Murs de sable et aquifères

À retenir:
Loi de Darcy dans un milieu poreux:

$$\mathbf{U} = \frac{\kappa}{\eta}\left(\rho\mathbf{g} - \boldsymbol{\nabla} p\right)$$

$\mathbf{U}$ vitesse apparente, $\kappa \sim \frac{d_{grain}^2}{\phi}$ perméabilité, ϕ porosité.
soit pour un écoulement horizontal sur une épaisseur L:

$$U = \frac{\kappa}{\eta}\frac{\Delta p}{L}$$

Pour en savoir plus
Séminaire d'Éric Lajeunesse, *How groundwater responds to rainfall*
`https://www.youtube.com/live/dUHckguCQxs?si=T4LIOPj4HCl0ryNn`

Thèse d'Adrien Guérin, *Dynamics of groundwater flow in an unconfined aquifer*
`https://hal.science/tel-01884762`
Cours de l'IPGP, *Éléments d'hydrogéologie pour la géophysique de l'environnement*
`http://step.ipgp.jussieu.fr/images/a/a3/GEch2.pdf`

1 Loi de Darcy

Une manière de se protéger d'une inondation consiste à bâtir une digue de sable. Néanmoins le sable est poreux et l'eau va progressivement passer au travers. De la même manière, la pluie imprègne les sols et s'écoule sous terre dans les aquifères qui, à son tour, alimente les rivières. L'hydrogéologie est une science complexe du fait de l'hétérogénéité des terrains. Nous proposons ici d'illustrer une loi fondamentale au cœur des écoulements dans les sols et plus généralement dans les milieux poreux, la loi de Darcy.

Considérons un bloc de sable de section S et d'épaisseur L. Les grains de sable ont une taille caractéristique d_{grain} et notons ϕ la porosité du milieu (quelques valeurs typiques de porosités de sols sont indiquées dans le tableau 1.

Type sol	Porosité (%)	Perméabilité (m^2)
Granit, Gneiss	1-5	$10^{-18} - 10^{-16}$
Calcaire	5-40	10^{-15}
Grès	5-20	10^{-15}
Sable	20-40	10^{-12}
Gravier	20-40	10^{-10}

Table 1: Valeurs typiques de porosité et de perméabilité de sols.

1.1. Du point de vue des écoulements, un bloc poreux peut être assimilé à une série de tubes capillaires parallèles très fins dont le diamètre serait du même ordre de grandeur que la taille des pores (Fig. 1). On considère une vitesse d'écoulement effective $U = Q/S$ où Q est le débit de fluide traversant le poreux. Quel est le lien entre la "vraie" vitesse moyenne dans les pores U_{vrai} et U ?

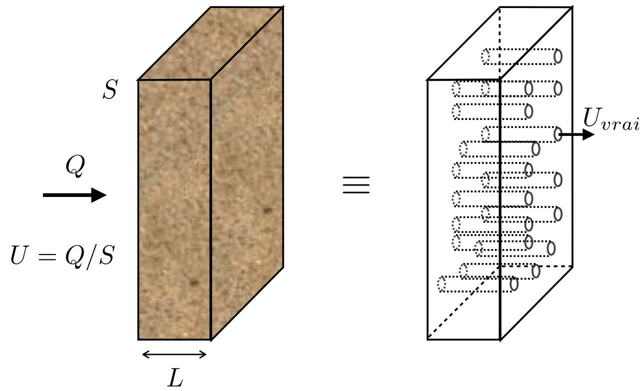

Figure 1: Modélisation hydraulique d'un bloc de sable en une série de capillaires parallèles. La vitesse d'écoulement apparente est définie par le rapport du débit de liquide par la section du bloc. Cette vitesse diffère de la "vraie" vitesse moyenne du fluide dans les capillaires.

1.2. Les mesures expérimentales indiquent que la vitesse apparente U est proportionnelle au gradient de pression appliqué à travers l'épaisseur du poreux. C'est la fameuse loi de Darcy qui s'écrit dans le cas général :

$$\mathbf{U} = \frac{\kappa}{\eta}\left(\rho\mathbf{g} - \boldsymbol{\nabla} p\right)$$

Pour un écoulement horizontal, cette loi s'écrit :

$$U = -\frac{\kappa}{\eta}\frac{\Delta p}{L}$$

- Justifier cette relation à partir d'une estimation d'un nombre de Reynolds.
- Quel est le lien en ordre de grandeur entre la perméabilité κ, la taille moyenne des grains de sable d_{sable} et ϕ ?

Le tableau 1 indique des valeurs typiques de perméabilité pour des sols (une unité couramment utilisée par les hydrogéologues est le Darcy, $1\,\mathrm{Da} = 10^{-12}\,\mathrm{m}^2$).

2 Décharge à travers une digue de sable

Imaginons que suite à une inondation, nous cherchions à protéger notre maison grâce à une barrière réalisée avec des sacs de sable. Afin de simplifier le problème, on considère un mur de largeur L (élevée) bâti sur un sol imperméable. L'eau se situe à un niveau h_1 du côté inondé et un niveau $h_2 < h_1$ du côté protégé (Fig. 2). Si on néglige les effets de la capillarité, le mur comprend une région saturée d'eau caractérisée par une hauteur locale $h(x)$ dans laquelle l'écoulement se produit et qui est surmontée d'une zone "sèche" (même si en réalité, cette zone est partiellement imprégnée d'eau à cause de la capillarité). On supposera que $h(x)$ est stationnaire. Afin de décrire l'écoulement latéral de l'eau à travers le mur épais, l'ingénieur

Arsène Dupuit a proposé une approximation qui est l'analogue de l'approximation de lubrification étudiée en cours.

Figure 2: Gauche: Barrière de protection contre une crue réalisée avec des sacs de sable (source : zurich.com). Droite: Version simplifiée ; le mur de sable de largeur L comprend une partie saturée d'eau de hauteur locale $h(x)$ dans laquelle l'écoulement se produit. Cette zone est surmontée d'une région considérée comme sèche (on néglige ici les effets de la capillarité).

2.1. Si on néglige la composante verticale de la vitesse de l'eau (hypothèse de Dupuit), quelle est la distribution verticale de pression $p(x, z)$ pour une abscisse horizontale x donnée ?

2.2. On considère à présent une tranche infinitésimale de mur dx. Montrer que le débit à travers cette tranche vaut, par unite de largeur :

$$q(x) = -\frac{\kappa \rho g}{\eta} h \frac{dh}{dx}$$

Le paramètre $K = \frac{\rho g \kappa}{\eta}$ est nommé par les hydrogéologues *conductivité hydraulique*. Quelle est son unité ?

2.3. Toujours dans l'hypothèse d'un profil stationnaire, quel est le profil $h(x)$ du niveau de l'eau le long du mur ? En déduire le débit par unité de largeur à travers le mur. En hydrogéologie, cette relation est connue sous le nom de Loi de décharge de Dupuit-Forchheimer pour un aquifère libre.

Quelle hypothèse est mise à défaut au début de l'inondation lorsque h est proche de 0 ?

2.4. Dans l'exemple précédent, nous avons supposé que les deux niveaux h_1 et h_2 étaient fixés. Nous nous intéressons à présent au cas où le niveau h_2 va fatalement augmenter. Pendant combien de temps notre mur sera-t-il efficace ?

Pour simplifier le problème nous considérons une configuration 2D où une étendue de demi-largeur b est protégée de part et d'autre par deux murs de sable. Nous supposerons que le niveau extérieur d'eau h_1 est constant alors que le niveau intérieur h_2 augmente progressivement (Fig. 3).

Si h_2 évolue lentement, nous pouvons faire l'hypothèse que le problème est quasi-stationnaire et utiliser la relation précédente avec h_2 qui varie au cours du temps.

Quelle équation gouverne la progression de $h_2(t)$?

Quel est en loi d'échelle le temps caractéristique de remplissage τ de l'étendue protégée ?

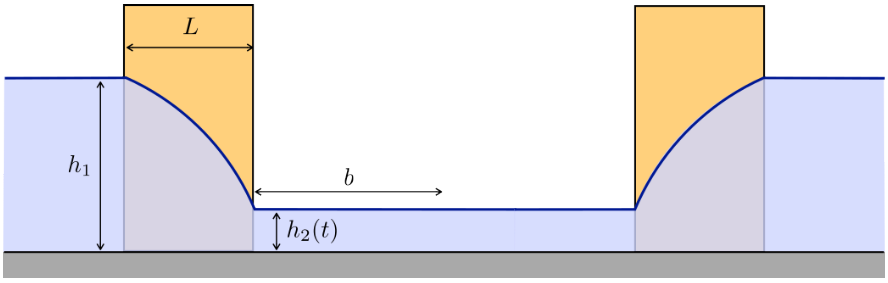

Figure 3: Remplissage progressif d'une étendue de demi-largeur b protégée par deux murs de sable.

Les plus courageux trouveront une solution exacte sous la forme :

$$h_2(t) = h_1 \frac{1 - \exp(-t/\tau)}{1 + \exp(-t/\tau)}$$

3 Réponse d'un aquifère à un orage

Nous nous intéressons à présent aux écoulements dans les aquifères qui alimentent nos rivières (Fig. 4). En particulier nous cherchons à décrire l'impact d'un orage sur la dynamique de *montée en crue* d'une rivière, le régime de *saturation* si la pluie dure longtemps et enfin le régime *d'étiage* lorsque la pluie cesse.

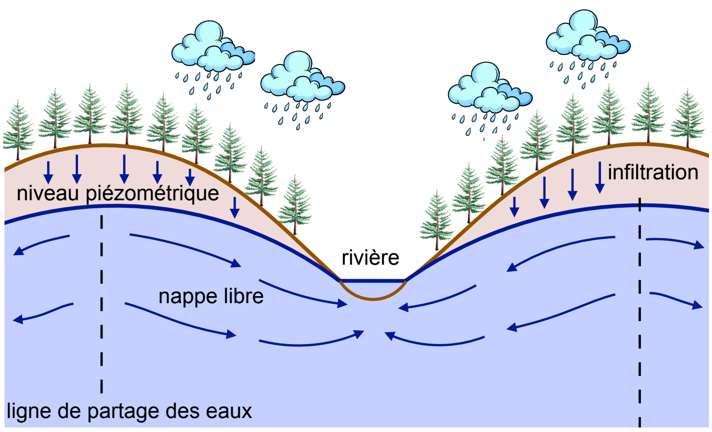

Figure 4: Schéma simplifié d'un aquifère. L'eau de pluie s'infiltre dans la zone insaturée pour atteindre la nappe libre à travers laquelle elle s'écoule et vient alimenter la rivière. La nappe libre est limitée par le niveau *piézométrique* où la pression dans l'eau est égale à la pression atmosphérique.

3.1 Pluviométrie

Les bulletins météorologiques nous donnent quotidiennement des cartes de pluviométrie en hauteur d'eau tombée par heure. Cette donnée correspond au flux volumique de pluie qui est homogène à une vitesse. Ainsi le niveau d'eau dans un vase cylindrique soumis à une

pluviométrie P pendant un temps t atteint la hauteur $h_0 = Pt$.
Si ce même vase est rempli de grains de porosité ϕ, quelle est la hauteur atteinte au bout d'un temps t ?

Pour donner des ordres de grandeur, les sites de météorologie utilisent comme qualificatifs :
- précipitation faible : $P < 3\,\mathrm{mm/h}$
- précipitation modérée : $3\,\mathrm{mm/h} < P < 8\,\mathrm{mm/h}$
- précipitation forte : $P > 8\,\mathrm{mm/h}$

Reste à incorporer la pluviométrie dans le bilan de flux dans la nappe libre. Comme dans le problème précédent, nous supposerons que la vitesse d'écoulement est essentiellement horizontale. À partir d'un bilan de conservation de flux sur une tranche de nappe dx pendant un temps dt (Fig. 5) établir la relation :

$$\phi \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + P$$

En utilisant l'expression précédemment obtenue pour $q(x)$ en déduire l'équation de Dupuit-Boussinesq :

$$\phi \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\rho g \kappa}{2\eta} \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + P$$

Cette relation permet de prédire l'évolution spatiale et temporelle du niveau de l'aquifère.

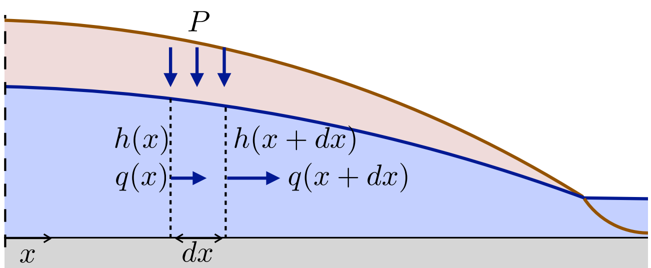

Figure 5: Conservation du flux dans l'approximation de Dupuit.

3.2 Une expérience modèle

Tester la validité de la relation de Dupuit-Boussinesq directement avec des données de terrain peut s'avérer compliqué à cause d'hétérogénéités locales ou de la difficulté pour mesurer indépendamment les caractéristiques du sol. Au cours de sa thèse à l'Institut de Physique du Globe, Adrien Guérin a mis au point une expérience modèle dans laquelle un lit de billes de verre est inséré entre deux plaques de verre parallèles. La longueur L de la cellule est de l'ordre de 150 cm. Le fond de la cellule est étanche ainsi qu'un des côtés qui représentera une ligne de partage des eaux. Le côté opposé est fermé par une grille qui retient les grains mais laisse passer l'eau. Un dispositif d'arrosage est placé au-dessus du lit afin d'imposer des averses de durée et d'intensité contrôlées (Fig. 6). La nappe libre apparaît très clairement par contraste optique. Le débit d'eau s'écoulant à travers la grille est mesuré grâce à une balance.

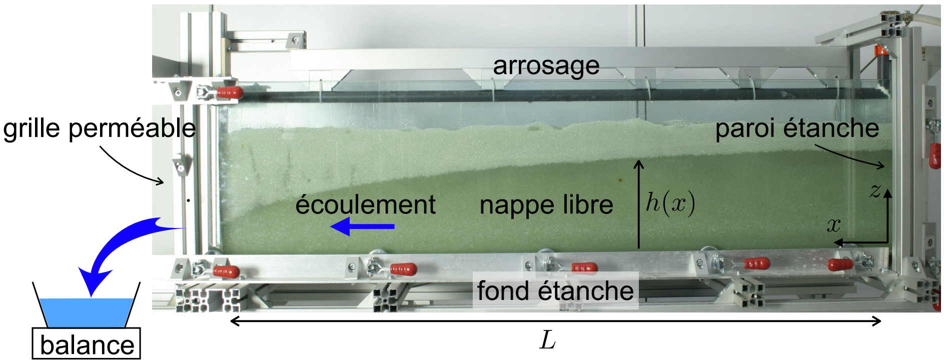

Figure 6: Expérience modèle mise au point par Adrien Guérin au cours de sa thèse.

Une expérience typique consiste à arroser le lit de billes de verre de manière homogène pendant un certain temps et de mesurer en parallèle le débit d'eau à la sortie. Deux expériences correspondant à des durées d'averses différentes sont représentées sur la Figure 7. Dans ces expériences, le lit est initialement sec. On observe un régime de montée en crue avec éventuellement une saturation si la pluie dure suffisamment longtemps. L'arrêt de l'averse se traduit ensuite par un régime d'étiage au cours duquel le débit se tarit progressivement. Pouvons-nous décrire ces trois régimes, au moins de manière simplifiée ?

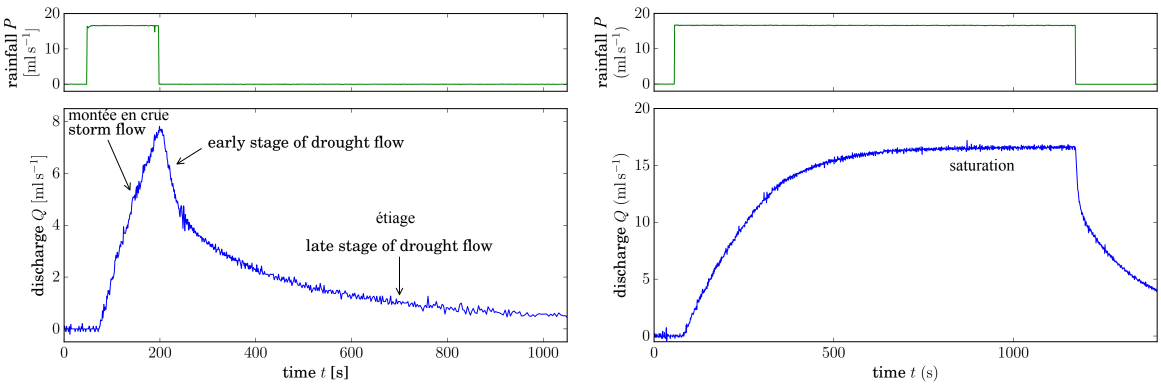

Figure 7: Réponse à une averse. Nous observons un régime de montée en crue éventuellement suivi d'une saturation si le créneau est suffisamment long, puis un régime d'étiage à la fin de l'averse.

3.2.1 Saturation

Si la pluie est continue, nous observons que le débit d'eau sature (Fig. 7). Quel est le débit de saturation pour une pluviométrie constante P sur un lit de sable de longueur L ?

Afin de dimensionner l'expérience, en particulier la hauteur de sable à verser, il est intéressant de prédire le profil $h(x)$ de la nappe libre. Dans cette situation stationnaire quel est le profil $h(x)$? Quelle condition doit-on vérifier pour que la nappe libre ne dépasse pas l'épaisseur de sable ?
Notre description est-elle rigoureuse près de la sortie de la cellule ?

Retrouver l'expression du débit de sortie à partir du profil.

3.2.2 Étiage aux temps longs

Un second régime simple à appréhender est la décroissance du débit dans la nappe libre lorsque la pluie cesse. En effet, le terme de pluviométrie P dans la relation de Dupuit-Boussinesq disparait. On se propose d'évaluer l'évolution du débit en loi d'échelle.
Si h et l sont la hauteur et la largeur caractéristiques de la nappe, comment s'écrit la relation de Dupuit-Boussinesq en loi d'échelle ?
En déduire la manière dont h évolue au cours du temps.
Écrire l'expression entre q et h en loi d'échelle et en déduire l'évolution temporelle de q. Cette expression est-elle en accord avec les données expérimentales (Fig. 8) ?

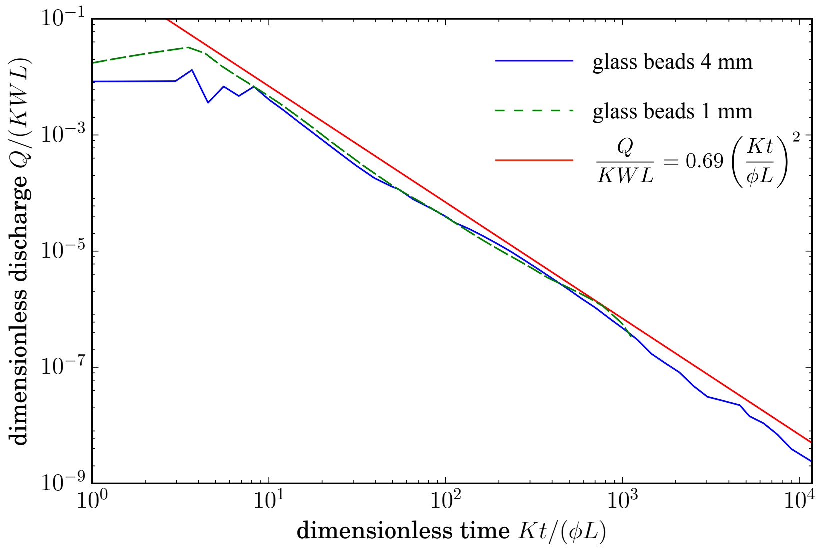

Figure 8: Étiage aux temps longs. Expériences réalisées pas Adrien Guérin avec des billes de verre de 1 mm et 4 mm de diamètre. Le paramètre K correspond à la *conductivité hydraulique* $K = \kappa\rho g/\eta$.

3.2.3 Montée en crue

Du point de vue pratique, il est crucial de pouvoir anticiper la montée en crue d'une rivière en fonction de la pluviométrie prévue par la météo. Cependant le problème est plus complexe à résoudre car nous devons prendre en compte les 3 termes de la relation de Dupuit-Boussinesq. Une manière de s'en sortir consiste à séparer la nappe libre en deux régions, l'une près de la sortie dont le profil $h(x)$ est très courbé et l'autre en amont pour laquelle $h(x)$ varie très peu. Nous notons L_f l'étendue de la partie courbée et supposons $L_f \ll L$, si bien que la partie plate a une longueur caractéristique L (Fig 9).

Commençons par décrire la région "plate". Si nous négligeons le terme en $\partial^2 h^2/\partial x^2$ devant les autres termes de la relation de Dupuit-Boussinesq, qu'obtenons-nous pour l'évolution de h (dans la partie quasi-uniforme) au cours du temps ?

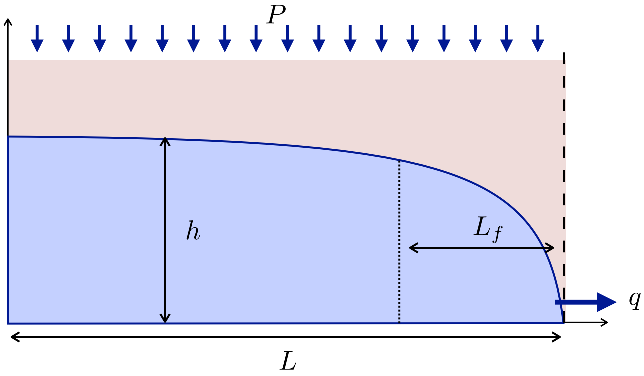

Figure 9: Découpage simplifié de la nappe libre en deux régions. Près de la sortie, le profil $h(x)$ varie rapidement sur une distance caractéristique L_f (on suppose $L_f \ll L$). Loin de la sortie, h varie peu spatialement et est considéré comme uniforme.

Comment pourrait-on mesurer $h(t)$ sur le terrain ? Quelle caractéristique du terrain pourrait-on estimer grâce à cette mesure ?

Intéressons-nous à présent à la région près de la sortie où $h(x)$ varie beaucoup. Nous supposerons que le terme $\frac{\rho g \kappa}{2\eta}\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}$ domine sur le terme $\phi \frac{\partial h}{\partial t}$.

Écrire en loi d'échelle la relation de Dupuit-Boussinesq dans cette configuration et en déduire l'évolution de L_f au cours du temps.

À partir de la loi pour L_f déterminer, toujours en loi d'échelle l'évolution de $q(t)$ à la sortie de la cuve.

Cette prédiction est-elle en accord avec les mesures expérimentales (Fig. 10) ?

Nous avons initialement supposé $L_f \ll L$. Sur quelle durée typique cette condition est-elle valable ? Que devient le débit au-delà de cette durée ?

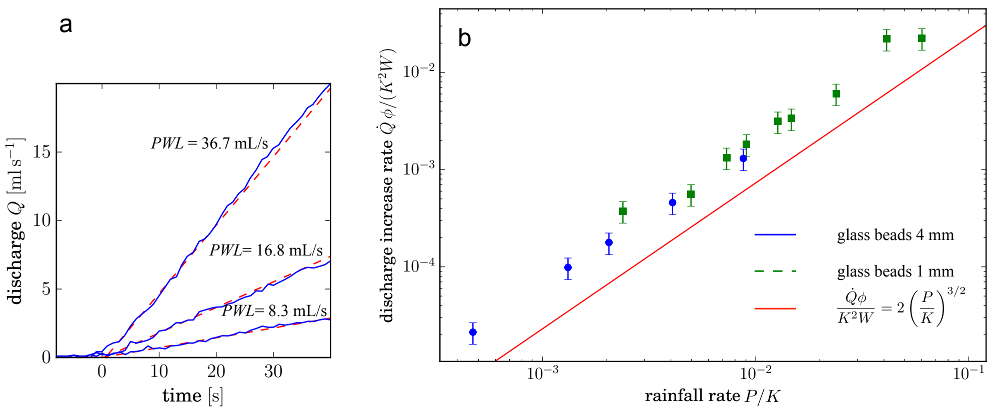

Figure 10: **a**. Évolution du débit total Q au cours du temps au début de la montée en crue pour différentes pluviométries (expériences réalisées pas Adrien Guérin). **b** Taux de croissance du débit $\dot{Q}$ en fonction de la pluviométrie pour des billes de verre de 1 mm et 4 mm de diamètre. Le paramètre K correspond à la *conductivité hydraulique* $K = \kappa\rho g/\eta$.