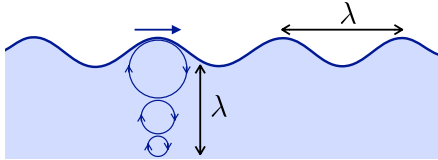


# Ondes de surface

Notes de cours: Chapitres 5 et 8.

À retenir:



Profondeur caractéristique de l'écoulement:  $\lambda$

Trajectoire des particules pour des ondes propagatives en eau profonde: cercles.

Ondes gravitaires (eau profonde):  $\omega^2 = gk$

Ondes capillaires (eau profonde):  $\omega^2 = \gamma k^3 / \rho$

Ondes gravitaires en eau peu profonde:  $\omega^2 = ghk^2$

## 1 Relation de dispersion

Les clichés présentés sur la figure ?? illustrent des ondes à la surface de l'eau à différentes échelles. Ces vagues sont caractérisées par une amplitude mais également une longueur d'onde et une fréquence. Nous cherchons ici à déterminer la *relation de dispersion*, c'est-à-dire le lien entre fréquence et longueur d'onde.



Figure 1: Vagues à différentes échelles: tempête sur le phare d'Ar-Men ([www.plisson.com](http://www.plisson.com)), surf sur le mascaret qui remonte l'estuaire de la Gironde ([journal Sud-Ouest](http://journal Sud-Ouest)), ondes autour d'un *gerris* ([djanstewart.blogspot.com](http://djanstewart.blogspot.com)).

### 1.1 Profondeur d'atténuation

*Quel est l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds à l'échelle de la houle? et d'une araignée d'eau? En déduire que l'on peut décrire l'écoulement de l'eau sous les vagues par un potentiel des vitesses  $\varphi$ .*

Nous cherchons à décrire des ondes propagatives de longueur d'onde  $\lambda$ , de faible amplitude  $A \ll \lambda$  et de fréquence  $\omega$  (Fig 2):

$$\xi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

où  $k = 2\pi/\lambda$  est le nombre d'onde.

Cherchons des solutions pour le potentiel de vitesse de la forme:

$$\varphi(x, z, t) = f(z) \cos(kx - \omega t + \alpha)$$

Quelle équation doit vérifier  $\varphi$ ?

En déduire une expression de  $f$  dans le cas d'un milieu liquide semi-infini.

Au bout de quelle profondeur un plongeur ne ressent-il plus la houle présente à la surface ?

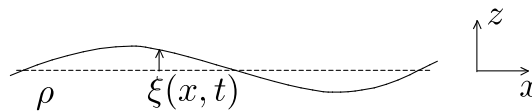


Figure 2: Profil de la surface sous la forme  $\xi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ .



Figure 3: À partir de quelle profondeur le plongeur ne ressent-il plus les effets de la houle?

## 1.2 Lois d'échelle

Les vagues dans la mer ou plus simplement dans une cuve remplie d'eau sont des ondes qui se propagent à une certaine vitesse. Cette vitesse dépend de leur longueur d'onde: le milieu est dispersif. Essayons de déterminer les grandes lignes de la relation de dispersion en loi d'échelle. La dynamique des vagues est dictée par un effet de balancier entre l'énergie cinétique et une énergie potentielle due à la gravité et la tension de surface du liquide.

Montrer que l'énergie cinétique contenue dans une longueur d'onde s'écrit par unité de largeur:

$$\mathcal{E}_c \sim \rho(A\omega)^2 \lambda^2$$

Montrer que l'énergie potentielle de gravité correspondante varie comme:

$$\mathcal{U}_g \sim \rho g \lambda A^2$$

En déduire la vitesse de phase pour des ondes gravitaires:

$$V_{\varphi_g} \sim (g\lambda)^{1/2}$$

De la même manière, montrer que l'énergie de surface correspondante s'écrit:

$$U_s \sim \gamma A^2 / \lambda$$

En déduire la vitesse de phase pour des ondes capillaires:

$$V_{\varphi_c} \sim \left( \frac{\gamma}{\rho \lambda} \right)^{1/2}$$

Pour quelles longueurs d'onde la gravité ou la capillarité dominent-elles?

Que devient la vitesse de phase des ondes gravitaires dans le cas où  $\lambda$  est élevé par rapport à la hauteur d'eau  $h$  ?

### 1.3 Dérivation “propre” de la relation de dispersion

#### Conditions cinématiques

À partir du mouvement d'une particule située à l'interface, montrer que la relation liant la composante transverse de la vitesse au déplacement  $\xi(x, t)$  s'écrit au premier ordre:

$$v|_{z \simeq 0} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u|_{z \simeq 0} \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

où  $u$  et  $v$  sont les composantes respectives de la vitesse selon  $x$  et  $z$ . Exprimer le préfacteur de l'expression de  $f$  en fonction de l'amplitude.

#### Équation de Bernoulli

Après avoir établi les relations cinématiques, il nous reste à introduire l'équilibre entre énergies cinétique et potentielle que nous avons appréhendé en loi d'échelle. L'équation de Bernoulli (instationnaire) traduit cet équilibre.

Quelle est la pression dans le fluide juste sous l'interface?

Appliquer l'équation de Bernoulli instationnaire pour 2 points à l'interface en prenant par exemple un point où  $\xi$  est sur une crête et un autre où  $\xi = 0$ . On se limitera en un développement au 1er ordre en  $A$ .

En déduire la relation de dispersion des vagues en eau profonde.

Et en situation d'eau peu profonde où la hauteur d'eau  $h$  n'est plus négligeable devant  $\lambda$ ?

## 2 Vitesse de phase / vitesse de groupe

Déterminer la vitesse de phase  $V_\varphi$  en eau profonde et montrer qu'elle est supérieure à une valeur minimale  $V_{min}$  pour un nombre d'onde  $k_{min}$ .

Comment s'écrit la vitesse de groupe  $V_g$  ?

Tracer qualitativement les courbes  $V_\varphi$  et  $V_g$  en fonction de  $k/k_{min}$ .

Si on plante un bâton au milieu d'un cours d'eau, observe-t-on toujours des ondes? Si oui, quel type d'onde observe-t-on en amont et en aval du bâton (Fig. 4)?



Figure 4: Observe-t-on toujours des ondes autour un bâton planté dans un cours d'eau? (cours Marc Rabaud, laboratoire FAST)

### 3 Des ronds dans l'eau

Le cliché de la Fig. 5 a été obtenu en visualisant les trajectoires de traceurs présents dans l'eau parcourue d'ondes purement progressives. Le temps de pause a été ajusté à la période des ondes, de sorte à visualiser les trajectoires sur un cycle. Les trajectoires sont visiblement circulaires, au moins près de la surface.

*Considérons un point qui décrit une trajectoire circulaire de rayon  $b$  caractérisée par un angle  $\theta = \theta_0 - \omega t$  tel qu'indiqué sur la Fig. 5. Quelles sont les composantes des vitesses horizontale et verticale de ce point?*

*Quelles sont les composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse du fluide en un point de coordonnées  $(x, z)$ ? Quelle est alors la trajectoire de traceurs immergés dans le fluide dans la limite  $A \ll \lambda$ ? Pourquoi les trajectoires deviennent-elles elliptiques près du fond du bassin?*

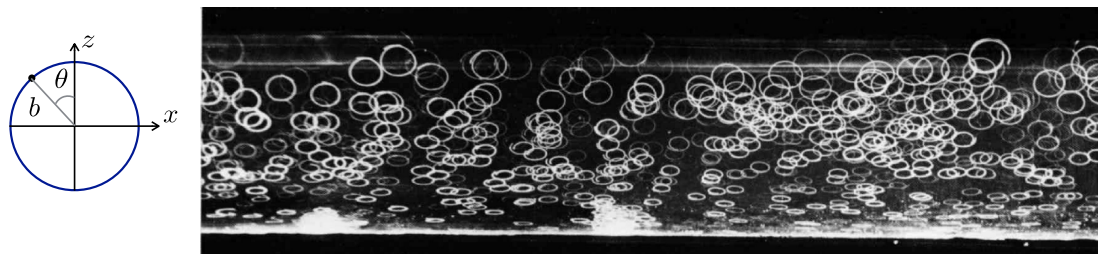


Figure 5: Trajectoires de particules dans une cuve à vagues pour des ondes progressives. Image extraite de *An album of fluid motion* par M. Van Dyke: <http://courses.washington.edu/mengr543/handouts/Album-Fluid-Motion-Van-Dyke.pdf>

#### Une lente dérive

Si les particules ont une trajectoire rigoureusement circulaire, un bouchon placé à la surface de l'eau ne devrait donc en moyenne pas bouger. Néanmoins l'expérience montre que le bouchon a tendance à dériver lentement dans le sens de propagation de l'onde. Cette dérive est d'autant plus marquée que l'amplitude des vagues est importante.

*Si on regarde plus en détail l'amplitude de la composante horizontale de la vitesse, comment varie-t-elle au cours d'un cycle?*

*De la différence de vitesse horizontale entre la position la plus haute d'une particule et la plus basse, estimer une vitesse de dérive. C'est ce que l'on appelle la dérive de Stokes.*

*Application numérique à une vague de longueur d'onde  $\lambda = 2$  m d'amplitude  $A = 10$  cm.*

## 4 Vent sur la mer

Les vagues présentes à la surface des océans sont essentiellement dues au vent qui souffle au-dessus de l'eau. La formation de ces vagues est générée par une instabilité de cisaillement étudiée par Kelvin et Helmholtz à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. L'idée est de partir d'une mer parfaitement lisse au-dessus de laquelle une brise de vitesse  $U$  se lève. En toute rigueur la mer n'est jamais parfaitement lisse et de petites perturbations peuvent être présentes. Tant que ces perturbations demeurent faibles, nous pouvons les décomposer en une somme de modes indépendants. Considérons un mode d'amplitude  $A$  et de longueur d'onde  $\lambda$ . Ce mode est stable s'il tend à s'atténuer et instable si au contraire il tend à s'amplifier.

Cette instabilité est décrite en détails sur la vidéo "vintage" suivante:

<https://www.youtube.com/watch?v=yutbmc05g2o>

*En utilisant un argument "à la Bernoulli", montrer que le vent a un rôle déstabilisant. Dans quelle limite peut-on utiliser cet argument?*

*Montrer que la perturbation s'amplifie au-delà d'une valeur critique de la vitesse de vent  $U_c$  qui dépend de  $\lambda$ :*

- dans le cas dominé par la gravité,  $U_c \sim \left( \frac{\rho_{liq}}{\rho_{air}} g \lambda \right)^{1/2}$

- dans le régime capillaire,  $U_c \sim \left( \frac{\gamma}{\rho_{air} \lambda} \right)^{1/2}$

*Le panache s'échappant d'une cheminée correspond au cas où la "mer" et le vent ont la même densité et ne présentent pas d'interface (au sens thermodynamique). À partir de quelle vitesse d'écoulement une perturbation va-t-elle s'amplifier?*