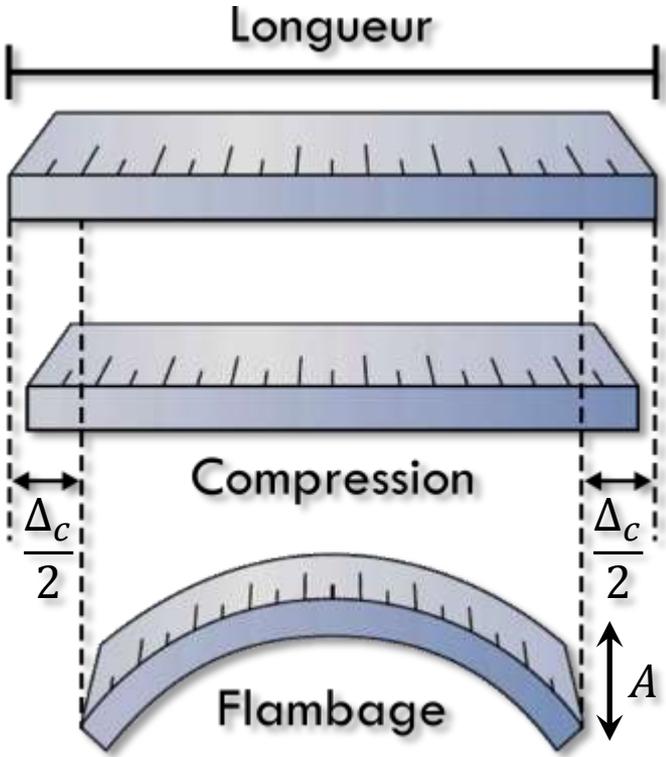
$$U_B = \frac{B}{2} \int \kappa^2 d\ell, \quad B = EI$$

$$I_y = \int x^2 dS = \text{Moment quadratique}$$

Pour section circulaire

$$I = \int_0^R \int_0^{2\pi} (r \cos \theta)^2 r dr d\theta = \frac{\pi}{4} R^4$$

Stretching vs Bending pour une feuille mince



- Energie de stretching $\sim h$
- Energie de bending $\sim h^3$
- L'état de compression est instable par rapport à l'état de bending (si compatible avec conditions aux bords). Cette instabilité est d'autant plus marquée que la feuille est mince
- Estimation du taux de compression critique
 - On suppose que tout le stretching est relâché après le flambage: $A \sim L\sqrt{\delta_c}$ ($\delta = \Delta/L$)

$$U_S \sim Eh\delta_c^2 S$$

$$U_B \sim Eh^3\kappa^2 S \sim Eh^3 \left(\frac{A}{L^2}\right)^2 S \sim Eh^3 \frac{\delta_c}{L^2} S$$

$$\delta_c \sim \left(\frac{h}{L}\right)^2$$

$$h \sim 100 \mu\text{m} \quad L \sim 10 \text{ cm} \quad \rightarrow \delta_c \sim 10^{-6}$$

Notions d'élasticité: équation déformation

- On considère une déformation sans étirement
- La tige se déforme dans un plan



Notions d'élasticité: équation déformation

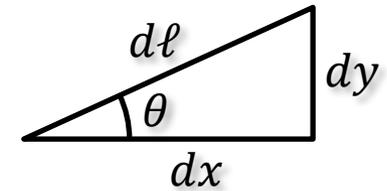
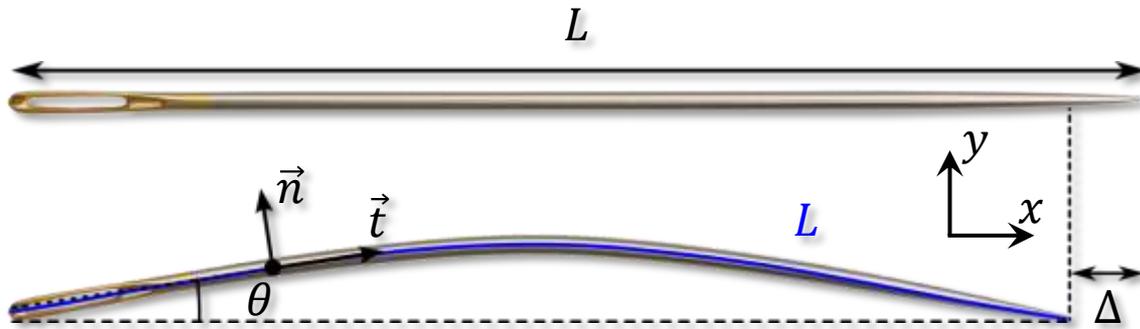
- On considère une déformation sans étirement
- La tige se déforme dans un plan



Notions d'élasticité: équation déformation



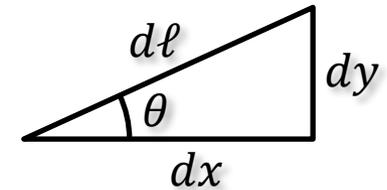
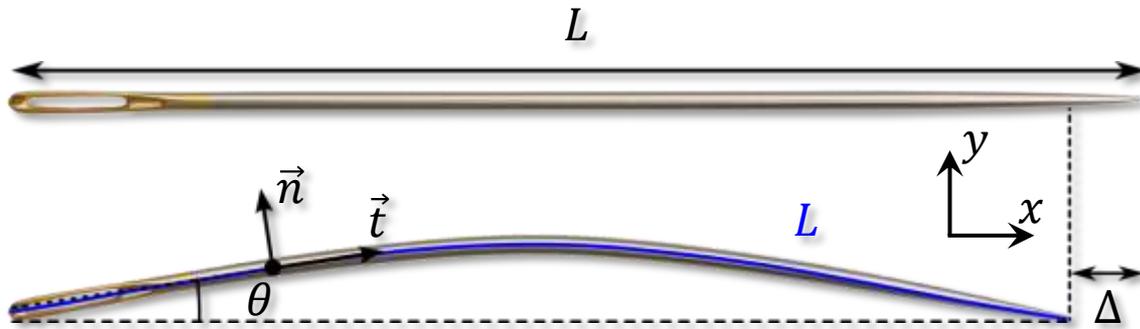
- On considère une déformation sans étirement
- La tige se déforme dans un plan



Notions d'élasticité: équation déformation



- On considère une déformation sans étirement
- La tige se déforme dans un plan



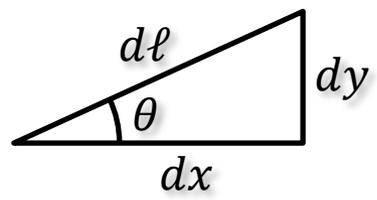
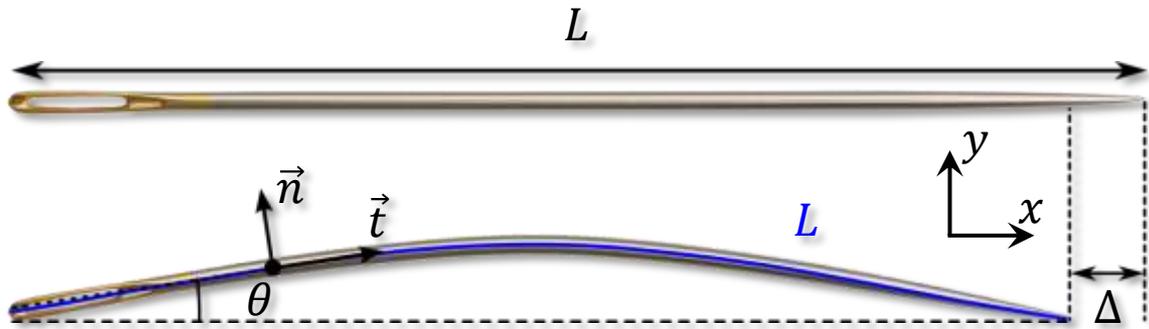
$$(x, y) = \left(\int_0^\ell \cos \theta(\ell') d\ell', \int_0^\ell \sin \theta(\ell') d\ell' \right), \ell \in [0, L]$$

$$dx = d\ell \cos \theta \quad dy = d\ell \sin \theta$$

Notions d'élasticité: équation déformation



- On considère une déformation sans étirement
- La tige se déforme dans un plan



$$U_B = \frac{B}{2} \int \kappa^2 d\ell$$

$$\kappa = \frac{d^2y/dx^2}{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}}$$

$$dx = d\ell \cos \theta \quad dy = d\ell \sin \theta$$

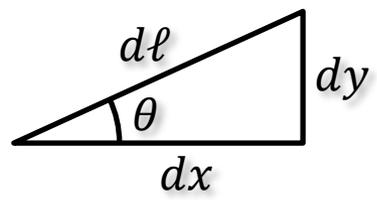
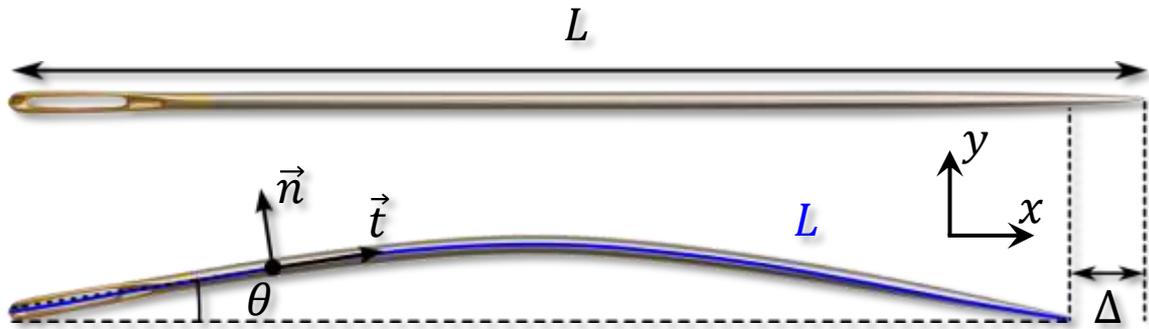
$$U_B = \frac{B}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{d\ell} \right)^2 d\ell$$

$$L - \Delta = \int_0^L \cos \theta d\ell \Rightarrow \int_0^L \left(1 - \cos \theta - \frac{\Delta}{L} \right) d\ell = 0$$

Notions d'élasticité: équation déformation



- On considère une déformation sans étirement
- La tige se déforme dans un plan



$$U_B = \frac{B}{2} \int \kappa^2 d\ell$$

$$\kappa = \frac{d^2y/dx^2}{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}}$$

$$dx = d\ell \cos \theta \quad dy = d\ell \sin \theta$$

$$U_B = \frac{B}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{d\ell} \right)^2 d\ell$$

$$L - \Delta = \int_0^L \cos \theta d\ell \Rightarrow \int_0^L \left(1 - \cos \theta - \frac{\Delta}{L} \right) d\ell = 0$$

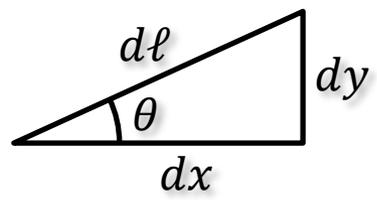
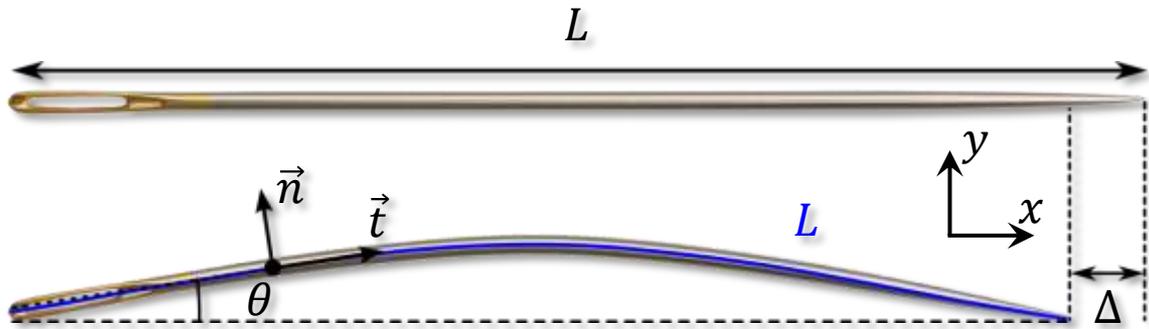
$$U = \int_0^L \left[\frac{B}{2} \theta'^2 - P \left(1 - \cos \theta - \frac{\Delta}{L} \right) \right] d\ell = \int_0^L H(\theta, \theta') d\ell$$

Pour une membrane, U est une énergie par unité de longueur transverse le long de l'axe z

Notions d'élasticité: équation déformation



- On considère une déformation sans étirement
- La tige se déforme dans un plan



$$U_B = \frac{B}{2} \int \kappa^2 d\ell \quad \kappa = \frac{d^2y/dx^2}{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}} \quad dx = d\ell \cos \theta \quad dy = d\ell \sin \theta$$

$$U_B = \frac{B}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{d\ell} \right)^2 d\ell \quad L - \Delta = \int_0^L \cos \theta d\ell \Rightarrow \int_0^L \left(1 - \cos \theta - \frac{\Delta}{L} \right) d\ell = 0$$

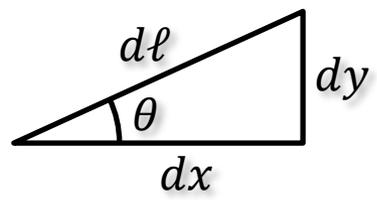
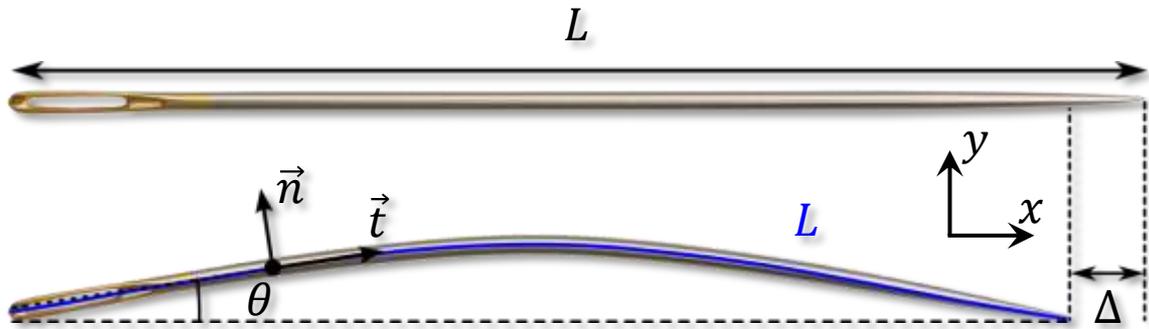
$$U = \int_0^L \left[\frac{B}{2} \theta'^2 - P \left(1 - \cos \theta - \frac{\Delta}{L} \right) \right] d\ell = \int_0^L H(\theta, \theta') d\ell$$

$$\rightarrow \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{d}{d\ell} \frac{\partial H}{\partial \theta'} = 0$$

Notions d'élasticité: équation déformation



- On considère une déformation sans étirement
- La tige se déforme dans un plan



$$U_B = \frac{B}{2} \int \kappa^2 d\ell \quad \kappa = \frac{d^2y/dx^2}{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}} \quad dx = d\ell \cos \theta \quad dy = d\ell \sin \theta$$

$$U_B = \frac{B}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{d\ell} \right)^2 d\ell \quad L - \Delta = \int_0^L \cos \theta d\ell \Rightarrow \int_0^L \left(1 - \cos \theta - \frac{\Delta}{L} \right) d\ell = 0$$

$$U = \int_0^L \left[\frac{B}{2} \theta'^2 - P \left(1 - \cos \theta - \frac{\Delta}{L} \right) \right] d\ell = \int_0^L H(\theta, \theta') d\ell \quad \rightarrow B\theta'' + P \sin \theta = 0$$

Plan



- Introduction:
 - Patterns naturels
 - Patterns induit par des forces mécaniques
- Notions d'élasticité
- Tige/membrane libre sous contrainte:
 - Stabilité d'une tige élastique (1D)
 - Hiérarchie de plis (2D)
- Membrane confinée sur substrat: influence de la rhéologie
 - Substrat liquide
 - Substrat élastique

Exemple: stabilité d'une tige



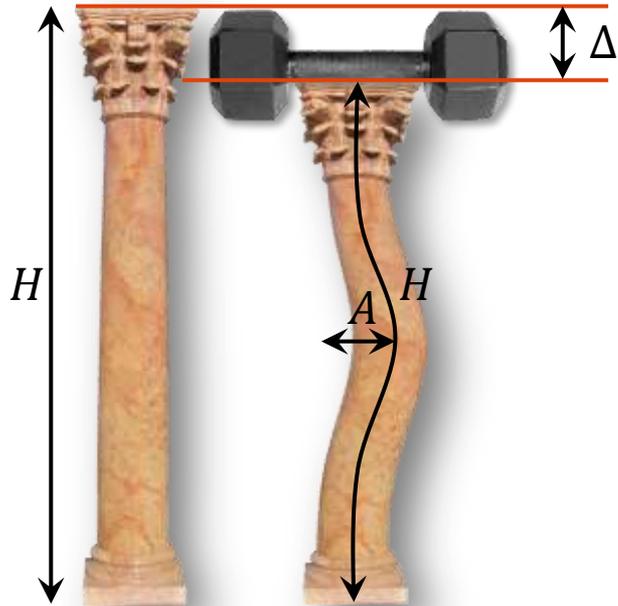
- Existence d'un poids maximal que peut supporter une colonne

Exemple: stabilité d'une tige



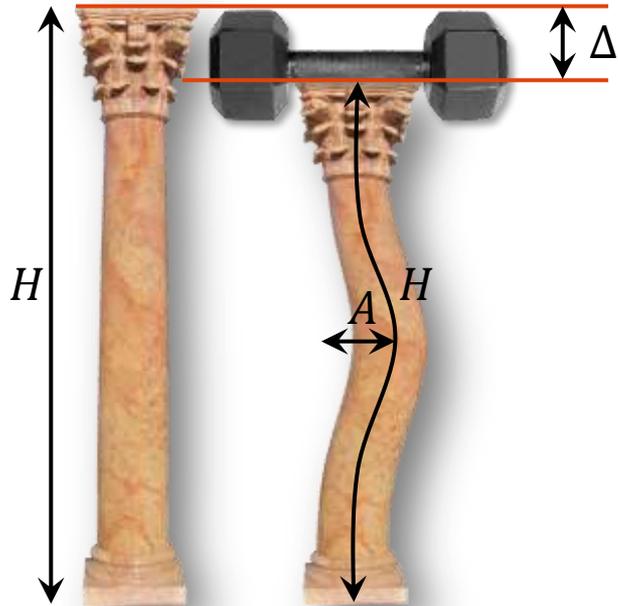
- Existence d'un poids maximal que peut supporter une colonne
- Valeur précise dépend des conditions aux bords

Exemple: stabilité d'une tige



- Existence d'un poids maximal que peut supporter une colonne
- Valeur précise dépend des conditions aux bords
- Expression en termes des paramètres physiques:

Exemple: stabilité d'une tige



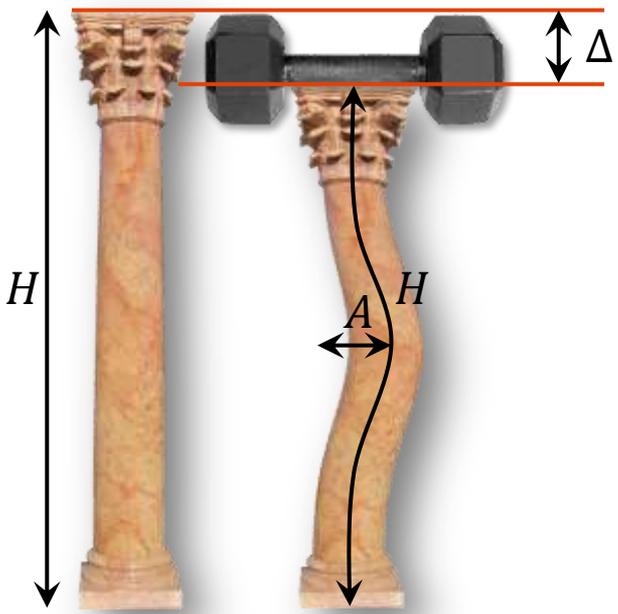
- Existence d'un poids maximal que peut supporter une colonne
- Valeur précise dépend des conditions aux bords
- Expression en termes des paramètres physiques:

- Conservation longueur: $A \sim H\sqrt{\delta}$
- Travail de la force: $Mg\Delta$
- Courbure typique: $\kappa \sim A/H^2$
- Energie de courbure: $EI\kappa^2H \sim ER^4\delta/H$
- Bilan: $MgH\delta \sim ER^4\delta/H$

$$Mg = C \frac{ER^4}{H^2}$$

- Dépendance de la force critique en fonction des paramètres physiques
- Pour obtenir la constante: calcul exact

Exemple: stabilité d'une tige



- Existence d'un poids maximal que peut supporter une colonne
- Valeur précise dépend des conditions aux bords
- Expression en termes des paramètres physiques:
 - Conservation longueur: $A \sim H\sqrt{\delta}$
 - Travail de la force: $Mg\Delta$
 - Courbure typique: $\kappa \sim A/H^2$
 - Energie de courbure: $EI\kappa^2H \sim ER^4\delta/H$
 - Bilan: $MgH\delta \sim ER^4\delta/H$

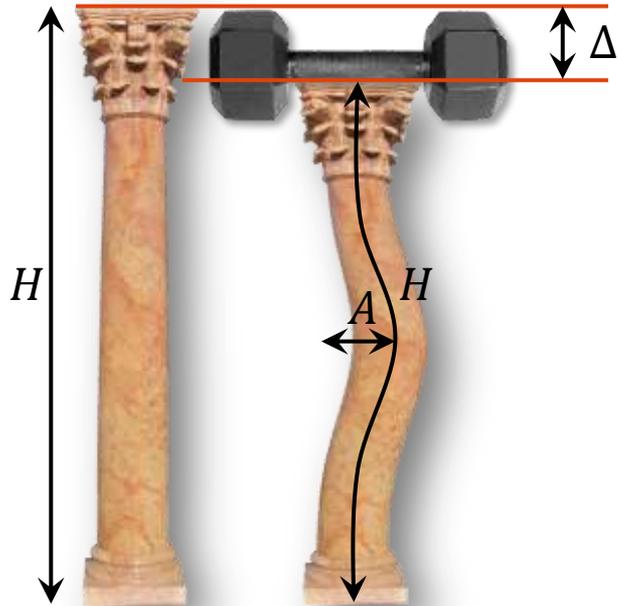
$$Mg = C \frac{ER^4}{H^2}$$

$$B\theta'' + P \sin \theta \approx B\theta'' + P\theta = 0 \Rightarrow \theta'' = -k^2\theta \Rightarrow \theta = A_1 \sin k\ell + A_2 \cos k\ell$$

$$\text{Encastré/Encastré: } \theta(0) = \theta(H) = \theta(H/2) = 0 \Rightarrow \theta = A_1 \sin k\ell, \quad kH = 2n\pi$$

$$\frac{P}{B} = \frac{4n^2\pi^2}{H^2} \Rightarrow P = n^2\pi^3 \frac{ER^4}{H^2} \Rightarrow C = \pi^3$$

Exemple: stabilité d'une tige



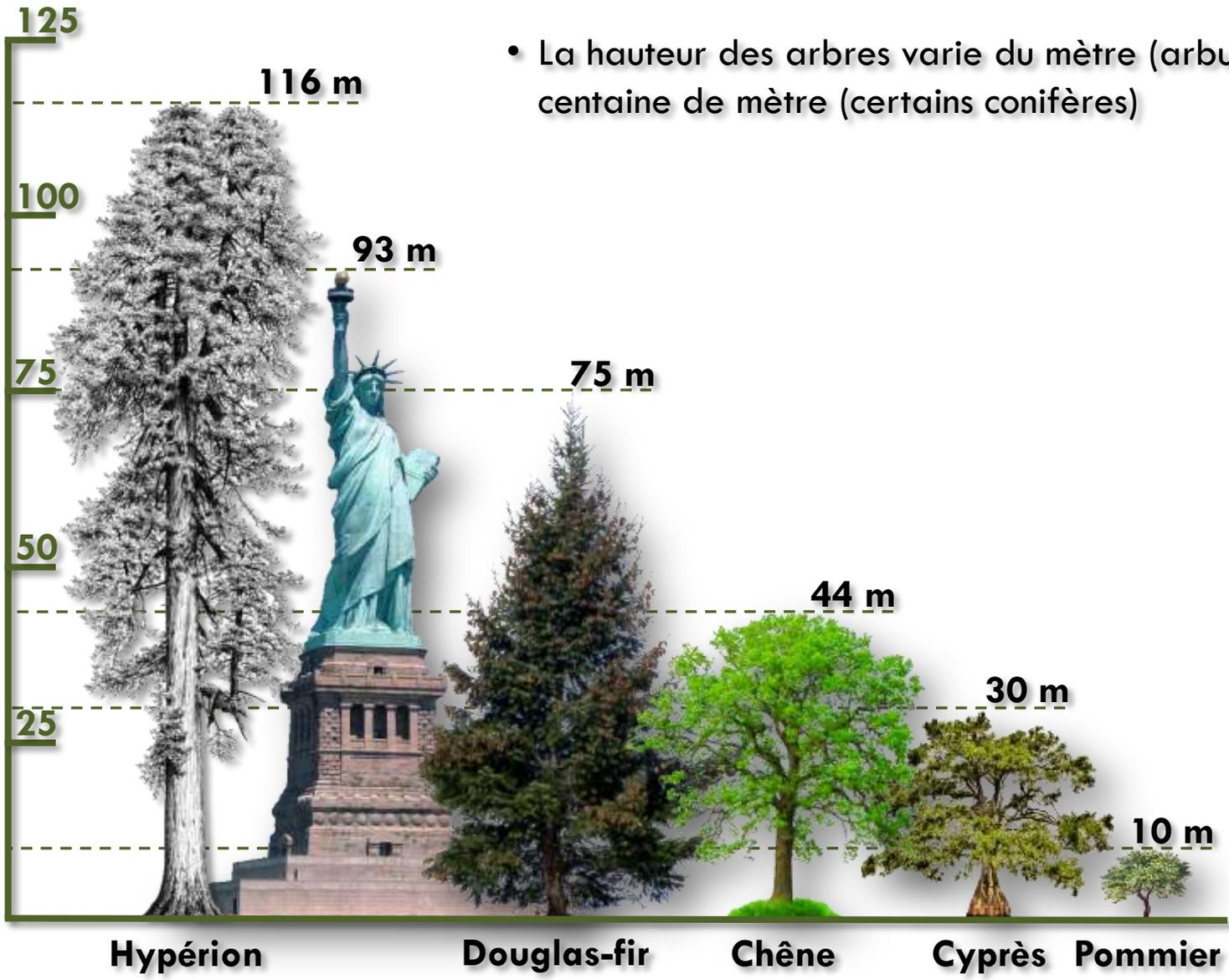
- Existence d'un poids maximal que peut supporter une colonne
- Valeur précise dépend des conditions aux bords
- Expression en termes des paramètres physiques:

- Conservation longueur: $A \sim H\sqrt{\delta}$
- Travail de la force: $Mg\Delta$
- Courbure typique: $\kappa \sim A/H^2$
- Energie de courbure: $EI\kappa^2H \sim ER^4\delta/H$
- Bilan: $MgH\delta \sim ER^4\delta/H$

$$Mg = C \frac{ER^4}{H^2}$$

- Encastré/Encastré: $C = \pi^3$
- Rotule/Rotule: $C = \pi^3/4$
- Encastré/Libre: $C = \pi^3/16$

La hauteur des arbres: ordre de grandeur



- La hauteur des arbres varie du mètre (arbustes) à la centaine de mètre (certains conifères)

Hypérion

Douglas-fir

Chêne

Cyprès

Pommier

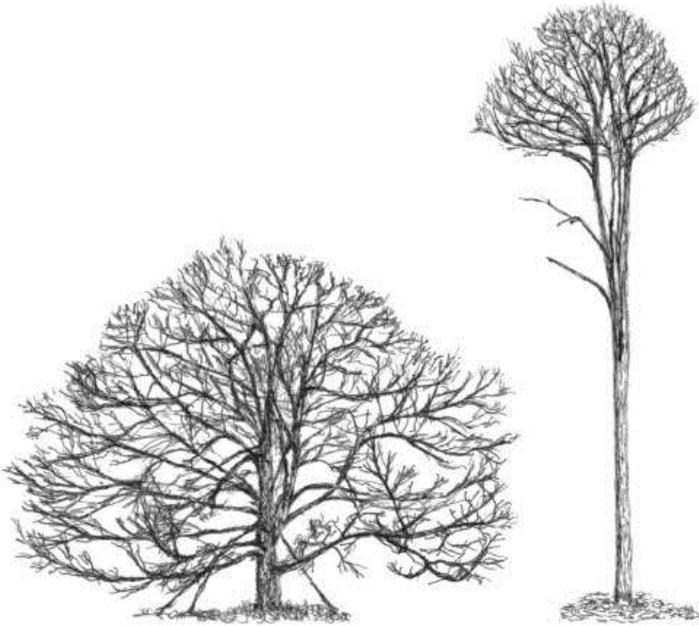
La hauteur des arbres: modèle



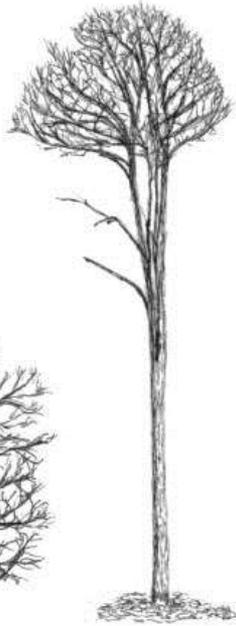
- La hauteur des arbres varie du mètre (arbustes) à la centaine de mètre (certains conifères)
- Intuitivement pour qu'un arbre soit grand il faut que son tronc soit large



La hauteur des arbres: modèle



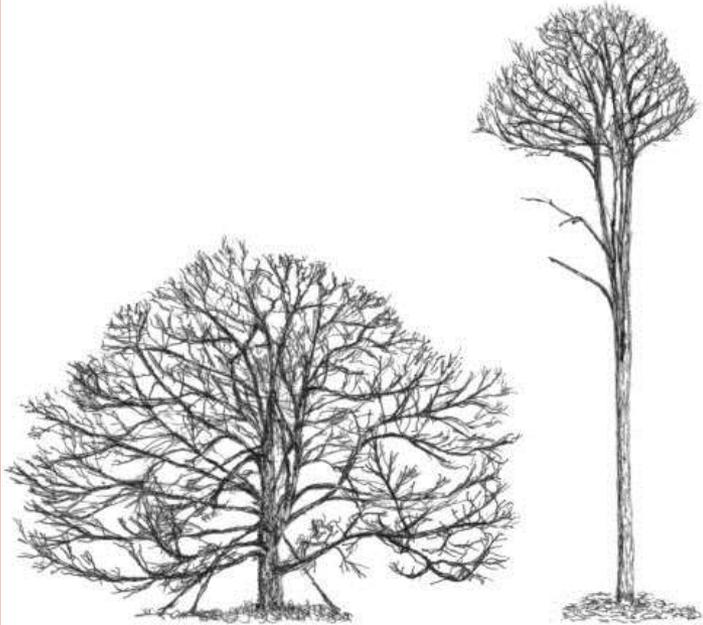
Chêne isolé



Chêne en forêt

- La hauteur des arbres varie du mètre (arbustes) à la centaine de mètre (certains conifères)
- Intuitivement pour qu'un arbre soit grand il faut que son tronc soit large
- Modèle: arbre = cylindre. OK pour arbres des forêts

La hauteur des arbres: modèle



- La hauteur des arbres varie du mètre (arbustes) à la centaine de mètre (certains conifères)
- Intuitivement pour qu'un arbre soit grand il faut que son tronc soit large
- Modèle: arbre = cylindre. OK pour arbres des forêts

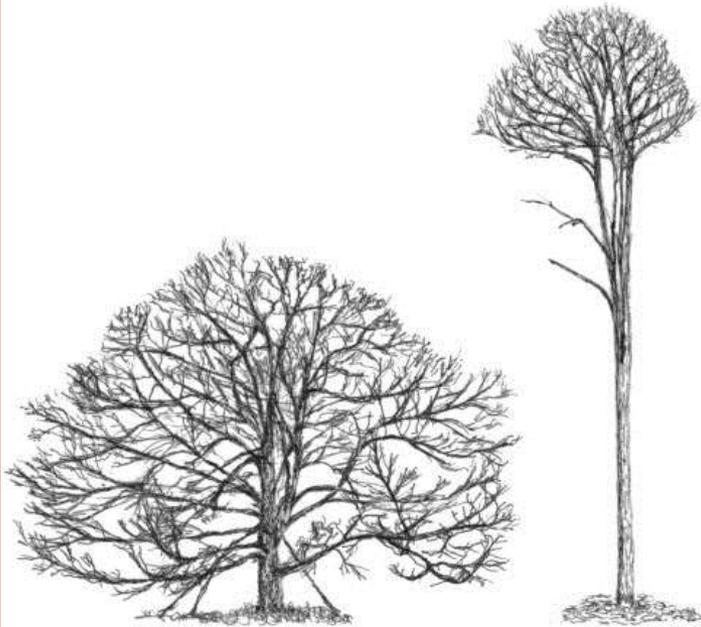


Hêtre



Eucalyptus

La hauteur des arbres: modèle



- La hauteur des arbres varie du mètre (arbustes) à la centaine de mètre (certains conifères)
- Intuitivement pour qu'un arbre soit grand il faut que son tronc soit large
- Modèle: arbre = cylindre. OK pour arbres des forêts
- Condition de stabilité:

$$Mg = C \frac{ER^4}{H^2}$$

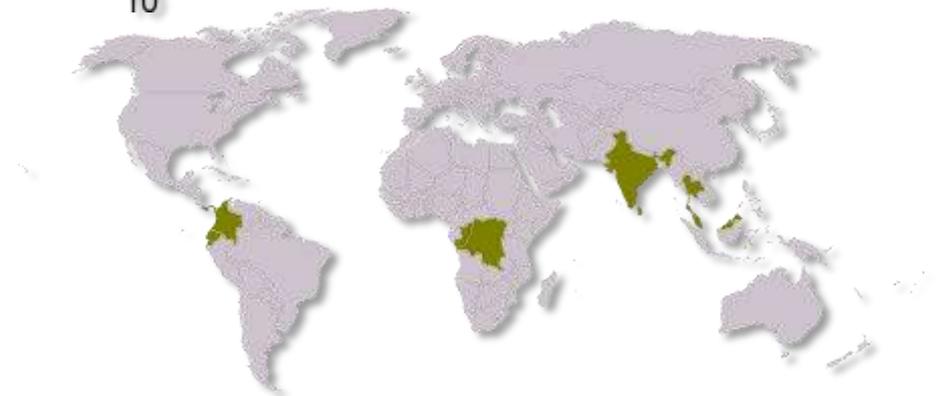
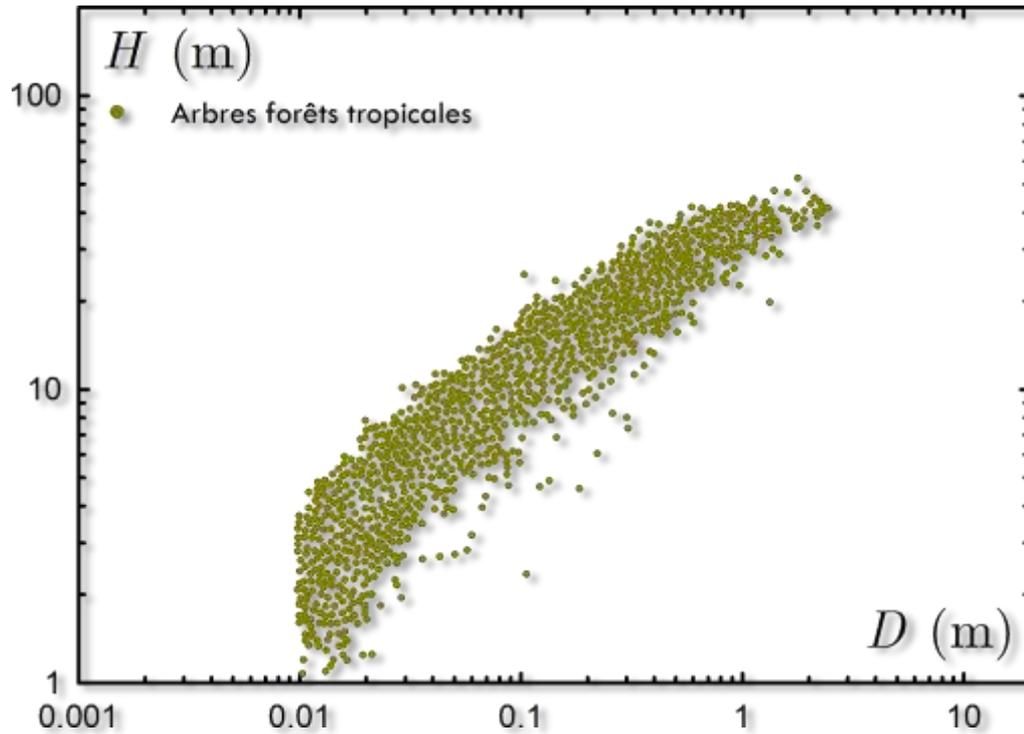
- Force due au poids d'une colonne cylindrique:

$$Mg = \rho g \pi R^2 H$$

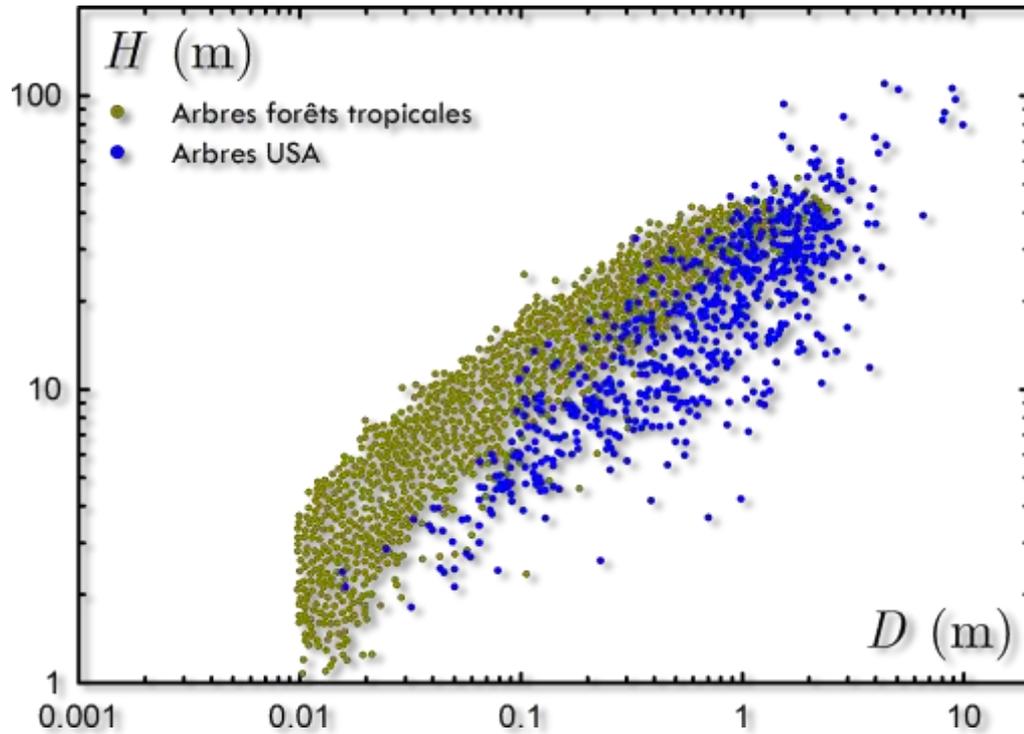
$$H = C' \left(\frac{E}{\rho g} \right)^{1/3} D^{2/3}$$

- Encastré/libre + poids au sommet: $C' = 0.536$
- Encastré/libre + poids réparti: $C' = 0.788$

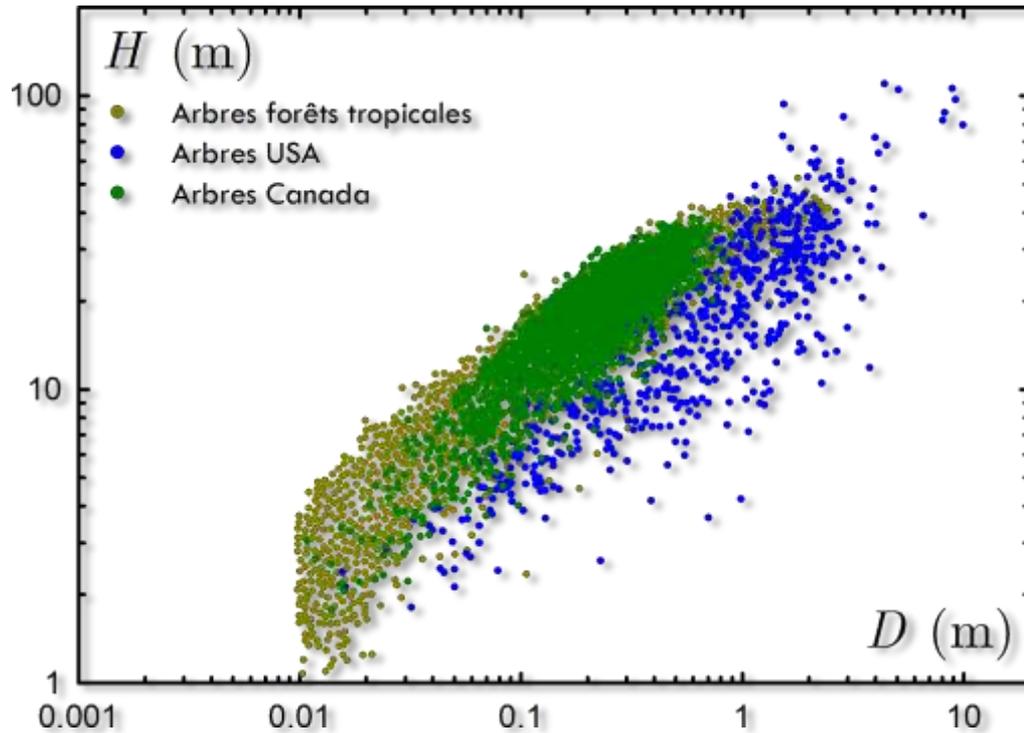
La hauteur des arbres: mesures



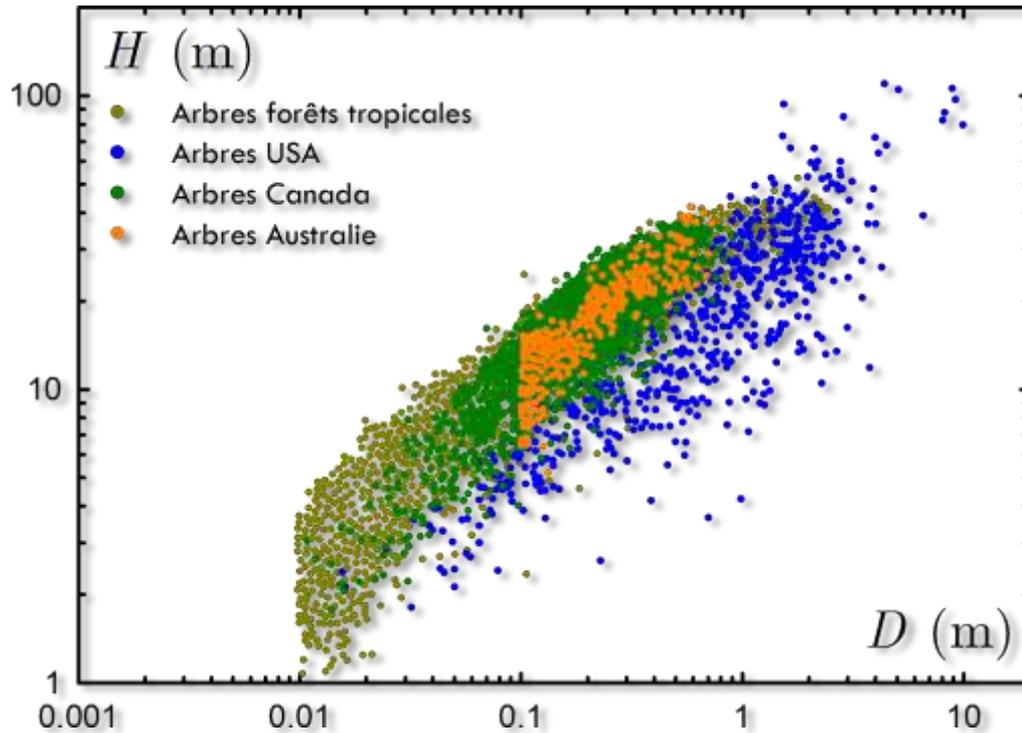
La hauteur des arbres: mesures



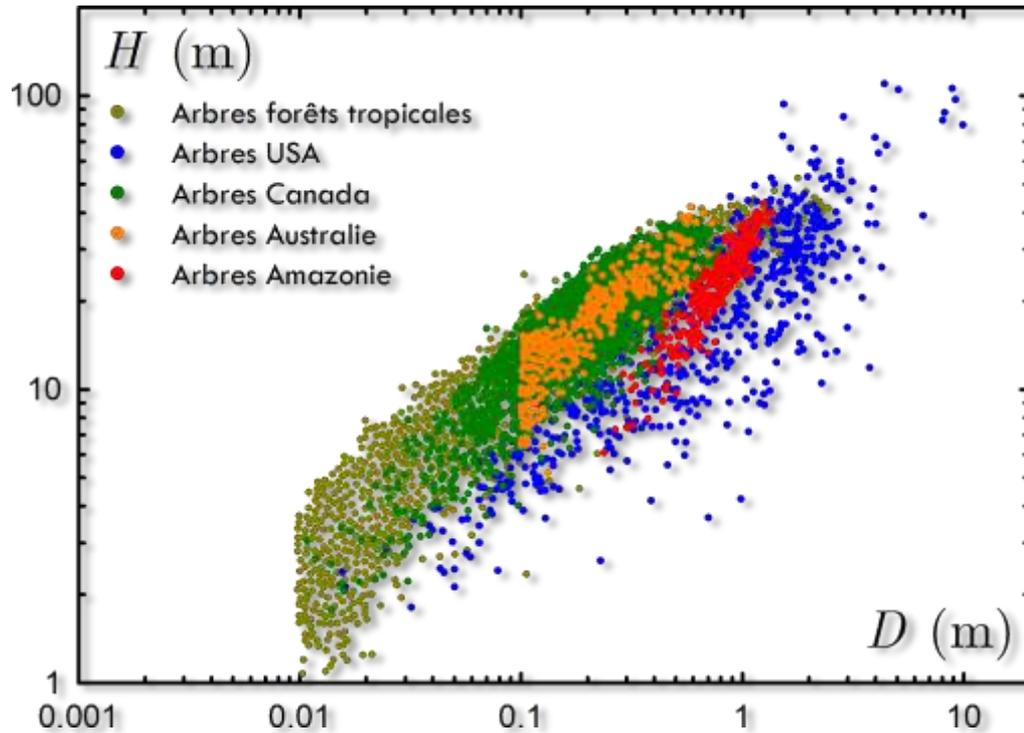
La hauteur des arbres: mesures



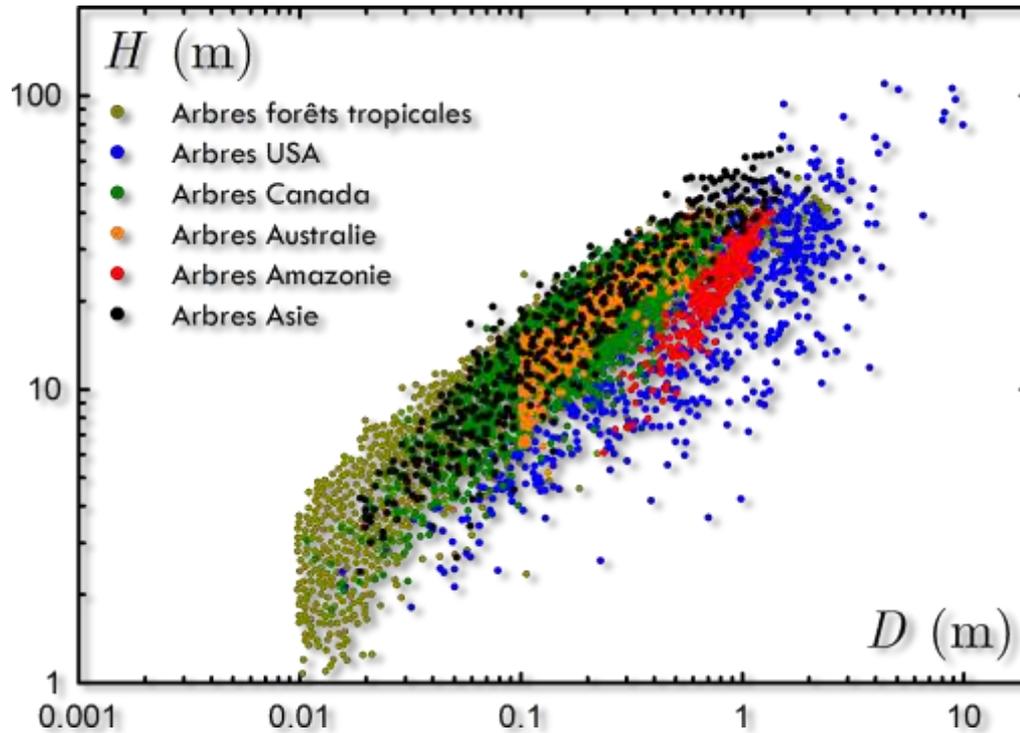
La hauteur des arbres: mesures



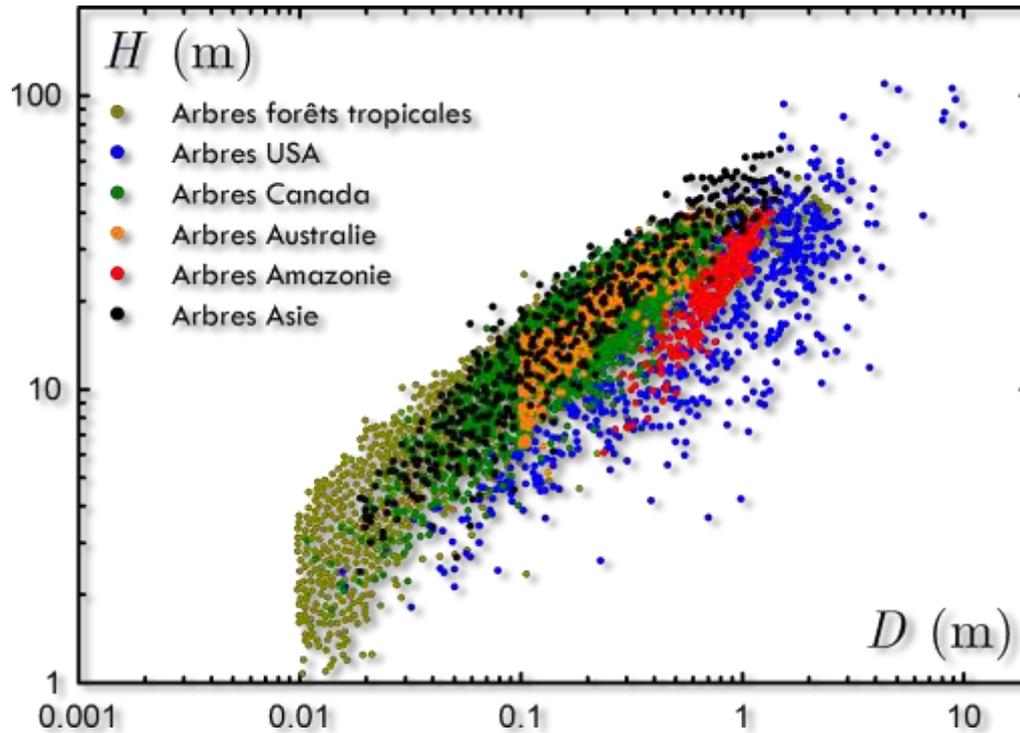
La hauteur des arbres: mesures



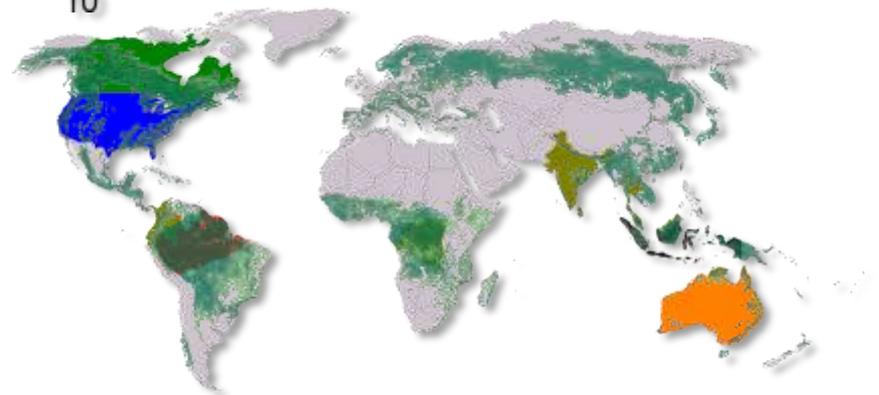
La hauteur des arbres: mesures



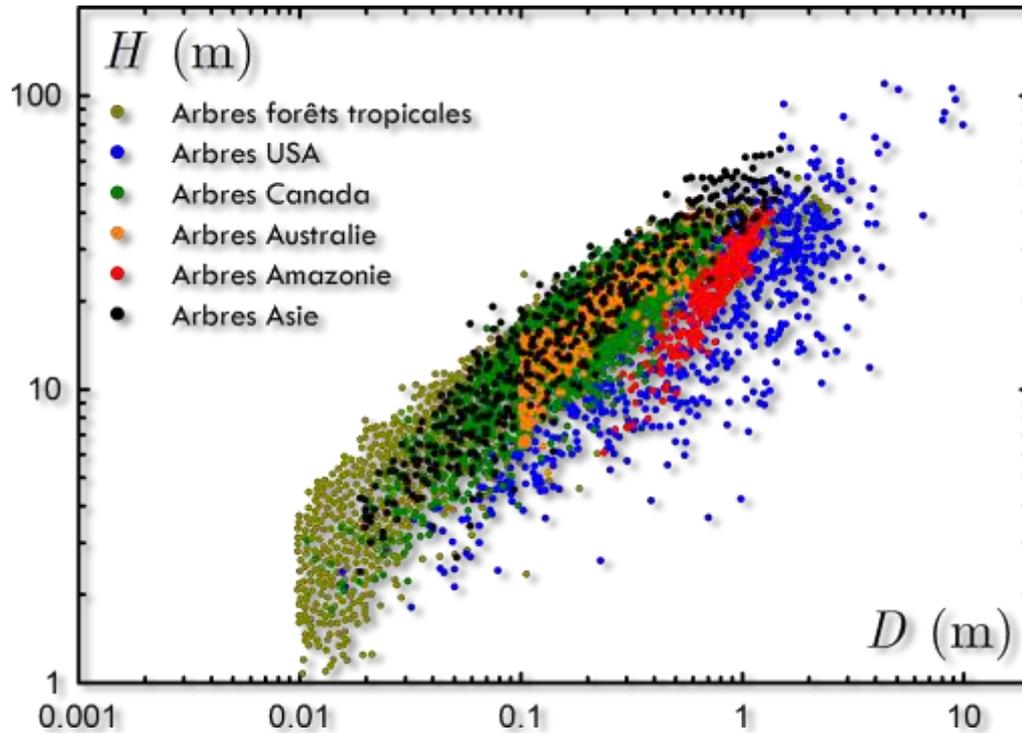
La hauteur des arbres: mesures



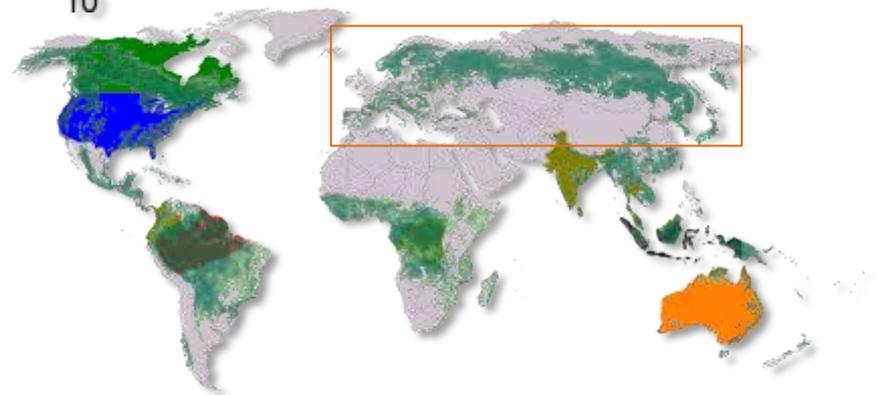
Forêts



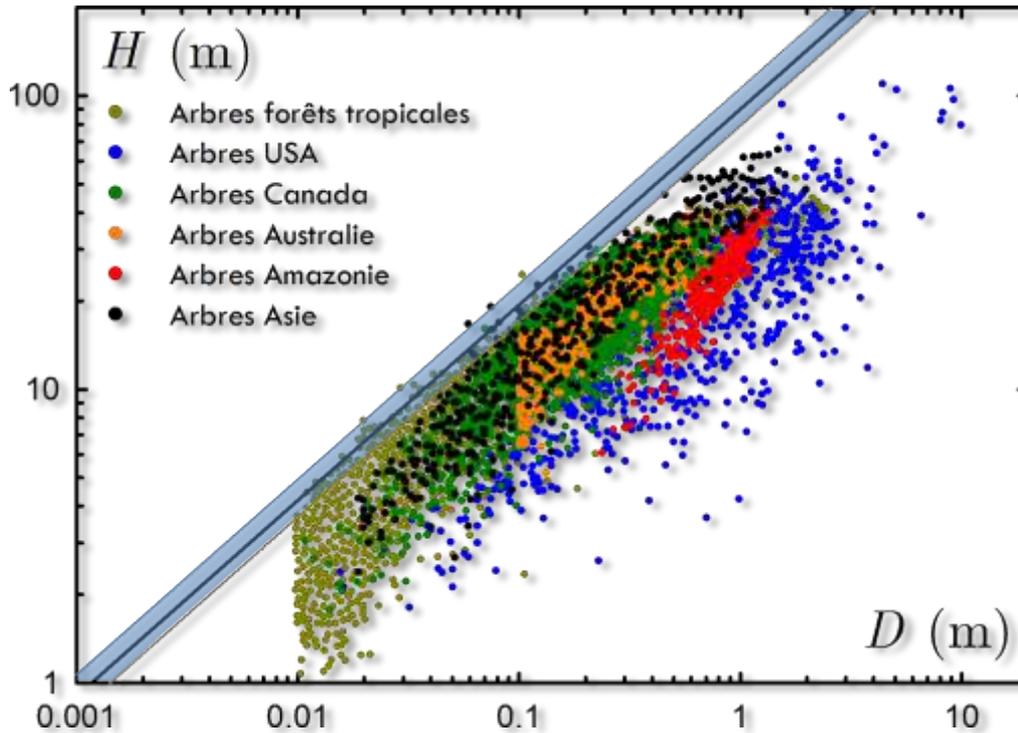
La hauteur des arbres: mesures



Forêts



La hauteur des arbres: comparaison



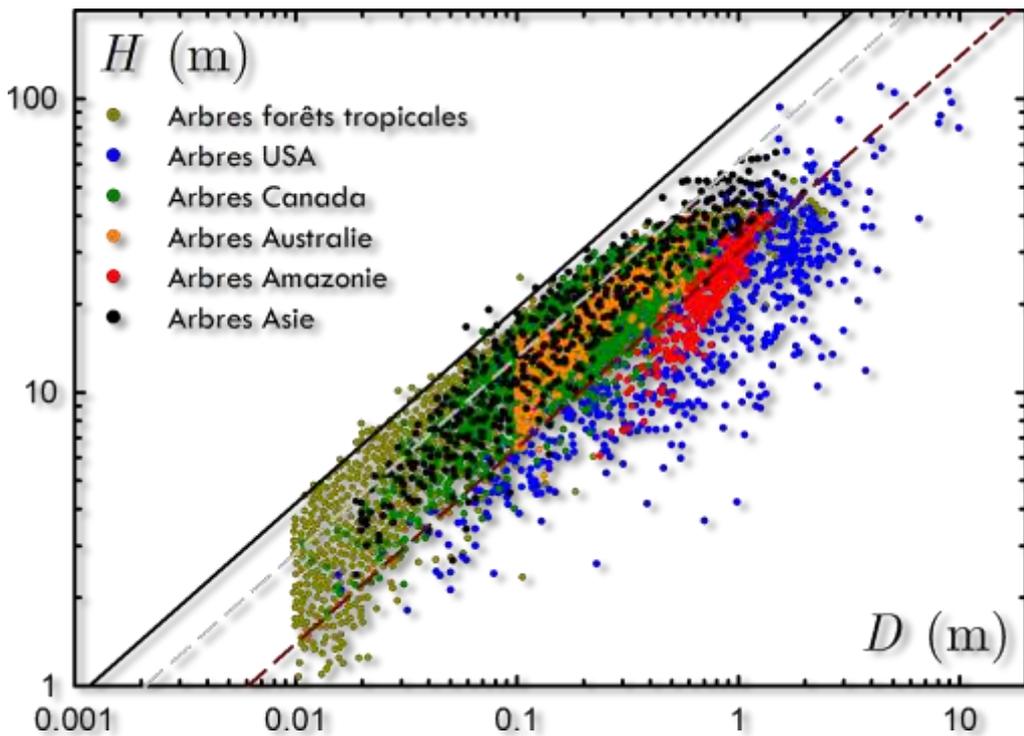
$$H = 0.788 \left(\frac{E}{\rho g} \right)^{1/3} D^{2/3}$$

$$10 \leq E \leq 12 \text{ Gpa}$$

$$500 \leq \rho \leq 1000 \text{ kg/m}^3$$

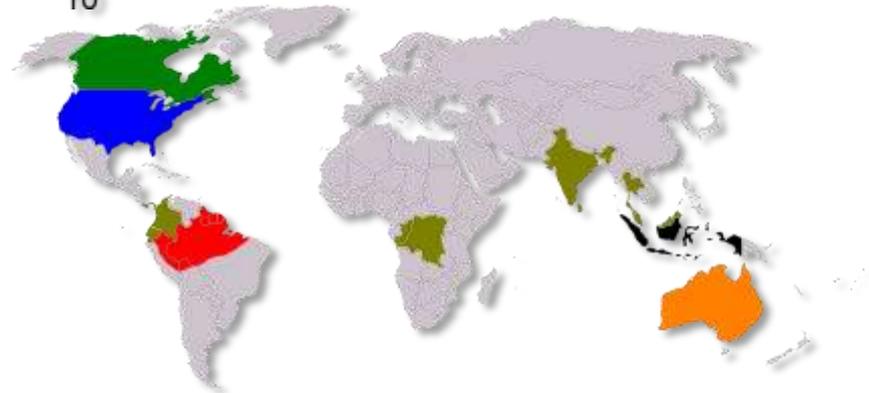


La hauteur des arbres: comparaison

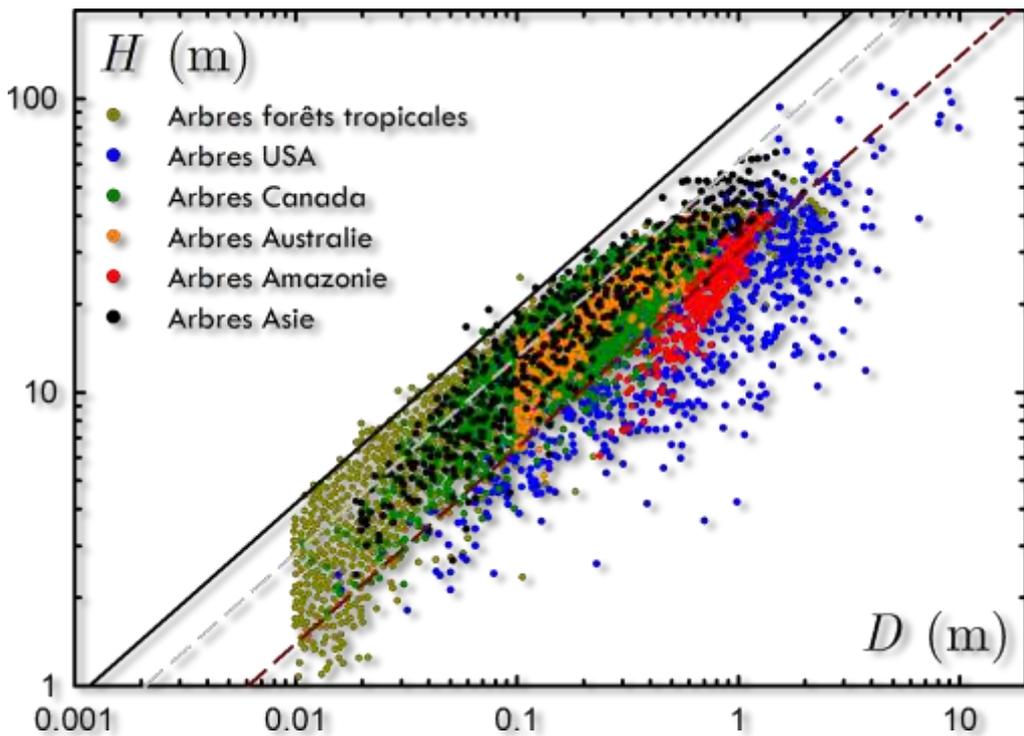


$$H = 0.536 \left(\frac{E}{\rho g} \right)^{1/3} D^{2/3}$$

$$H = \frac{0.788}{3} \left(\frac{E}{\rho g} \right)^{1/3} D^{2/3}$$



La hauteur des arbres: comparaison

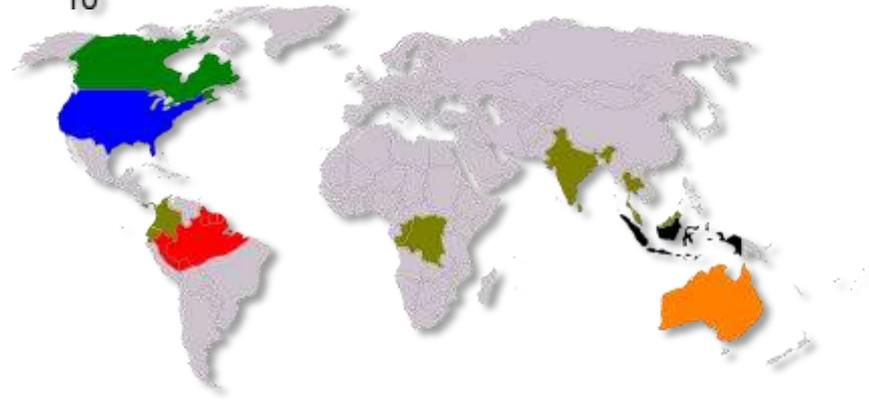


$$H = 0.536 \left(\frac{E}{\rho g} \right)^{1/3} D^{2/3}$$

$$H = \frac{0.788}{3} \left(\frac{E}{\rho g} \right)^{1/3} D^{2/3}$$

$$\ell_g = \frac{E}{\rho g} \rightarrow (H/\ell_g, D/\ell_g)$$

Réduction dispersion



Facteur de sécurité: construction



$$H = 0.536 \left(\frac{E}{\rho g} \right)^{1/3} D^{2/3}$$

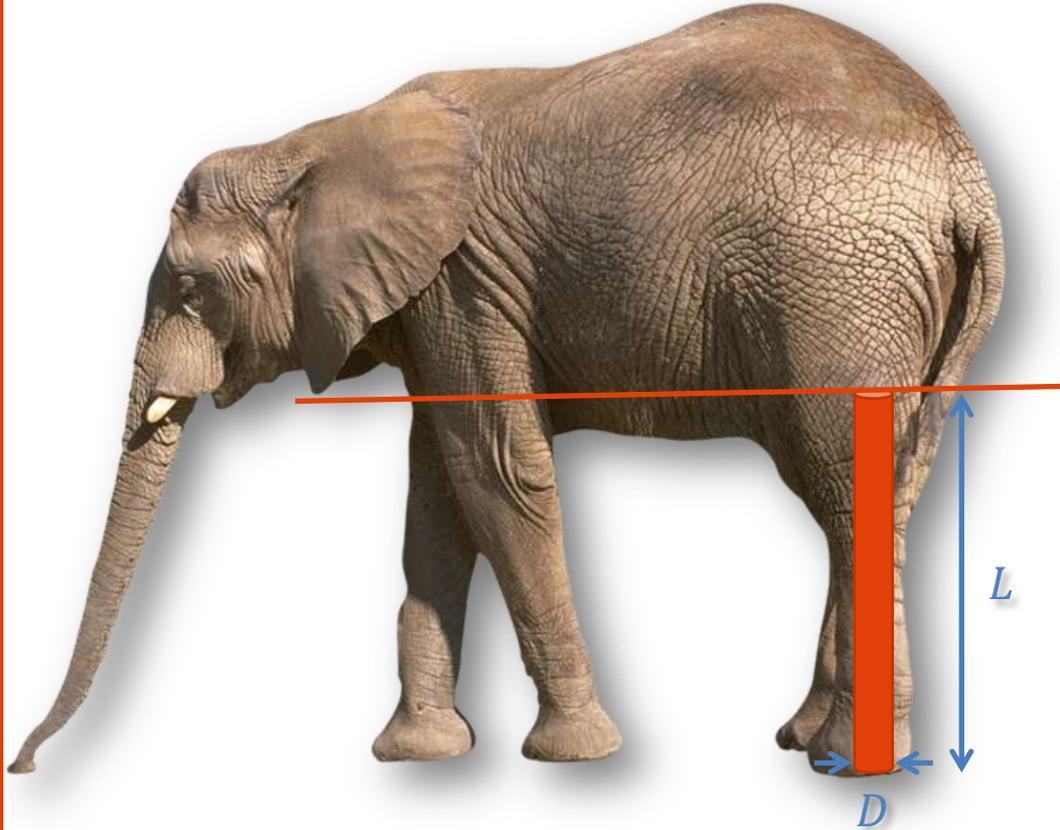
$$H = \frac{0.788}{3} \left(\frac{E}{\rho g} \right)^{1/3} D^{2/3}$$

- Monument San Jacinto (Texas)
- Plus haute colonne du monde, 173 m
- Béton renforcé
 - $E \sim 30 \text{ Gpa}$, $\rho \sim 2300 \text{ kg/m}^3$
- Base de 15 m
 - $D \sim 15 \text{ m}$

$$H \simeq 330 \text{ m}$$

- Facteur 2 de sécurité

Taille des os longs et masse des corps



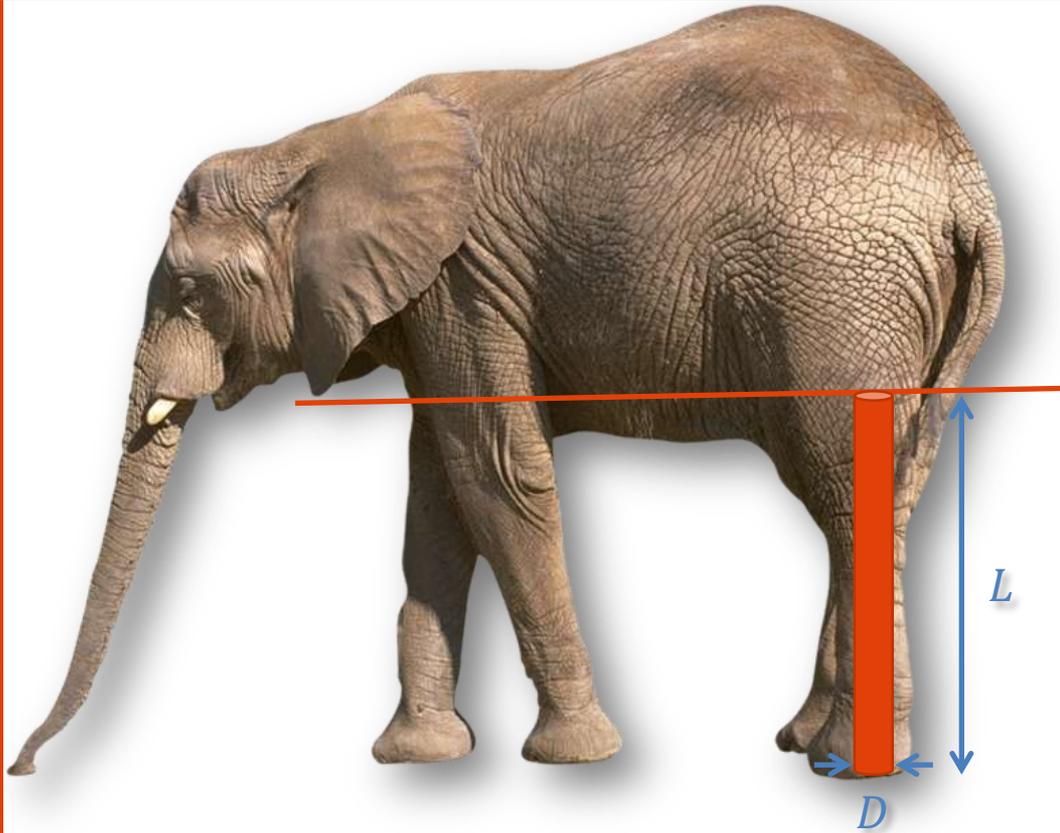
- Stabilité élastique:

$$Mg = C \frac{ER^4}{L^2}$$

- Masse des os en fonction de la masse total: hypothèse de McMahon (masse des os est une fraction de la masse total)

$$\rho\pi LR^2 = KM$$

Taille des os longs et masse des corps



- Stabilité élastique:

$$Mg = C \frac{ER^4}{L^2}$$

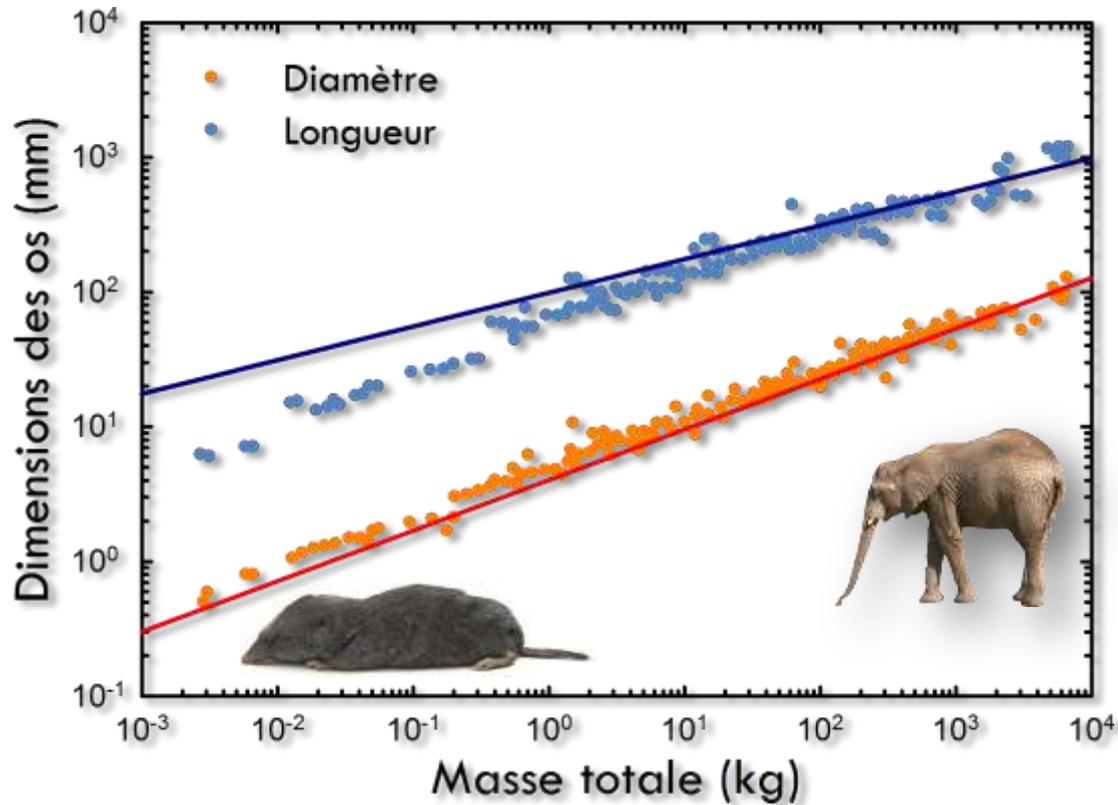
- Masse des os en fonction de la masse total: hypothèse de McMahon (masse des os est une fraction de la masse total)

$$\rho\pi LR^2 = KM$$

$$D = 2 \left(\frac{K^2}{C\pi^2} \right)^{1/8} \left(\frac{g}{E\rho^2} \right)^{1/8} M^{3/8}$$

$$L = \left(\frac{CK^2}{\pi^2} \right)^{1/4} \left(\frac{E}{g\rho^2} \right)^{1/4} M^{1/4}$$

Taille des os longs et masse des corps

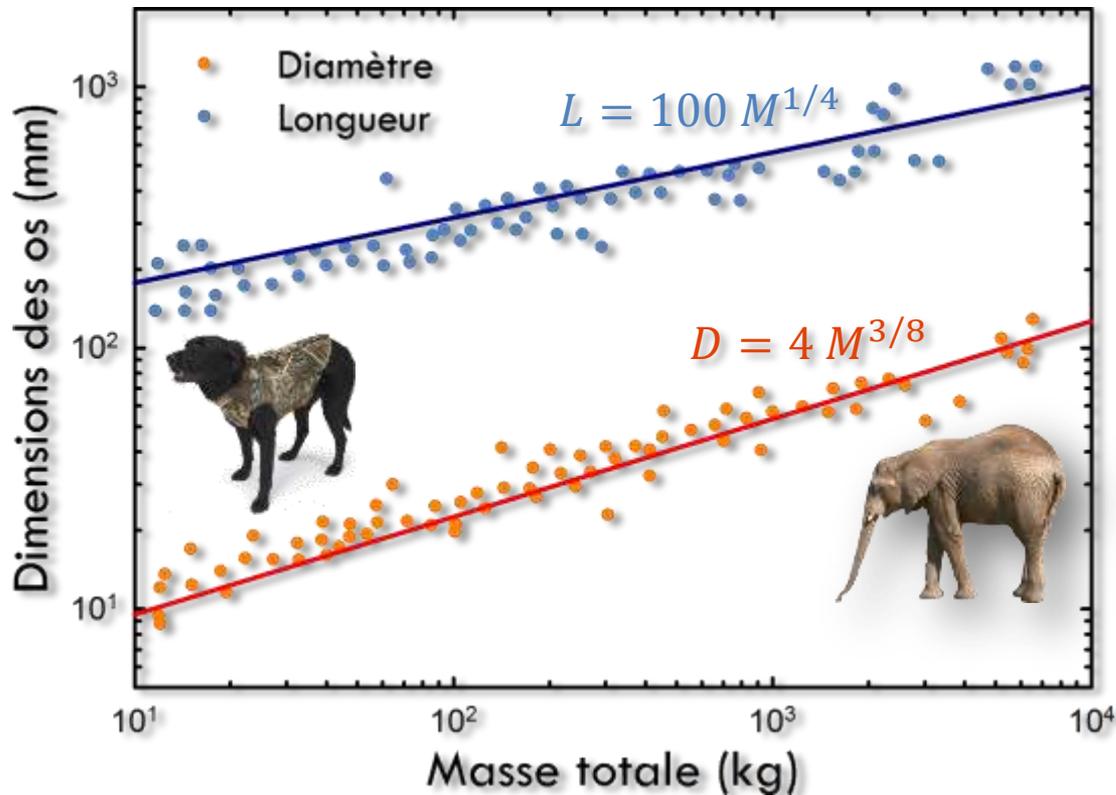


$$D \sim M^{3/8}$$

$$L \sim M^{1/4}$$

- Les scalings obtenus sont OK pour les animaux suffisamment gros

Taille des os longs et masse des corps



$$D \sim M^{3/8}$$

$$L \sim M^{1/4}$$

- Les scalings obtenus sont OK pour les animaux suffisamment gros
- Si on calcule les coefficients avec

$$\rho \simeq 2000 \text{ kg/m}^3 \quad E \simeq 20 \text{ GPa}$$

$$K \simeq 0.1 \quad C = \pi^3/4$$

- On trouve

$$D = 6.7 M^{3/8}$$

$$L = 1400 M^{1/4}$$

- Marge de sécurité sur L et pas sur D

Le scaling des clous

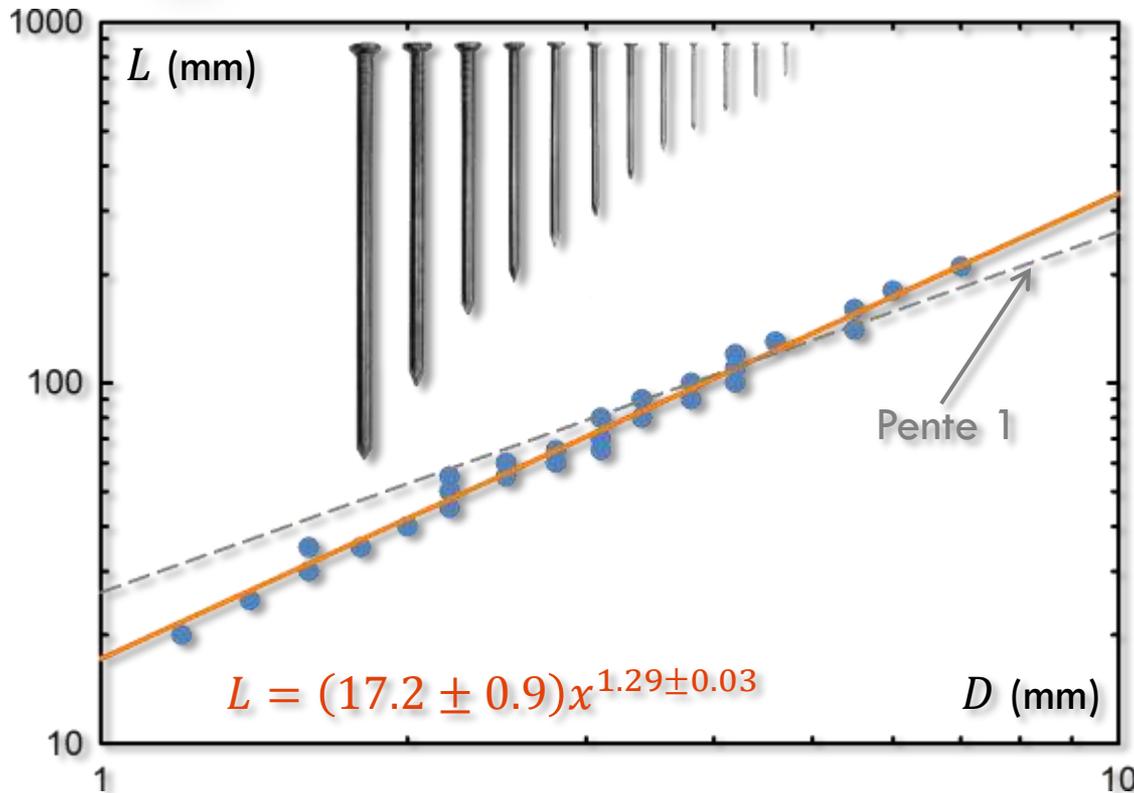


- Pour une longueur donnée, L :
- Si diamètre trop petit, flambage
- Si diamètre trop gros, difficulté à enfoncer le clou
- Existence d'un diamètre « optimal »

Le scaling des clous



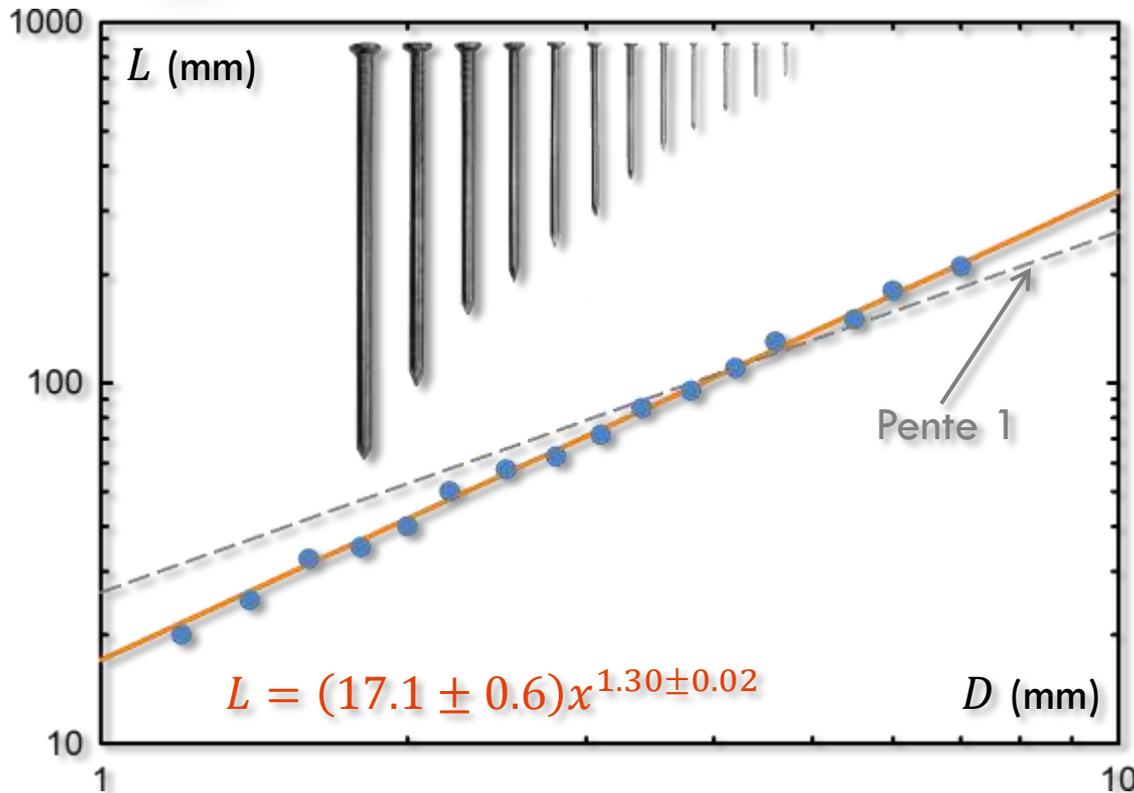
- Pour une longueur donnée, L :
- Si diamètre trop petit, flambage
- Si diamètre trop gros, difficulté à enfoncer le clou
- Existence d'un diamètre « optimal »
- Obtenu empiriquement au fil du temps



Le scaling des clous



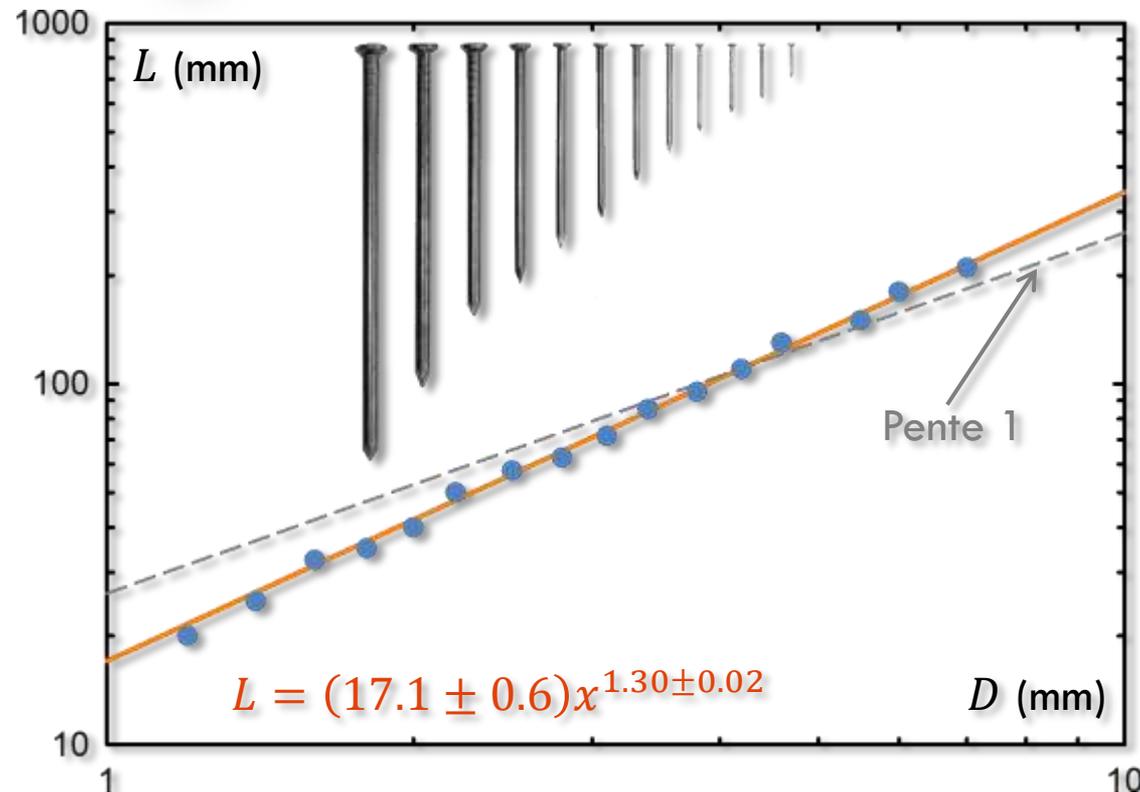
- Pour une longueur donnée, L :
- Si diamètre trop petit, flambage
- Si diamètre trop gros, difficulté à enfoncer le clou
- Existence d'un diamètre « optimal »
- Obtenu empiriquement au fil du temps



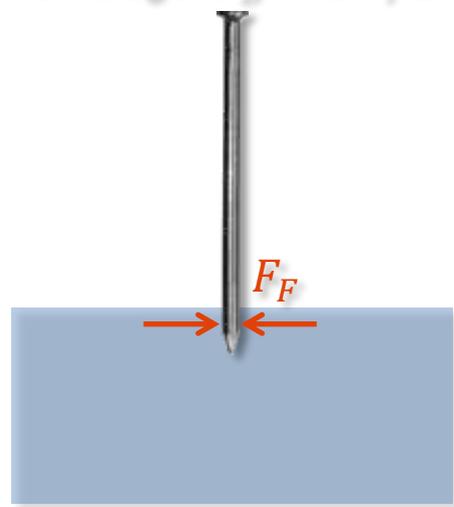
Le scaling des clous



- Pour une longueur donnée, L :
- Si diamètre trop petit, flambage
- Si diamètre trop gros, difficulté à enfoncer le clou
- Existence d'un diamètre « optimal »
- Obtenu empiriquement au fil du temps



- Flambage: $F_B \sim D^4/L^2$



- Friction: $F_F \sim D$
- $L \sim D^{3/2}$

Références



- **Elasticité:**

- L.D. Landau et E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Pergamon, NY, 3rd edn, 1986

- **Données taille des arbres:**

- T. McMahon, *Science* **179**, 1201 (1973)
- S. Huang, S.J. Titus et D.P. Wiens, *Can. J. For. Res.* **22**, 1297 (1992)
- M.R. Ngugi et D.B. Botkin, *Ecol. Model.* **222**, 3261 (2011)
- E.M. Nogueira *et al.*, *Forest Ecol. Manag.* **255**, 2963 (2008)
- D.A. King *et al.*, *Funct. Ecol.* **23**, 284 (2009); O.O. Osunkoya *et al.*, *Am. J. Bot.* **94**(12), 1951 (2007)
- H.C. Muller-Landau *et al.*, *Ecol. Lett.* **9**, 575 (2006)

- **Allométrie animale et clous:**

- T. McMahon, *Science* **179**, 1201 (1973)
- T. McMahon et J.T. Bonner, *On size and life*, Scientific American Books, 1983
- Wikipédia (nail fastener)

Plan



- Introduction:
 - Patterns naturels
 - Patterns induit par des forces mécaniques
- Notions d'élasticité
- Tige/membrane libre sous contrainte:
 - Stabilité d'une tige élastique (1D)
 - Hiérarchie de plis (2D)
- Membrane confinée sur substrat: influence de la rhéologie
 - Substrat liquide
 - Substrat élastique

Hiérarchie de plis: les rideaux



Hiérarchie de plis: observations

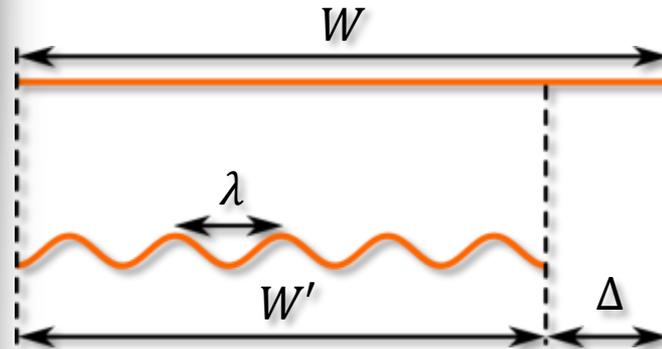


- Une déformation périodique de longueur d'onde λ est imposée en un bord
- Cette longueur d'onde n'est pas préservée le long du rideau: *brisure spontanée de symétrie*

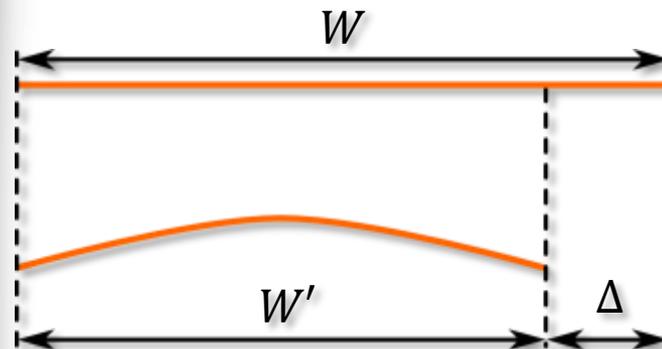
Hiérarchie de plis: observations



- Une déformation périodique de longueur d'onde λ est imposée en un bord
- Cette longueur d'onde n'est pas préservée le long du rideau: *brisure spontanée de symétrie*



Déformation imposée
Pas d'étirement latéral

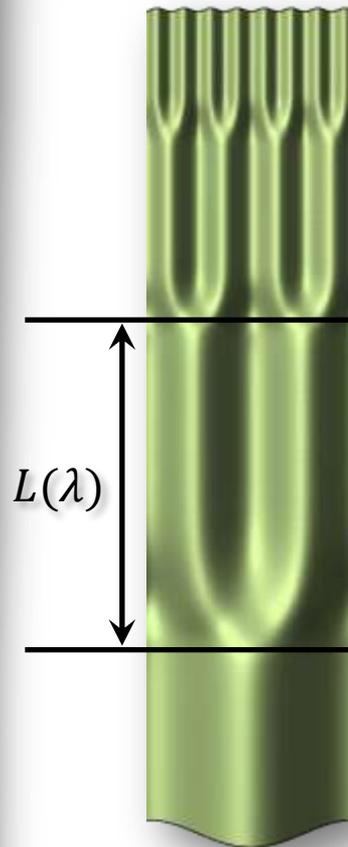


Configuration favorable
énergétiquement loin du
bord

Hiérarchie de plis: observations



- Une déformation périodique de longueur d'onde λ est imposée en un bord
- Cette longueur d'onde n'est pas préservée le long du rideau: *brisure spontanée de symétrie*



Diminution du nombre de plis pour minimiser l'énergie de courbure (moteur)

Fusion de deux plis λ en un pli 2λ

Distorsion/stretching de la feuille (frein)

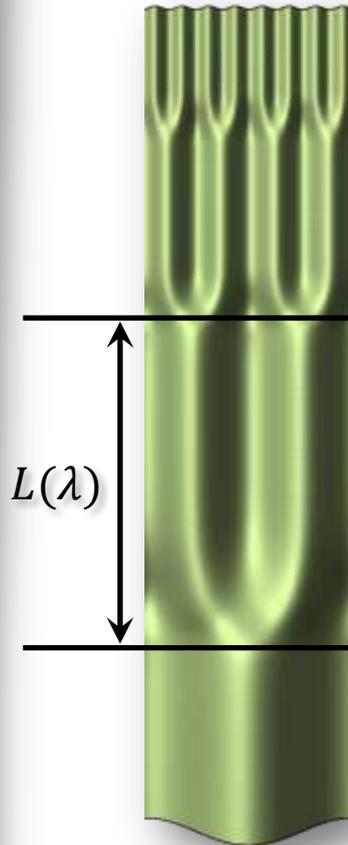
Existence d'une longueur de transition $L(\lambda)$ optimale

Pattern complet = auto-assemblage de ces zones de transition (wrinklon)

Hiérarchie de plis: idée de base



- Une déformation périodique de longueur d'onde λ est imposée en un bord
- Cette longueur d'onde n'est pas préservée le long du rideau: *brisure spontanée de symétrie*



Pattern complet = auto-assemblage de ces zones de transition (wrinklons)

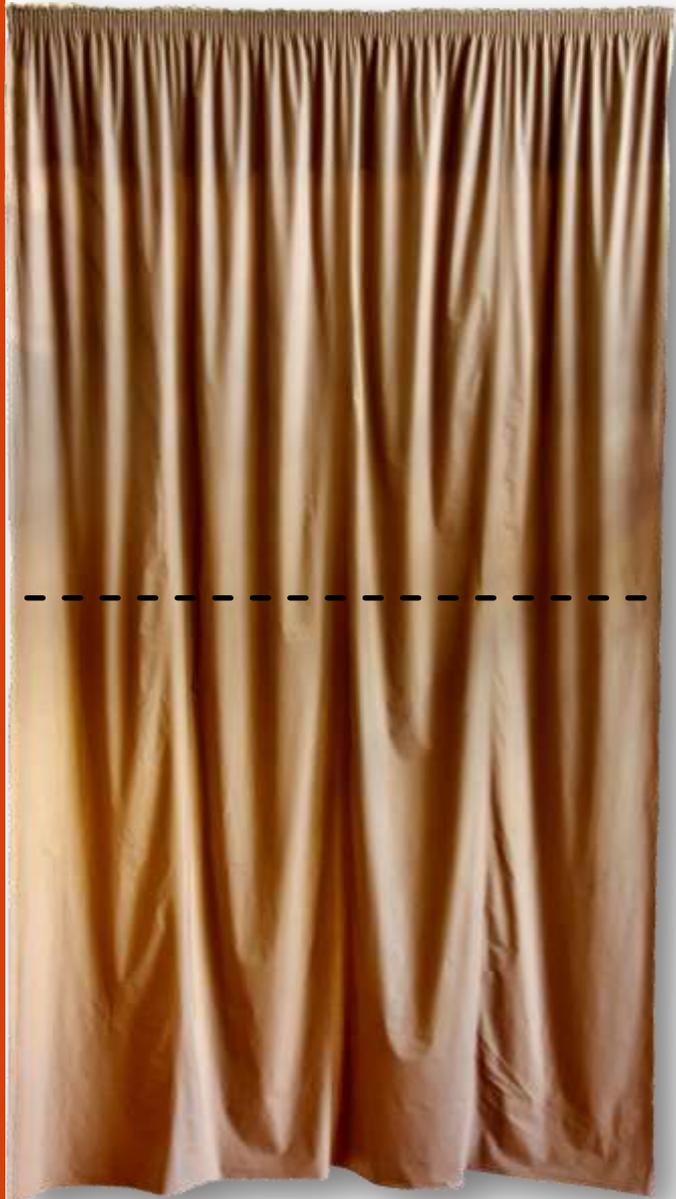
Lien entre $L(\lambda)$ et $\lambda(x)$?

$L(\lambda)$ est la distance sur laquelle $\lambda \rightarrow 2\lambda$

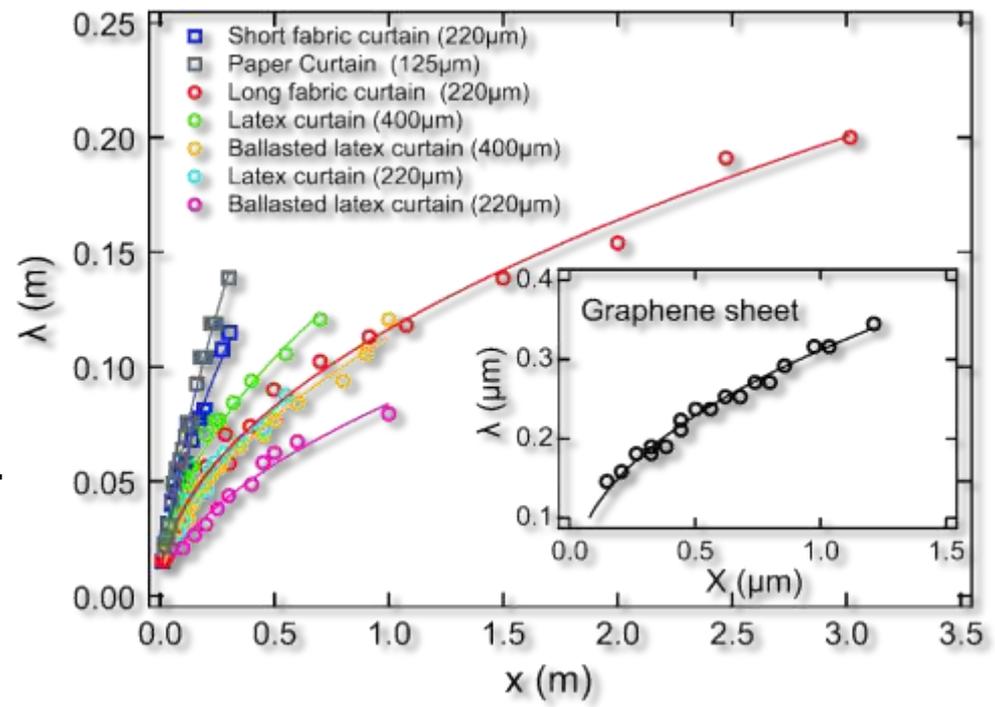
$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\lambda}{L(\lambda)}$$

Connexion entre structure locale et structure globale

Hiérarchie de plis: mesures

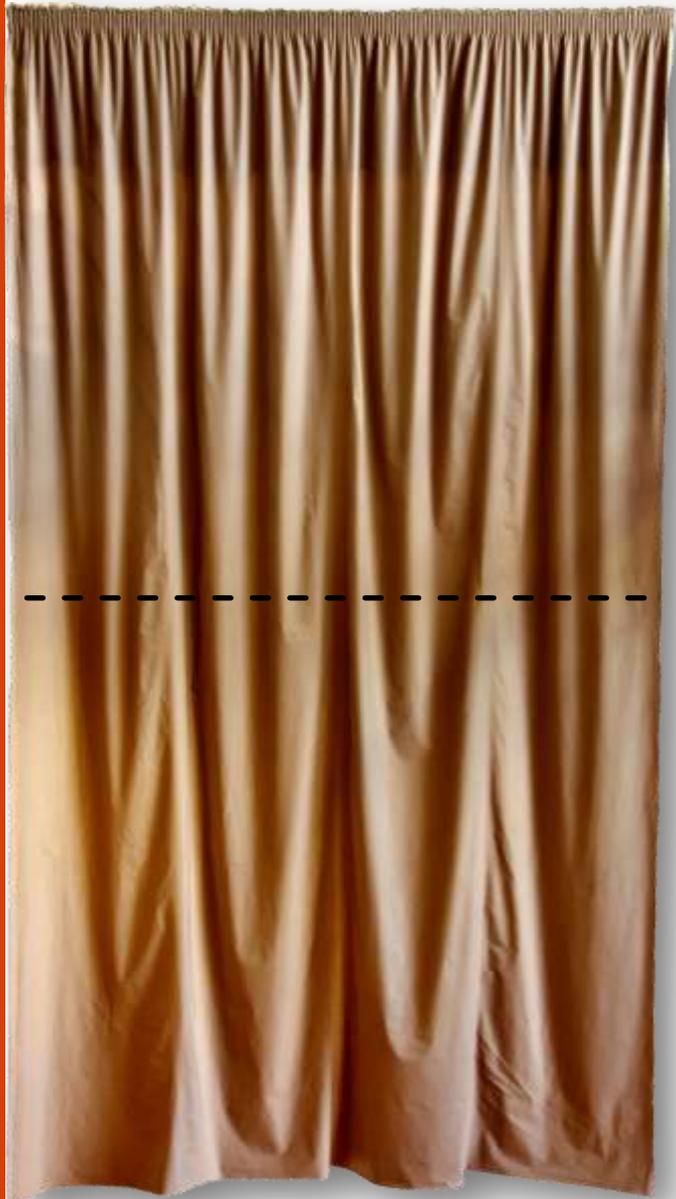


• Comment évolue λ avec x ?

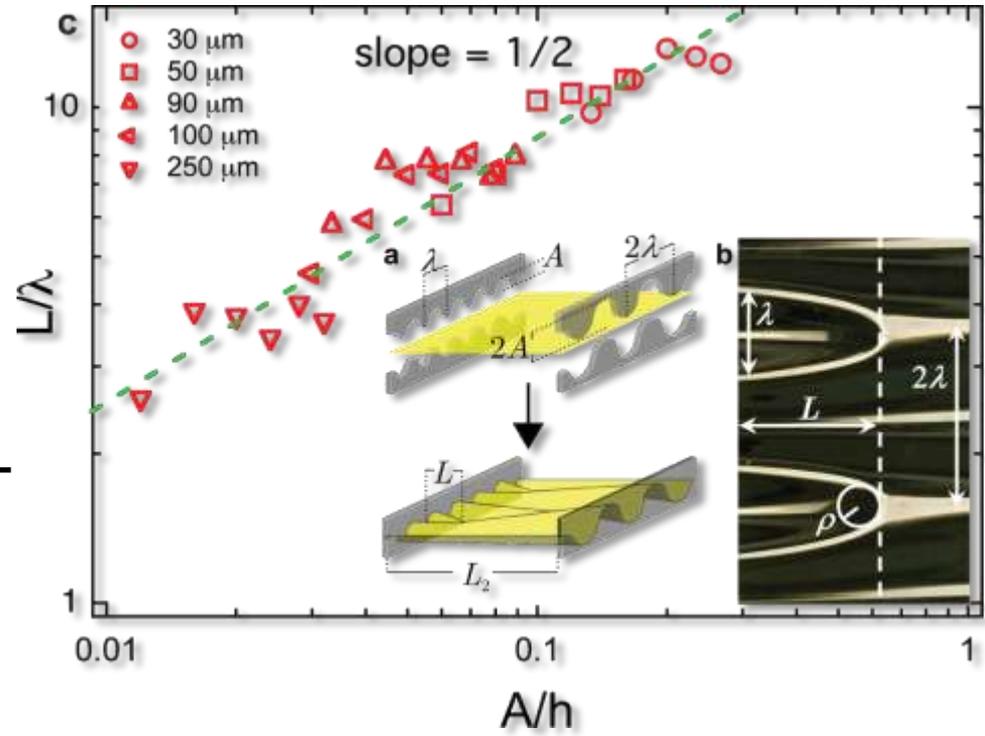


- Feuille sans tension: $\lambda \sim x^{2/3}$
- Feuille avec tension: $\lambda \sim x^{1/2}$

Hiérarchie de plis: mesures



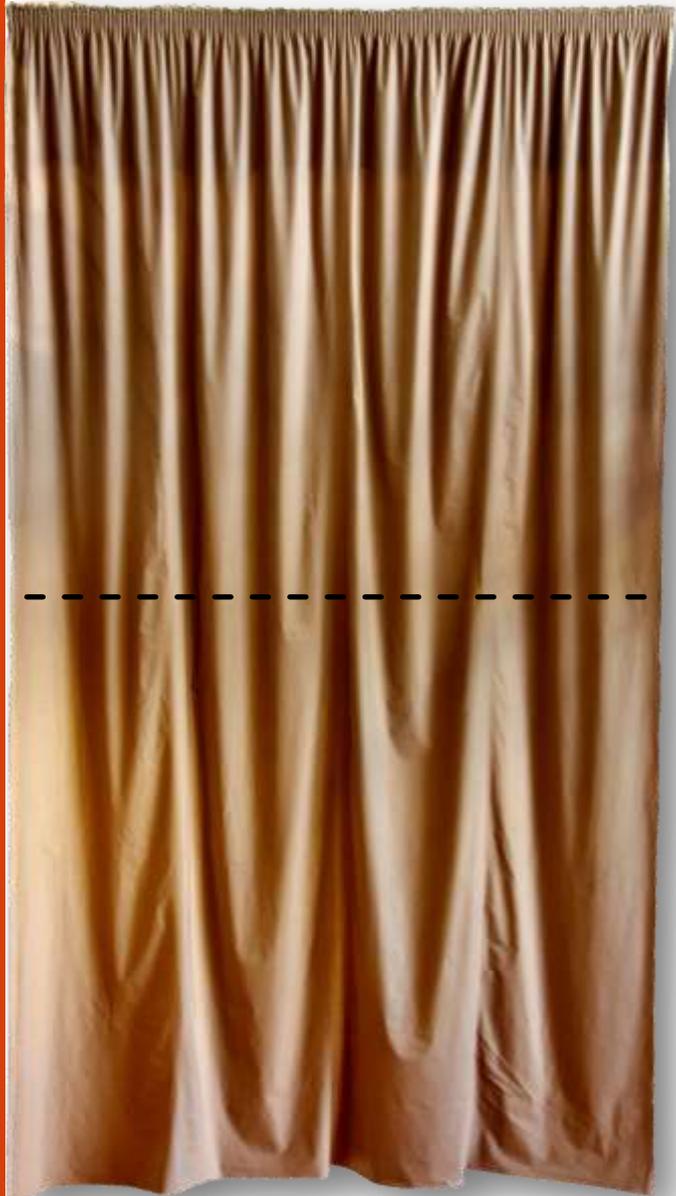
• Comment évolue $L(\lambda)$ avec λ (sans tension) ?



$$\frac{L}{\lambda} \sim \left(\frac{A}{h}\right)^{1/2} \quad A \sim \lambda\sqrt{\delta}$$

$$L \sim \lambda^{3/2}$$

Hiérarchie de plis: mesures



- Est-ce que les mesures valident l'idée que la structure globale peut se comprendre comme un assemblage de zones de transition ?

x • Taille du wrinklon: $L \sim \lambda^{3/2}$

- Evolution de λ prévue: $\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\lambda}{L(\lambda)}$

$\lambda(x)$ • La solution est: $\lambda \sim x^{2/3}$

- En accord avec l'évolution mesurée

- A ce stade, on doit connaître l'expression de $L(\lambda)$ en fonction des paramètres du système

Hiérarchie de plis: taille du wrinklon (sans tension)



$$U_B \sim Eh^3 \kappa^2 S$$

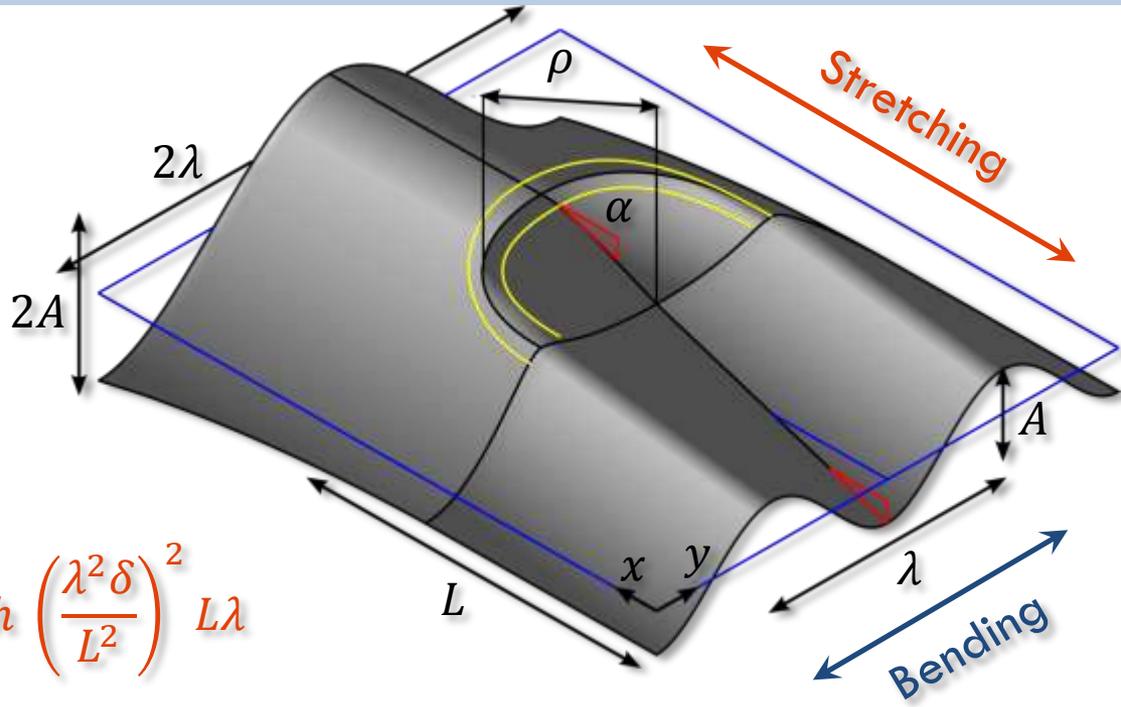
$$U_S \sim Eh \delta^2 S$$

$$\kappa \sim \frac{A}{\lambda^2}$$

$$\delta \sim \frac{A^2}{L^2}$$

$$S \sim L\lambda$$

$$A \sim \lambda\sqrt{\delta}$$



$$U = U_B + U_S \sim Eh^3 \left(\frac{\sqrt{\delta}}{\lambda}\right)^2 L\lambda + Eh \left(\frac{\lambda^2 \delta}{L^2}\right)^2 L\lambda$$

$$U \sim Eh^3 \delta \lambda^{-1} L + Eh \delta^2 \lambda^5 L^{-3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial L} = 0 \Rightarrow$$

$$L \sim \frac{\delta^{1/4} \lambda^{3/2}}{h^{1/2}}$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\lambda}{L(\lambda)} \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda \delta^{1/6}}{h} \sim \left(\frac{x}{h}\right)^{2/3}$$

Hiérarchie de plis: taille du wrinklon (sans tension)



$$U_B \sim Eh^3\kappa^2S$$

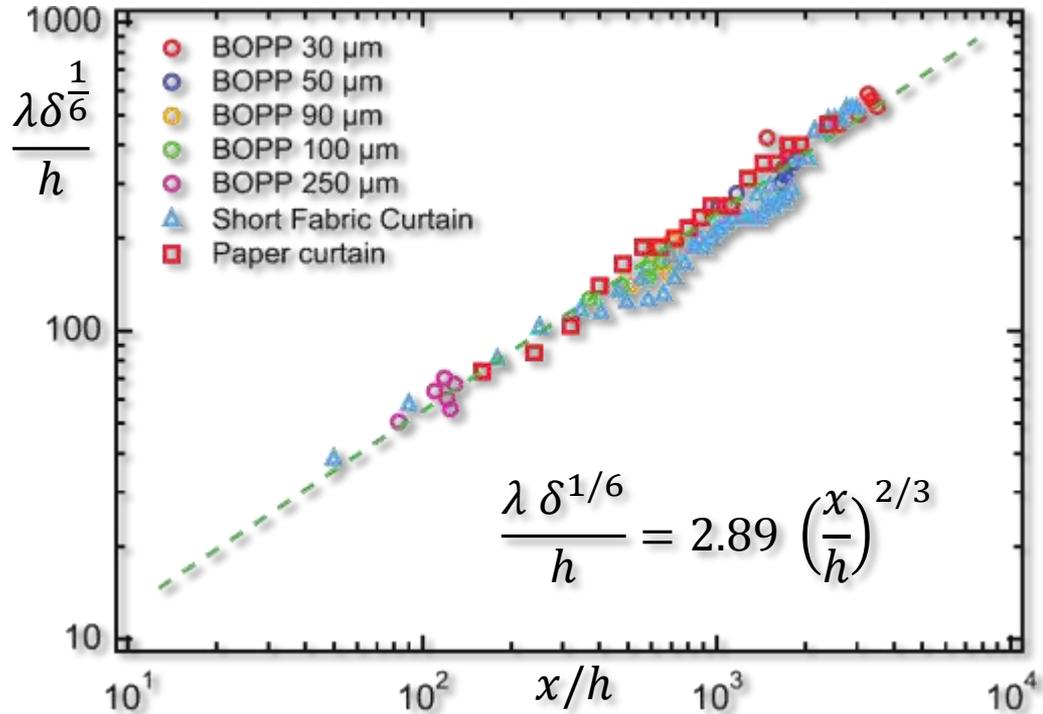
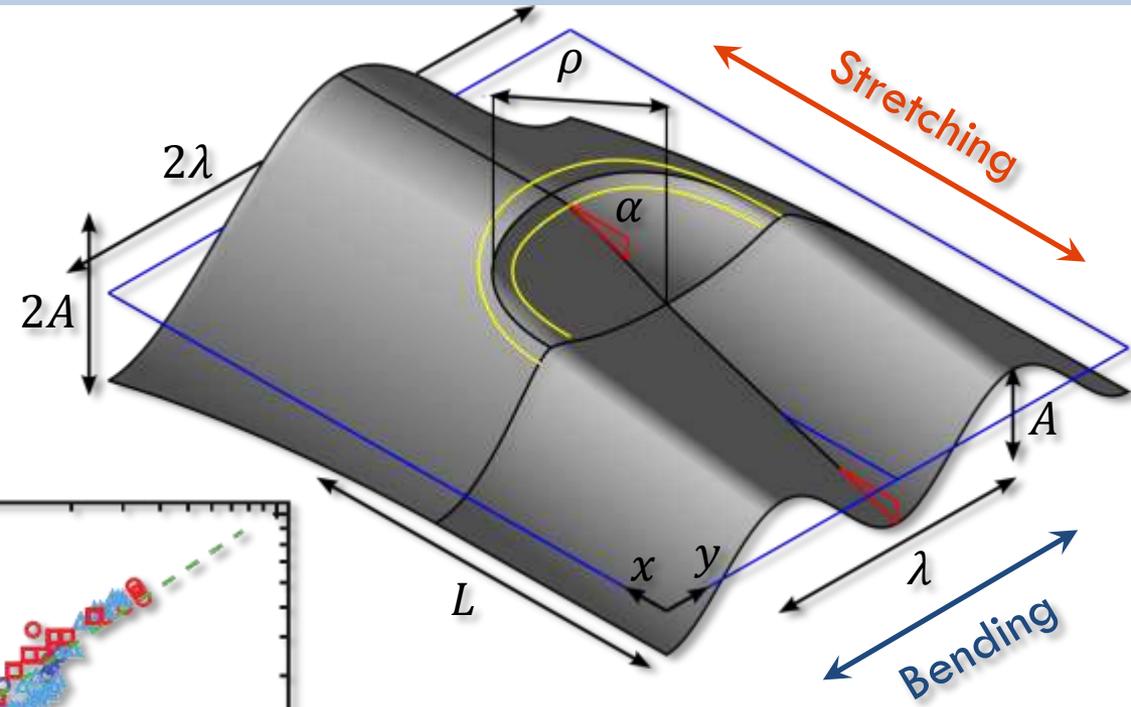
$$U_S \sim Eh\delta^2S$$

$$\kappa \sim \frac{A}{\lambda^2}$$

$$\delta \sim \frac{A^2}{L^2}$$

$$S \sim L\lambda$$

$$A \sim \lambda\sqrt{\delta}$$



$$\frac{\lambda \delta^{1/6}}{h} \sim \left(\frac{x}{h}\right)^{2/3}$$

Hiérarchie de plis: taille du wrinklon (avec tension)



$$U_B \sim Eh^3 \kappa^2 S$$

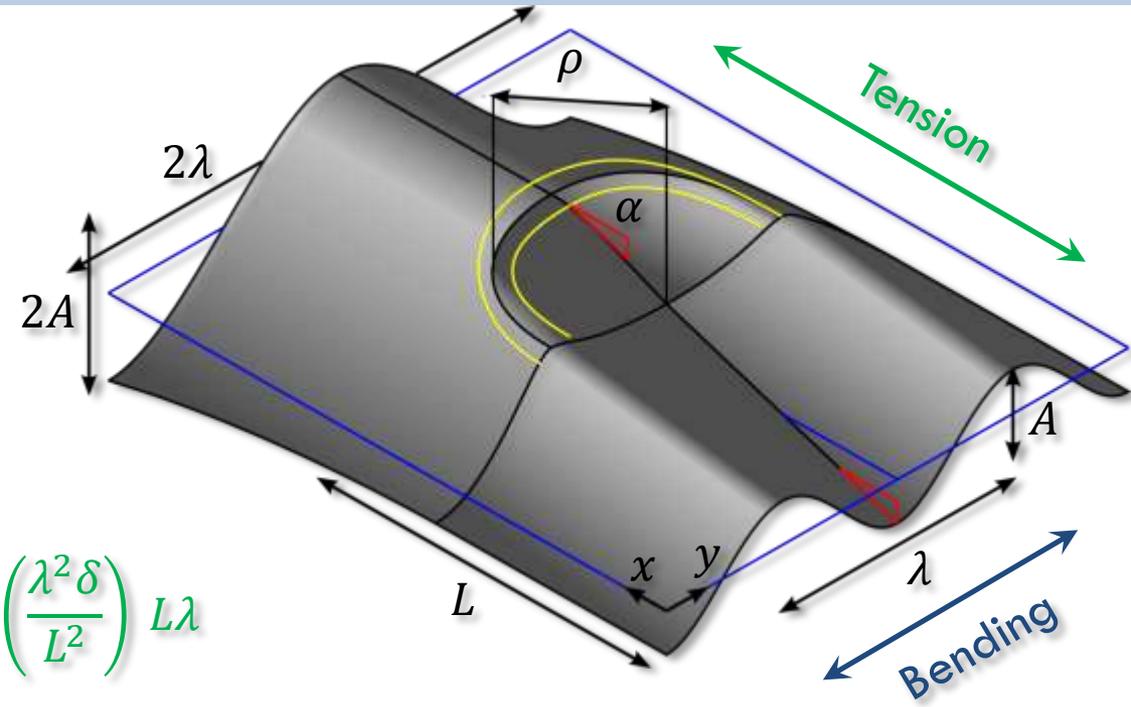
$$U_T \sim T \delta S$$

$$\kappa \sim \frac{A}{\lambda^2}$$

$$\delta \sim \frac{A^2}{L^2}$$

$$S \sim L\lambda$$

$$A \sim \lambda\sqrt{\delta}$$



$$U = U_B + U_S \sim Eh^3 \left(\frac{\sqrt{\delta}}{\lambda} \right)^2 L\lambda + T \left(\frac{\lambda^2 \delta}{L^2} \right) L\lambda$$

$$U \sim Eh^3 \delta \lambda^{-1} L + T \delta \lambda^3 L^{-1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial L} = 0 \Rightarrow$$

$$L \sim \frac{\lambda^2}{h} \left(\frac{T}{Eh} \right)^{1/2}$$

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\lambda}{L(\lambda)} \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda}{h} \sim \left(\frac{Eh}{T} \right)^{1/4} \left(\frac{x}{h} \right)^{1/2}$$

Hiérarchie de plis: taille du wrinklon (avec tension)



$$U_B \sim Eh^3\kappa^2S$$

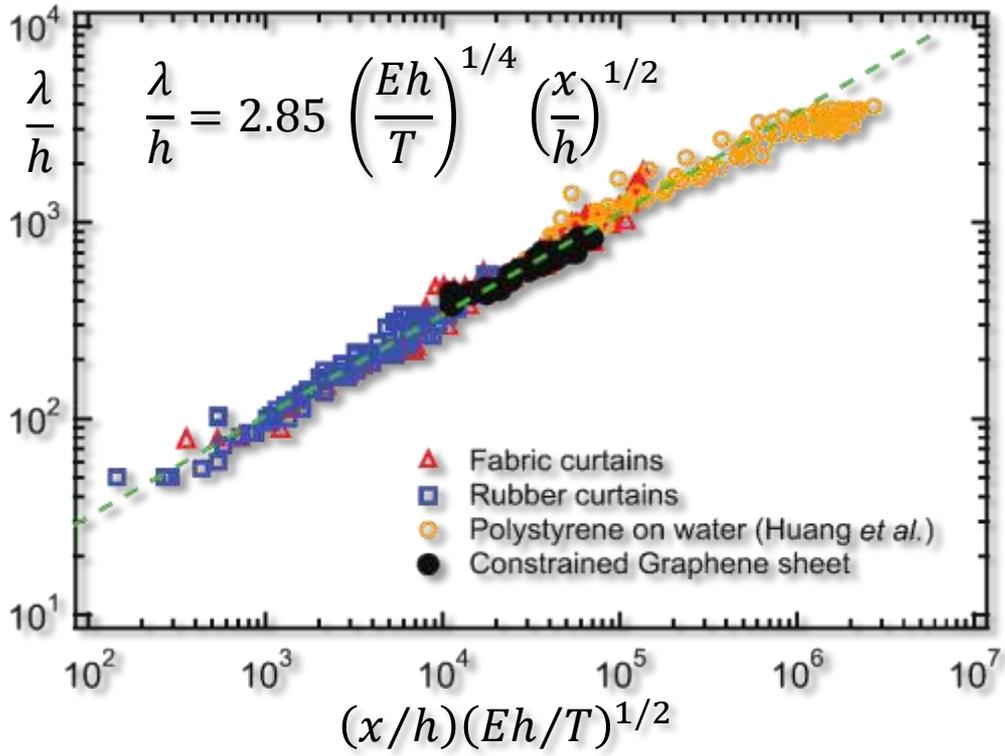
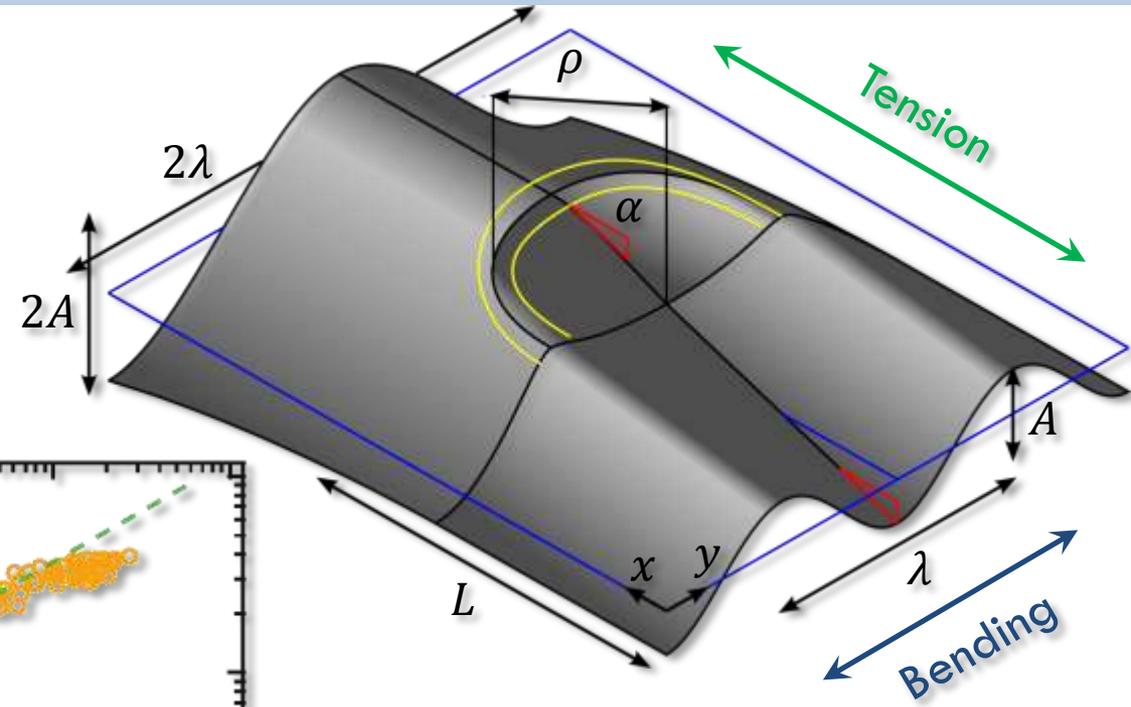
$$U_T \sim T\delta S$$

$$\kappa \sim \frac{A}{\lambda^2}$$

$$\delta \sim \frac{A^2}{L^2}$$

$$S \sim L\lambda$$

$$A \sim \lambda\sqrt{\delta}$$



$$\frac{\lambda}{h} \sim \left(\frac{Eh}{T}\right)^{1/4} \left(\frac{x}{h}\right)^{1/2}$$

Hiérarchie de plis: scaling (avec tension)



$$L \sim \frac{\lambda^2}{h} \left(\frac{T}{Eh} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \lambda^2$$

Hiérarchie de plis: scaling



$$\lambda_0, \quad L(\lambda_0)$$

$$\lambda_1 = 2\lambda_0, \quad L(\lambda_1) = 4L(\lambda_0)$$

$$L \sim \frac{\lambda^2}{h} \left(\frac{T}{Eh} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \lambda^2$$

Hiérarchie de plis: scaling



$$L \sim \frac{\lambda^2}{h} \left(\frac{T}{Eh} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \lambda^2$$



$$\lambda_0, L(\lambda_0)$$



$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\lambda_0 \\ L(\lambda_1) &= 4L(\lambda_0) \end{aligned}$$

Hiérarchie de plis: scaling



$$L \sim \frac{\lambda^2}{h} \left(\frac{T}{Eh} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \lambda^2$$



$\lambda_0, L(\lambda_0)$

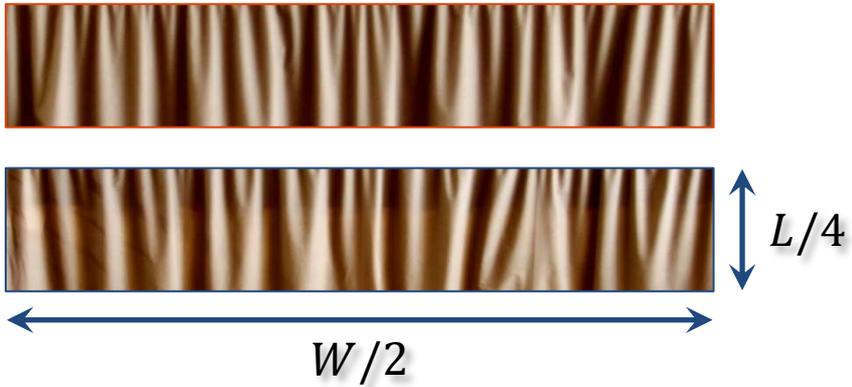


Hiérarchie de plis: scaling



$$L \sim \frac{\lambda^2}{h} \left(\frac{T}{Eh} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \lambda^2$$

$$\lambda_0, L(\lambda_0)$$



Hiérarchie de plis: scaling



Hiérarchie de plis: scaling



Fusion



Hiérarchie de plis: rideaux du salon



- Longueur d'onde constante le long du rideau:
 - Longueur d'onde grande comparée à l'épaisseur du rideau. La longueur de transition est plus grande que la longueur du rideau.

$$L \sim \frac{\Delta^{1/4} \lambda^{3/2}}{h^{1/2}}$$

$$L \sim \frac{\lambda^2}{h} \left(\frac{T}{Eh} \right)^{1/2}$$

- Des poids étaient parfois ajoutés pour lester les rideaux:
 - Cela permet de passer en régime sous tension où la longueur de transition est plus grande pour une longueur d'onde donnée. Cela évitait les transitions et permettait de maintenir une longueur d'onde constante (considéré comme esthétiquement plus joli)

Références



- **Hiérarchie de plis:**

- H. Vandeparre, M. Pineirua, F. Brau, B. Roman, J. Bico, C. Gay, W. Bao, C.N. Lau, P. Reis et P. Damman, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 224301 (2011)

- **Pli droit:**

- A.E. Lobkovsky et T.A. Witten, *Phys. Rev. E* **55**, 1577 (1997)

- **D-cône:**

- M. Ben Amar et Y. Pomeau, *Proc. R. Soc. A* **453**, 729 (1997)
- E. Cerda *et al.*, *Nature (London)* **401**, 46 (1999)

- **Pli courbe:**

- A.V. Pogorelov, *Bendings of Surfaces and Stability of Shells*, Translations of Mathematical Monographs Vol. **72** (American Mathematical Society, Providence, 1988)