

# Panache thermique

## 1 Mouvements convectifs dans un liquide

### 1.1 Introduction

Le montage expérimental proposé illustre de manière simple la mise en mouvement d'un fluide par convection (Fig. 1a). Ce fluide (ici de l'eau) est contenu dans une enceinte ponctuellement chauffée dans sa partie inférieure (la surface supérieure du liquide est en contact avec l'air ambiant de température inférieure). La densité du liquide diminue légèrement au voisinage du point chaud, ce qui engendre son ascension à la manière d'une montgolfière. Ce phénomène est omniprésent dans la vie quotidienne : il fait monter la fumée à la sortie d'une cheminée et conduit au dépôt de poussières au dessus des radiateurs. À bien plus grande échelle, ces mouvements convectifs sont à l'origine, par exemple, de la brise thermique en bord de mer, des mouvements internes au manteau terrestre (Fig. 1b).

Ce montage permet également de mettre en œuvre une technique très utilisée en mécanique des fluides, la "Particle Image Velocimetry" ou PIV.

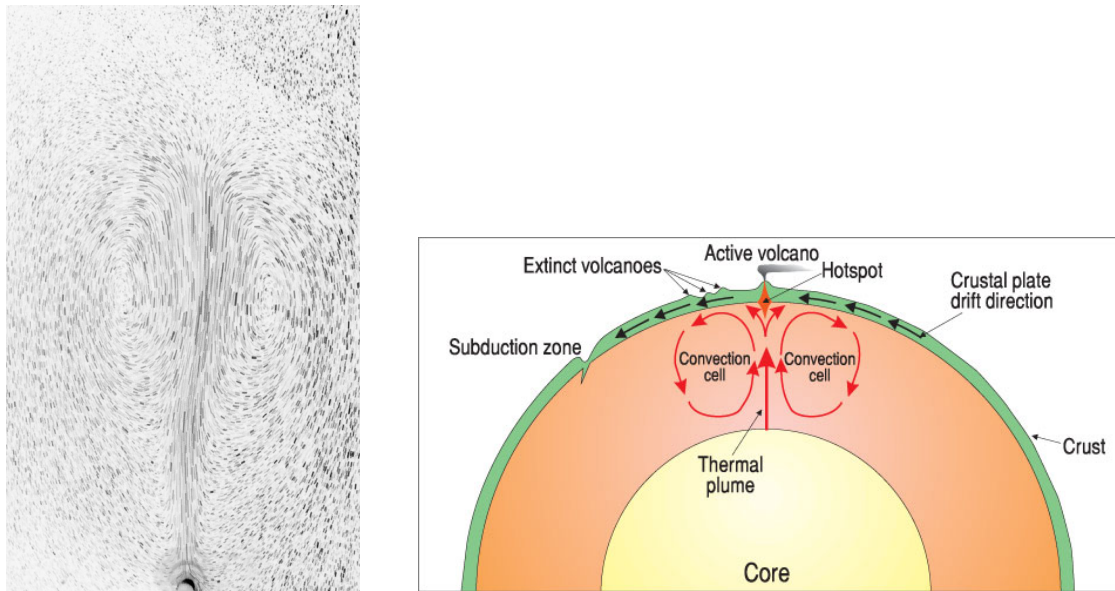


Figure 1: Convection d'un liquide: (a) montage expérimental, (b) manteau terrestre.

Pour réaliser cette expérience de convection, on chauffe un fil métallique par effet Joule, ce fil étant enroulé autour d'un cylindre de plexiglas placé dans la partie inférieure de la cuve. La mesure du courant parcourant le fil et de la tension à ses bornes permet de connaître, en régime permanent, la puissance injectée dans le liquide. On caractérisera d'une part le champ de vitesse par la méthode de PIV et d'autre part la température dans le panache thermique grâce à un thermocouple.

## 1.2 Caractérisation du panache thermique

On cherche à caractériser la structure du panache thermique, c'est-à-dire la distribution de vitesse et de température, et à estimer le flux de chaleur qui est effectivement évacué par le mouvement de convection. On fera cette caractérisation dans deux situations : le panache transitoire qui se forme lorsqu'on commence à alimenter en courant le fil chauffant et le panache établi en régime permanent.

## 1.3 Modèle simplifié de panache thermique

Un modèle extrêmement simplifié permet d'évaluer avec peu de calculs l'ordre de grandeur de la vitesse du fluide qui s'élève dans le panache thermique. On considère que l'écoulement est caractérisé par la vitesse d'ascension  $U$  et par une longueur  $L$  représentative de la largeur du panache (le gradient de vitesse est d'ordre  $U/L$ ). La vitesse d'ascension peut être évaluée en écrivant qu'elle résulte d'un équilibre entre la force de flottabilité et la friction visqueuse ou l'inertie du fluide selon la valeur du nombre de Reynolds,  $Re \sim UL/\nu$ .

La force de flottabilité est de l'ordre de  $\Delta\rho g L^3$ , la variation de masse volumique  $\Delta\rho$  étant liée à la variation de température :  $\Delta\rho = \rho_0 \alpha \Delta T$ , où  $\alpha = 1/\rho(\partial\rho/\partial T)$  est le coefficient d'expansion thermique du fluide. Dans le cas de l'eau, ce coefficient est de l'ordre de  $2.5 \cdot 10^{-4} K^{-1}$ .

-  $Re \ll 1$ , la flottabilité s'équilibre avec la force visqueuse. La contrainte (force par unité de surface) de friction visqueuse est, en ordre de grandeur,  $\eta U/L$ . La force correspondante est donc  $F_v \sim \eta U L$ , ce qui conduit à :

$$U \sim \frac{\alpha \Delta T g L^2}{\nu} \quad (1)$$

-  $Re \gg 1$ , la flottabilité s'équilibre avec la traînée engendrée par l'inertie du fluide. La contrainte inertielle est de l'ordre de  $\rho U^2$ . La traînée s'écrit donc  $F_i \sim \rho U^2 L^2$ , ce qui conduit à :

$$U \sim (\alpha \Delta T g L)^{1/2} \quad (2)$$

*À partir de ces modèles très simples, estimez l'ordre de grandeur de  $U$  et comparez avec la vitesse mesurée par PIV..*

## 1.4 Un modèle plus avancé de panache thermique

Pour décrire de manière plus précise le panache thermique, il faut écrire l'équation de transport pour la chaleur. Ici deux modes de transport de la chaleur sont mis en jeu : la diffusion moléculaire caractérisée par le coefficient de conduction thermique  $\lambda$  et la convection par l'écoulement. Le flux de chaleur dû à la diffusion est :  $J_D = -\lambda \nabla T$  et le flux de chaleur dû à la convection s'écrit :  $\mathbf{J}_C = \rho C_p \mathbf{u}(T - T_0)$  où  $C_p$  est la chaleur spécifique par unité de masse du fluide et  $T_0$  une température de référence. En présence de convection l'équation de la chaleur devient :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J}_D + \mathbf{J}_C) = 0 \quad (3)$$

soit, en supposant que l'écoulement obéisse toujours à la condition d'incompressibilité  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  (ce qui suppose que les variations locales de masse volumique soient assez petites) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{\lambda}{\rho C_p} \Delta T \quad (4)$$

En régime stationnaire :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T \quad (5)$$

où  $\kappa$  est la diffusivité thermique du fluide.

Le champ de température et le champ de vitesse sont couplés par un terme de "flottabilité" qui apparaît dans l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \alpha g (T - T_0) \quad (6)$$

Le panache thermique a une géométrie particulière, où la composante verticale de vitesse  $u$  est beaucoup plus grande que la composante horizontale  $v$  et où l'échelle de longueur horizontale  $\delta$  est beaucoup plus petite que l'échelle de longueur verticale  $H$ . L'équation de Navier Stokes, en régime stationnaire, devient donc pour la composante verticale  $u$  :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha g (T - T_0) \quad (7)$$

et pour la composante horizontale  $v$  :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (8)$$

et l'équation de la chaleur se réduit à :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (9)$$

Si la variation de température est petite, par conséquent la variation de masse volumique est également petite, on peut considérer que le fluide reste incompressible, le terme de variation de masse volumique n'apparaissant que dans le terme de flottabilité, moteur de l'écoulement (approximation de Boussinesq). Le champ de vitesse obéit alors à l'équation d'incompressibilité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

Si nous définissons des grandeurs caractéristiques  $U, V, P, \Theta, X, \delta$ , pour les composantes de vitesse, la pression, l'écart de température et la largeur du panache, la condition d'incompressibilité donne :  $U/X \sim V/\delta$  ce qui implique que les termes non linéaires  $u \partial v / \partial x$  et  $v \partial v / \partial y$  sont du même ordre de grandeur. L'équation pour la composante  $v$  devient en ordre de grandeur :

$$\frac{UV}{X} \sim \frac{P}{\rho \delta} \sim \nu \frac{V}{\delta^2} \quad (11)$$

d'où l'ordre de grandeur de la pression :  $P \sim \rho U^2 (\delta/X)^2$ .

Dans l'eau le nombre de Prandtl  $Pr = \nu/\kappa$  est grand devant 1 et on peut supposer que la largeur du panache est fixée par la diffusion de la quantité de mouvement plutôt que par

la diffusion de la chaleur. On peut alors écrire, comme lorsque l'on cherche l'épaisseur d'une couche limite classique :

$$\frac{U\delta^2}{\nu X} \sim 1 \quad (12)$$

soit :

$$\frac{U\delta}{\nu} \sim \frac{X}{\delta} \quad \text{et} \quad \frac{V\delta}{\nu} \sim 1 \quad (13)$$

Si on fait le même type d'analyse dimensionnelle pour l'équation sur la composante verticale de vitesse, on obtient les ordres de grandeur suivants pour les différents termes :

$$\frac{U^2}{X} \quad \frac{U^2}{X} \left( \frac{\delta}{X} \right)^2 \quad \nu \frac{U}{\delta^2} \quad \alpha g \Theta \quad (14)$$

Le terme de flottabilité  $\alpha g \Theta$  est donc du même ordre de grandeur que  $U^2/X$ .

Pour compléter l'analyse dimensionnelle, il faut encore examiner l'équation de transport de la chaleur et prendre en compte le bilan global d'échange de chaleur (la chaleur injectée au niveau de la source chaude est intégralement transportée par la panache thermique). Le nombre de Prandtl étant grand devant 1, la diffusion de la chaleur est moins rapide que la diffusion de la quantité de mouvement et il faut considérer une largeur  $\delta_T$  de la distribution de température différente de  $\delta$ . Dimensionnellement, l'équation de transport de la chaleur s'écrit donc :

$$\frac{U\Theta}{X} \sim \kappa \frac{\Theta}{\delta_T^2} \quad (15)$$

Enfin le bilan d'énergie sur le panache s'écrit :  $\rho C_p \int_{-\infty}^{\infty} u(T - T_0) dx = Q$  où  $Q$  est la quantité de chaleur injectée par unité de temps et par unité de longueur dans la 3<sup>è</sup> direction ( $z$ ). Soit, en ordre de grandeur :  $U\Theta\delta_T \sim Q/\rho C_p$ .

En combinant les différents ordres de grandeur obtenus, on peut écrire des lois d'échelle pour la vitesse verticale dans la panache, la largeur de celui-ci et l'élévation de température en fonction de la position verticale  $X$  :

$$U \sim \left( \frac{Q}{\rho C_p} \alpha g \right)^{2/5} \kappa^{-1/5} X^{1/5} \quad (16)$$

$$\delta \sim \left( \frac{Q}{\rho C_p} \alpha g \right)^{-1/5} \nu^{1/2} \kappa^{1/10} X^{2/5} \quad \text{et} \quad \delta_T \sim \left( \frac{Q}{\rho C_p} \alpha g \right)^{-1/5} \kappa^{3/5} X^{2/5} \quad (17)$$

$$\Theta \sim \left( \frac{Q}{\rho C_p} \right)^{4/5} (\alpha g)^{-1/5} \kappa^{-2/5} X^{-3/5} \quad (18)$$

## 2 Particle Image Velocimetry (PIV)

D'une manière générale, la technique de PIV consiste à suivre le mouvement de traceurs dispersés dans le fluide, selon une vision *lagrangienne* de l'écoulement. Plusieurs conditions sont requises pour réaliser avec succès ce type de mesure:

- les particules doivent suivre fidèlement le mouvement du fluide ; on choisira donc de petites particules (pour limiter leur inertie) d'une densité voisine de celle du liquide (pour éviter leur sédimentation).
- la présence de traceurs ne doit pas altérer l'écoulement du fluide ; les traceurs seront utilisés à faible concentration.
- les traceurs doivent être détectables ; on choisira des particules d'un indice optique contrasté par rapport à celui du fluide.

Les traceurs choisis pour cette expérience sont des particules de nylon d'une taille inférieure à  $100\mu m$ . Légèrement plus denses que l'eau, elles ont tendance à sédimenter lentement. Il faudra donc les remettre en suspension de temps en temps en agitant le liquide.

### 2.1 Technique de PIV

Le mouvement des traceurs est enregistré grâce à une caméra digitale. On cherche alors à mesurer le déplacement en comparant deux images successives. La détermination du champ de déplacement (et donc de vitesse) s'effectue en calculant la corrélation entre deux portions d'images successives. On effectuera ce traitement dans Matlab grâce au module PIVLAB . Le principe est le suivant: deux images successives sont découpées en portions identiques et la fonction de corrélation entre deux portions successives est déterminée. Le décalage du pic de corrélation par rapport au centre indique le déplacement des particules (Fig. 2).

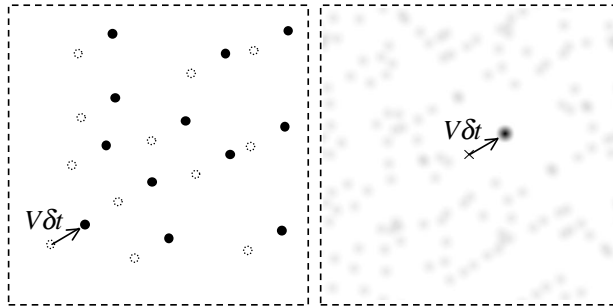


Figure 2: Principe de la mesure. (a) mouvement des traceurs entre deux images, (b) corrélation entre deux images successives

#### 2.1.1 Acquisition des images

Pour acquérir la séquence d'images on utilise la caméra pilotée par le logiciel *eBus Player for JAI*. Il faut d'abord sélectionner la caméra (GO-500M-USB) en cliquant sur le bouton *Select/Connect*, puis sur le nom de la caméra dans la liste puis sur *OK*. Ensuite, il faut charger la configuration de la caméra *configPIV.pvcfg* qui se trouve dans le dossier *TP2A* en cliquant sur *File* puis *Open....* La fréquence d'acquisition est de 40 Hz et le nombre d'images qui seront sauvegardées est fixé à 20.

Sélectionnez le mode d'acquisition *Continuous* et cliquez sur *Play* pour visualiser en direct le panache. Faire la mise au point sur les particules éclairées. Pour enregistrer les images, il faut arrêter l'acquisition, aller dans la fenêtre *Tools* et cliquer sur *Save images or Video* puis cocher *Enable Image or Video Saving*, définir le chemin où seront localiser les images, privilégiez le format *TIFF*, cochez *Save one image out of every 1 captured images*. Cliquez enfin sur *OK*, un bandeau rouge apparaît alors en bas de la fenêtre d'acquisition. Il faut ensuite changer le mode d'acquisition en sélectionnant *MultiFrame*. Appuyez sur *Play* pour enregistrer une série de 20 images. Pour repasse en mode *Live* il faut décocher *Enable Image or Video Saving* dans le menu *Tools*.

### 2.1.2 Analyses des images

Les images sont analysées à l'aide d'un programme Matlab (PIVlab\_GUI) dont le mode opératoire est fourni dans un document que vous trouverez sur la table du TP. Il faut sauvegarder les données dans un fichier texte (File/Save/ASCII File (x,y,u,v,vort)) qu'on relira ensuite avec un second programme (panache2022.m) permettant d'analyser le champ de vitesse du panache.

## 3 Mesure de température

Un thermocouple est placé dans la cuve. On peut le déplacer verticalement et horizontalement pour estimer les profils de température à travers le panache. Cette mesure étant assez intrusive, il faut placer le thermocouple sur le côté de la cuve lorsqu'on effectue les mesures de vitesse par PIV.

## 4 Ce qu'il faut faire

*A partir du champ de vitesse obtenu par PIV, mesurez l'évolution de  $\delta$  et  $U$  en fonction de la position verticale pour plusieurs puissances. Pour chaque condition de puissance, comparez les évolutions de la vitesse caractéristique et de la largeur du panache en fonction de  $X$  avec celles prédites respectivement par les équations 16 et 17 à l'aide du programme panache2022.m. Tracez ensuite l'évolution des préfacteurs des lois d'échelle en  $X$  en fonction de la puissance. Comment interprétez-vous ces évolutions ?*

*A l'aide du thermocouple, réalisez un profil de température le long de la direction horizontale à différentes distances comprises entre 10 mm et 40 mm de la source de chaleur pour la puissance maximale. Comparez ce profil à celui de la vitesse et commentez.*

## 5 Simulation numérique

En complément de l'expérience, on se propose de faire des simulations numériques d'un problème idéalisé. Les écoulements thermoconvectifs sont décrits par deux équations couplées : l'équation de Navier-Stokes, où apparait un terme moteur lié à la variation spatiale de masse volumique du fluide et l'équation de transport de la chaleur :

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \\ \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \lambda \Delta T\end{aligned}\tag{19}$$

où la masse volumique  $\rho$ , la viscosité  $\eta$ , la conductivité thermique  $\lambda$  sont en général fonction de la température. L'équation de conservation de la masse ne conduit plus à  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  puisque la densité n'est plus uniforme.

Ce système d'équations peut être simplifié en utilisant *l'approximation de Boussinesq*<sup>1</sup>. Si la variation de température est assez petite, les variations de masse volumique et des coefficients de transport peuvent être négligés. Le seul terme du bilan de quantité de mouvement qui tient compte de la température est le terme de flottabilité  $\rho g$  qui est à l'origine de l'écoulement. Nous définissons une température de référence  $T_0$  à la quelle la masse volumique est  $\rho_0$ . La variation local de masse volumique est donnée par le coefficient d'expansion thermique du fluide :

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$$

La masse volumique locale est :  $\rho = \rho_0 - \alpha \rho_0 (T - T_0)$  et l'équation pour la quantité de mouvement est :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)] \mathbf{g}\tag{20}$$

En l'absence d'écoulement, le fluide serait en équilibre hydrostatique avec  $\nabla p_H = \rho_0 \mathbf{g}$ , aussi nous introduisons une pression modifiée qui est l'écart à la pression hydrostatique  $p' = p - p_H$ , et nous avons :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p' + \eta \Delta \mathbf{u} - \rho_0 \alpha (T - T_0) \mathbf{g}\tag{21}$$

En divisant par la masse volumique de référence,  $\rho_0$ , et en utilisant l'écart à la température de référence  $T' = T - T_0$ , nous avons le nouveau système d'équation couplées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{u} - \alpha T' \mathbf{g} \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T' &= \kappa \Delta T'.\end{aligned}\tag{22}$$

où  $\kappa = \lambda / \rho C_p$  est la diffusivité thermique du fluide.

---

<sup>1</sup>Joseph Boussinesq (1842-1929) scientifique français qui fit des contributions majeures en hydraulique et fut le premier à introduire la notion de viscosité turbulente

### 5.1 Paramètres sans dimension

Lorsque l'on développe des codes de simulation numérique, plutôt que d'utiliser les unités du système international (kg, m, s, K), on utilise des unités pertinentes de l'écoulement que l'on souhaite étudier. Dans le cas présent, on peut définir comme échelle de longueur  $L = 2R$ , comme échelle de vitesse, bien que ce ne soit pas la seule possible,  $\nu/L$ , comme échelle de densité  $\rho_0$  et comme échelle de température  $1/\alpha$ . Les variables sans dimension sont alors définies de la manière suivante :

$$u^* = \frac{\mathbf{u}}{\nu/L}, \quad t^* = \frac{t}{L^2/\nu}, \quad \nabla^* = L\nabla, \quad p^* = \frac{p'}{\rho_0\nu^2/L^2}, \quad T^* = \alpha T'. \quad (23)$$

Les équations en variables adimensionnées s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2}{L^3} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* \right) &= -\frac{\nu^2}{L^3} \nabla^* p^* + \frac{\nu^2}{L^3} \Delta^* \mathbf{u}^* + gT^* \mathbf{e}_y \\ \frac{\nu}{\alpha L^2} \left( \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* T^* \right) &= \frac{\kappa}{\alpha L^2} \Delta^* T^*, \end{aligned} \quad (24)$$

où  $\mathbf{e}_y$  est le vecteur unitaire dirigé vers le haut. Après simplification et en supprimant le symbole  $*$ , on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \Delta \mathbf{u} + \frac{gL^3}{\nu^2} T \mathbf{e}_y \quad (25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{\kappa}{\nu} \Delta T \quad (26)$$

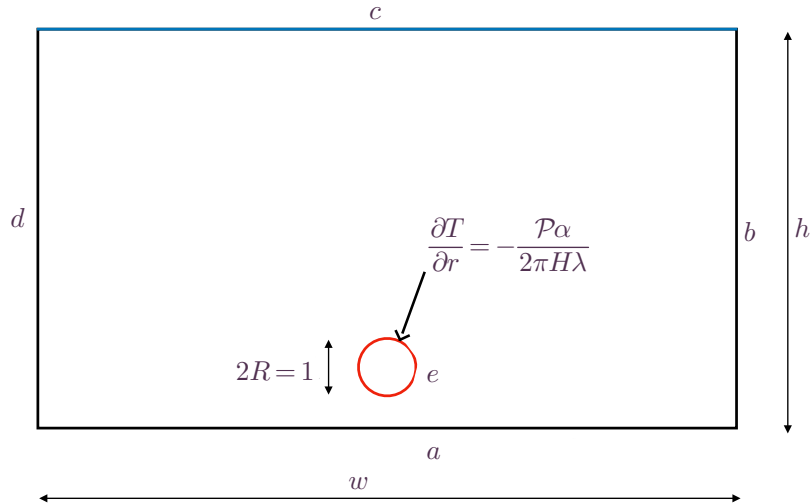


Figure 3: Schéma du domaine de calcul, avec identification des différentes frontières (a-e).

L'origine des coordonnées (0,0) est le point en bas à gauche du domaine de calcul.



On constate que seuls deux nombres sans dimension apparaissent dans ces équations, le nombre de Grashof et le nombre de Prandtl :

$$Gr = \frac{gL^3}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}.$$

Il reste à déterminer les conditions aux limites. La température étant définie comme l'écart à  $T_0$ , elle vaut 0 sur les parois verticales et horizontales du domaine de calcul (Fig. 3). La température du point chaud est une inconnue du problème, dépendant du temps et du flux de chaleur imposé. En supposant la température uniforme dans le cylindre, le flux de chaleur intégré sur la surface du cylindre, c'est-à-dire la puissance injectée, s'écrit :

$$\mathcal{P} = -2\pi RH\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad (27)$$

où  $H$  est la longueur du cylindre. On obtient alors, sous forme adimensionnée :

$$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{P}\alpha}{\pi H\lambda} = - \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=1/2} \quad (28)$$

La valeur de ce nombre sans dimension permet d'imposer le gradient de température à la surface du cylindre comme condition à la limite pour l'équation de la chaleur. Les valeurs de l'expérience étant :  $\mathcal{P} \in [10^{-3}, 0.03] W$ ,  $H = 0.03 m$ ,  $\lambda = 0.6 W m^{-1} K^{-1}$ ,  $\alpha = 2.5 \times 10^{-4} K^{-1}$ , on obtient :

$$\mathcal{F} \in [4.4 \times 10^{-6}, 1.3 \times 10^{-4}]$$

En outre, les nombres de Grashof et Prandtl valent :

$$Gr \simeq 2118960, \quad Pr = 7.$$

Par ailleurs, si l'on est amené, au cours de la simulation, à vouloir déterminer la valeur d'un nombre de Reynolds pour une vitesse (numérique)  $\tilde{U}$ , sur une longueur  $\tilde{D}$ , la viscosité numérique  $\tilde{\nu}$  valant 1 (Cf. équation 25), on a bien :

$$Re = \frac{\tilde{U}\tilde{D}}{\tilde{\nu}} = \frac{U}{\nu/L} \frac{D}{L} = \frac{UD}{\nu}$$

## 6 Expérience numérique

On simule ici un problème bidimensionnel, c'est à dire qu'on suppose qu'il n'y a que deux composantes non nulles du champ de vitesse et que le problème est invariant dans la troisième dimension de l'espace. Le schéma du domaine de calcul est représenté sur la fig. 3. Le diamètre du point chaud est pris égal à 1. On peut faire varier la largeur et la hauteur de la cuve dans laquelle se produit la convection. Les conditions aux limites sont les suivantes : la vitesse du fluide est nulle sur toutes les parois solides. La température sur parois du domaine sont égales à 0 et le flux de chaleur sur le cylindre est donné par l'équation (28).

Le logiciel utilisé pour le calcul est FreeFem++, un logiciel du domaine public développé au laboratoire d'analyse numérique de Sorbonne Université. Les sources ainsi que les exécutables pour Unix, Windows et MacOSX sont disponibles gratuitement. FreeFem++ permet de résoudre des systèmes d'équations différentielles par la méthode des éléments finis en utilisant une formulation variationnelle. Il permet également de générer automatiquement des maillages triangulés du domaine de calcul.

## 6.1 Paramètres de la simulation

Il faut commencer par déterminer les paramètres sans dimension pertinents pour l'expérience réalisée en PIV. Le point chaud a un diamètre de 6 mm, la puissance injectée est comprise entre  $10^{-3}$  et 0.03 W. Les vitesses de convection mesurées sont de quelques mm/s. Pour l'eau le coefficient de dilatation thermique est  $\alpha = 2.5 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ , la viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , le nombre de Prandtl est égal à 7.

## 6.2 Études à réaliser

On se propose ici d'étudier quelques aspects de l'instabilité thermo-convective :

*Comment la géométrie d'un panache thermique évolue-t-elle avec le flux de chaleur?*

*Comment la géométrie d'un panache thermique rectiligne évolue-t-elle avec la distance à la source chaude ?*

*Comment la stabilité du panache est-elle affectée par la proximité des parois de la cuve ?*

## 7 Mode d'emploi détaillé

Le calcul est entièrement défini dans un fichier texte "simul\_panache.edp" détaillé ci-dessous. Ce fichier peut être modifié avec n'importe quel éditeur de texte. Sous MacOS, les éditeurs mi et Smultron présentent l'avantage de colorer le texte en fonction de la syntaxe du programme et d'être interfacés directement avec FreeFem.

Pour démarrer le calcul, il faut ouvrir une fenêtre terminal, se placer dans le répertoire où se trouve le fichier simul\_panache.edp et exécuter la commande "FreeFem++ simul\_panache.edp".

Lorsque la commande `plot` est utilisée, FreeFem ouvre une autre fenêtre pour afficher le maillage, les champs de pression, de vitesse, ...

### 7.1 Initialisation du calcul

- Exécuter le programme simul\_panache.edp
- Entrer la largeur de la cuve (20 dans l'expérience)
- Entrer la largeur de la cuve (10 dans l'expérience)
- Entrer la résolution du maillage ( $n = n$  points de maillage par unité de longueur sur les frontières hors point chaud)
- Raffinement automatique du maillage ? Si oui, le maillage est raffiné automatiquement à chaque pas de calcul (plus précis mais plus lent)
- Entrer le nombre de Prandtl du fluide
- Entrer la valeur du flux de chaleur
- Entrer la durée du pas de temps (en temps adimensionnel, prendre une valeur inférieure à 1)
- Entrer le nombre d'itérations du calcul à effectuer (typiquement quelques centaines à quelques milliers)

## 7.2 Exécution du calcul

Une fois que le calcul est lancé, le programme affiche dans une fenêtre graphique l'évolution temporelle du champ de température tous les dix pas de temps.

En fin de calcul, il faut appuyer sur la touche escape pour arrêter le programme.

### 7.2.1 Sortie des données

Pendant le calcul, une série de fichiers est écrit dans le répertoire où se trouve le fichier simul.panache.edp :

Un fichier `parametres_Prxx_Fluxyy.txt` où xx est la valeur du nombre de Prandtl et yy la valeur du nombre de Rayleigh. Ce fichier contient les paramètres de calcul.

Tous les 10 pas de temps, fichiers vtk pour post-traitement dans Paraview.

- champs de température. Fichiers `temp_Fluxxx_Pryy_tnnn.vtk` où xx est la valeur du nombre de Rayleigh, yy, la valeur du nombre de Prandtl et nnn est le numéro d'itération
- champs de vitesse. Fichiers `vit_Fluxxx_Pryy_tnnn.vtk`
- champs de flux de chaleur. Fichiers `flux_Fluxxx_Pryy_tnnn.vtk`. Le flux de chaleur est calculé par :  $\mathbf{j} = \mathbf{u}T - \nabla T$  en tenant compte des variables adimensionnelles.

Un fichier `flux_Fluxxx_Pryy.txt` qui contient l'évolution au cours du temps du flux de chaleur intégré sur la surface du point chaud.

## 7.3 Post traitement

Les fichiers .vtk peuvent être lus dans le logiciel Paraview.

## 8 Programme utilisé pour le calcul

```
// panache thermique
//adapte du programme boussinesq.edp de Olivier Pironneau
load "iovtk" ;

string yes;
// definition de la geometrie.
// Le diametre du cylindre chaud est pris comme unite de longueur
real he=1, wi=1;

cout << " Entrer la largeur de la cuve (rapport largeur/diametre du cylindre) :"; cin >> wi;
cout << " Entrer la hauteur de la cuve (rapport hauteur/diametre du cylindre) :"; cin >> he;
// definition des limites du domaine de calcul
border a(t=0,wi) {x=t;y=0;}; // fond
border b(t=0,he) {x=wi;y=t;}; // cote droit
border c(t=0,wi) {x=wi-t;y=he;}; // haut
border d(t=0,he) {x=0;y=he-t;}; // cote gauche
// cylindre (parcouru dans le sens trigo inverse)
// le centre du cylindre est a 1,5 diametre au-dessus du fond
```

```

border e(t=2*pi,0) {x=0.5*wi+0.5*cos(t);y=1.5+0.5*sin(t);label=5;};

int nm=1;
cout << " Entrer la resolution du maillage (>=1) :"; cin >> nm;
int nm1,nm2,nm3;
nm1=floor(wi*nm);
nm2=floor(he*nm);
mesh Th=buildmesh(a(nm1)+b(nm2)+c(nm1)+d(nm2)+e(12*nm));
plot(Th,wait=1);
// raffinement automatique du maillage ou pas ?
bool refinemesh=false;
cout << " Raffinement automatique du maillage pendant le calcul ? (o,n)"; cin >> yes;
if (yes == "o") refinemesh=true;
// espaces d'elements finis sur le maillage Th :
// P2 pour la vitesse,
// P1 pour la pression et la temperature
fespace Vh(Th,P2), Qh(Th,P1);
Vh u=0,v=0,uu,vv,up,vp; // champ de vitesse
Vh jx,jy ; // flux de chaleur
Qh p=0,pp; // champ de pression
Qh r=0,rr,rp; // champ de temperature
Qh gtx,gty; // gradient de temperature
real fc; // flux de chaleur sur le point chaud
int n=0;
// definition des parametres physiques
real Pr ;
cout << " Entrer le nombre de Prandtl (7 pour l'eau):"; cin >> Pr;
real F;
cout << " Entrer le flux de chaleur adimensionne:"; cin >> F;
//real Re ;
//cout << " Entrer le nombre de Reynolds :"; cin >> Re;
//real Pe=Re*Pr;
//cout << " Nombre de Peclet :" << Pe << "\n";
//real rayleigh ;
//cout << " Entrer le nombre de Rayleigh :"; cin >> rayleigh;

//real g=rayleigh/Pr; // nombre de Grashof
real GR;
GR = 2118960;
cout << " nombre de Grashof :" << GR << "\n";
// gravite inverse ?
//cout << " Inversion de la gravite ? (o,n)"; cin >> yes;
//if (yes == "o") g=-g;
real dt;
cout << " Entrer la duree du pas de temps :"; cin >> dt;
//dt = 0.1;

```

```

int nit ;
cout << " Entrer le nombre d iterations :"; cin >> nit;
//nit = 1000;

// definition des valeurs pour la visualisation de la temperature
real[int] tempval(51);
real vmax=1;
int i,j;
for (i=0;i<51;i++){
tempval[i]=vmax*0.02*i;
}
// definition des couleurs pour l'affichage du champ de temperature
real[int] colors(150);
for (i=0;i<50;i++){
colors[3*i]=0.75-0.02*i ;
colors[3*i+1]= 1;
colors[3*i+2]= 1 ;
}

// definition des tableaux pour les profils de vitesse et de temperature
real[int] pos(100),profvitv(100),proftempv(100),profvith(100),proftemph(100);
for(i=0;i<100;i++){
pos[i]=0.01*i;
}

// definition des fichiers pour la sortie des profils

string profhvfile="profilhv_Flux"+F+".txt" ;
ofstream profhv(profhvfile,append);

string profhtfile="profilht_Flux"+F+".txt" ;
ofstream profht(profhtfile,append);

// fichier pour l'evolution du flux de chaleur sur le point chaud
string fluxfile="flux_Flux"+F+"_Pr"+Pr+".txt";
ofstream flux(fluxfile,append);

// fichiers de sortie des donnees au format vtk pour affichage avec Paraview
string vtkfile,temptkfile,fluxvtk;

//real T=0.5, nudt=dt/Re, peclet=Pr*Re, pedt=dt/peclet;
real prdt=dt/Pr;

// sauvegarde des parametres de calcul dans un fichier
string paramfile="parametres_Pr"+Pr+"_flux"+F+".txt" ;
ofstream param(paramfile,append);
param << "largeur " << ":" << wi << "\n";

```

```

param << "hauteur " << ":" << he << "\n";
param << "prandtl " << ":" << Pr << "\n";
param << "Flux" << ":" << F << "\n";
//param << "rayleigh" << "," << rayleigh << "\n";
param << "pas de temps " << ":" << dt << ", nb iterations" << ":" << nit << "\n";

// iteration en temps
for (n=0;n<nit;n+=1){
up=u;vp=v; rp=r;
solve NS([u,v,p],[uu,vv,pp],solver=Croust,init=n) =
int2d(Th) (u*uu+v*vv
+ dt*(dx(u)*dx(uu)+dy(u)*dy(uu)
+ dx(v)*dx(vv)+dy(v)*dy(vv))
+ p*pp*1.e-6
- dt*(p*(dx(uu)+dy(vv))+pp*(dx(u)+dy(v))))
- int2d(Th)(convect([up,vp],-dt,up)*uu
+ convect([up,vp],-dt,vp)*vv
+ r*GR*vv)
+ on(a,b,c,d,e,u=0,v=0); // conditions aux limites : vitesse nulle sur les parois solides
solve thermal(r,rr,solver=Croust,init=n)=
int2d(Th) (r*rr+prdt*(dx(r)*dx(rr)+dy(r)*dy(rr)))
- int2d(Th)(convect([up,vp],-dt,rp)*rr)
+ int1d(Th,5) (- F * rr)
+ on(c,r=0);

//+ on(c,r=0) + on(e,r=1); // conditions aux limites pour la temperature : r=1 point chaud, r

// profils horizontaux
for(i=0;i<100;i++){
y=0.5*he;
x=wi*(0.5+0.01*(i-50));
profvith[i]=v;
proftemph[i]=r;
}
if ( !(n % 1) && (n>0)) {

vtkfile="vit_Flux"+F+"_Pr"+Pr+"_t"+n+".vtk";
savevtk(vtkfile,Th,[u,v],dataname="vitesse");
//plot(r,fill=true,hsv=colors,cmm="t="+n,ps="temp_re_"+Re+"t="+n+".eps");
plot(r,fill=true,hsv=colors,cmm="t="+n);
temptkfile="temp_Flux"+F+"_Pr"+Pr+"_t"+n+".vtk";
savevtk(temptkfile,Th,r,dataname="temperature");
//plot(r,fill=true,hsv=colors,cmm="t="+n);
// calcul du flux de chaleur
gtx=dx(r);
gty=dy(r);
jx=u*r-gtx;

```

```

jy=v*r-gty;
fluxvtk="flux_Flux"+F+"_Pr"+Pr+"_t"+n+".vtk";
savevtk(fluxvtk,Th,[jx,jy],dataname="flux");
// calcul du flux de chaleur a la surface du point chaud
fc=-int1d(Th,5) (gtx*N.x+gty*N.y);
flux << fc << "\n";
for (j=0;j<100;j++){
profhv << profvith[j] << ",";
}
profhv << "\n" ;
for (j=0;j<100;j++){
profht << proftemph[j] << ",";
}
profht << "\n" ;
}
if (refinemesh) {
// adaptation du maillage et interpolation des fonctions sur le nouveau maillage
Th=adaptmesh(Th,r,hmin=0.05); // taille minimale des mailles = 0.05
u=u;
v=v;
p=p;
r=r;
}
}

```

## 9 Formulation variationnelle

Pour décrire ce qu'est la formulation variationnelle d'une équation différentielle [?], considérons le problème d'une poutre flexible, posée à ses extrémités (mais libre en rotation), de longueur unité soumise à une charge répartie  $f$ . Le moment fléchissant local  $u(x)$  est décrit par l'équation différentielle de Poisson qui s'écrit, une fois adimensionnée :

$$-u''(x) = f(x) \quad (29)$$

avec les conditions aux limites  $u(0) = u(1) = 0$ . En multipliant cette équation par une fonction continue et différentiable  $v(x)$ , on obtient :

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x) \quad (30)$$

En intégrant par parties le membre de gauche, on a :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - [u'v]_0^1 = \int_0^1 f(x)v(x) \quad (31)$$

Si  $v$  est choisi telle que  $v(0) = v(1) = 0$  :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x) \quad (32)$$

Le problème variationnel consiste à trouver la fonction  $u$  qui satisfait l'équation 32 quelle que soit la fonction  $v$ .

La méthode des éléments finis consiste à trouver une solution sous la forme :  $u(x) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x)$  où les fonctions  $\phi_i$  sont  $N$  fonctions linéairement indépendantes et  $u_i$  sont  $N$  nombres réels à déterminer. En prenant  $v = \phi_j$ , le problème 32 se ramène à trouver les nombres  $u_i$  tels que :

$$\sum_{i=1}^N u_i \left( \int_0^1 \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx \right) = \int_0^1 f(x) \phi_j'(x) dx \quad (33)$$

pour tout  $j$  compris entre 1 et  $N$ . On définit la matrice de rigidité  $N \times N$   $A$  telle que  $A_{ji} = \int_0^1 \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx$ . Si  $\mathbf{u}$  est le vecteur de composantes  $u_i$  et  $\mathbf{f}$  le vecteur de composantes  $f_j = \int_0^1 f(x) \phi_j'(x) dx$ , le problème se ramène à résoudre le système linéaire :

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (34)$$

et donc à inverser la matrice  $A$ .

Dans la méthodes des éléments finis de degré 1, on divise l'intervalle  $[0, 1]$  en  $N + 1$  parties de largeur  $h = 1/(N + 1)$  et commençant respectivement en  $x_i = ih$ . On définit les fonctions  $\phi_i(x)$  "triangulaires" telles que :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & \text{si } x_{i-1} < x < x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{h} & \text{si } x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1} \end{cases} \quad (35)$$

Ceci revient à faire une approximation de la solution par un ensemble de  $N$  fonctions affines par morceaux.

De la même manière, on peut définir des éléments de degré 2 où les fonctions  $\phi_i$  sont des fonctions quadratiques de  $x$ , la solution approchée étant une succession d'arcs de parabole. Ces résultats à une dimension peuvent être étendus aux cas bidimensionnel et tridimensionnel.