

TP Vibration

Dans ce TP on va caractériser les vibrations (flexion dynamique) d'objets élancés.

1. Modes propres de vibration d'un régllet métallique et d'un cylindre

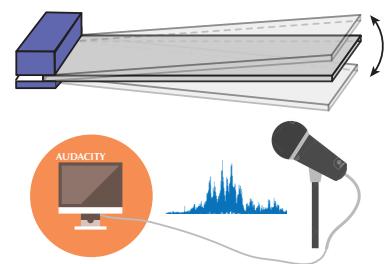


La vibration d'une anche fine est à l'origine du son de nombreux instruments à vent tels que la clarinette ou l'orgue. Dans le cas d'une boîte à musique, c'est la vibration des poutres encastrée à une extrémité. La géométrie a un impact sur la fréquence du son émis, que nous étudierons dans cette partie.

1.1. Schéma de la configuration expérimentale I - régllet

Un régllet métallique encastré entre les deux parties du mors constitue un prototype très simple pour étudier les fréquences de résonance des modes propres d'une poutre élancée ($h \ll L$) en fonction de la longueur L . Il suffit pour cela de faire avancer progressivement le régllet entre les mors pour changer L .

Le régllet est simplement encastré sur une base stable de grande masse (simplement en plaçant le régllet entre deux parties plates de la base et en resserrant les vis). On mettra le régllet en vibration en appuyant fortement avec un doigt et en relâchant brusquement. Vous êtes libres d'améliorer la technique de stimulation pour produire un meilleur son de vibration ! Ceci parce que la mesure de l'oscillation du régllet se fera justement par enregistrement à l'aide d'un microphone des ondes sonores produites dans l'air par la vibration du régllet.



Le signal sonore sera enregistré à l'aide de la carte son de l'ordinateur et d'un logiciel d'enregistrement et d'analyse des signaux **Audacity**. Utilisez le bouton rouge pour enregistrer le son. Nous vous suggérons de faire plusieurs enregistrements en séquence. Après avoir arrêté l'enregistrement, vous pouvez sélectionner avec un curseur la partie de l'enregistrement que vous voulez analyser. Utilisez l'option **Analyze/Plot Spectrum** pour obtenir une analyse Fourier de l'enregistrement.

La forme aplatie du régllet et la nature peu dissipative du métal permettent à la fois des oscillations durables de forte amplitude et la production efficace d'ondes sonores (même si peu audibles, les intenses variations de pression sont bien enregistrées par un microphone ordinaire).

- Avant de commencer la manipulation, estimer le module d'Young du métal en question à l'aide d'une mesure de flexion statique.
- Après avoir optimisé les conditions de stimulation et d'enregistrement sur une longueur de régllet

d'environ 10 cm, procéder à un enregistrement systématique pour une dizaine de longueurs différentes. En utilisant les outils d'analyse de Fourier inclus dans le logiciel fourni, identifier dans les spectres de puissance les fréquences des premiers modes propres du réglet.

- Vérifier l'accord avec la théorie : êtes-vous en mesure d'identifier tous les pics observés ?
- Déterminer pour chaque longueur autant de fréquences propres que possible et vérifier si leur dépendance de la longueur de la poutre est en accord avec le loi théorique (voir annexe théorique):

$$f_0 \simeq 0.161 \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{h}{L^2}}.$$

1.2. Schéma de la configuration expérimentale II - cylindre vide



Nous allons maintenant nous intéresser à une géométrie différente, celle d'un cylindre en cuivre. La vibration d'un cylindre vide est équivalente au premier mode de résonance d'une onde de flexion avec une longueur d'onde équivalente à la longueur linéaire de la circonférence $\lambda = 2\pi R$, et donc :

$$\omega_0 \sim \frac{c_f}{\lambda} \sim \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{h}{R^2}},$$

où nous avons utilisé $c_f = \sqrt{E/\rho}(h/\lambda)$ pour la vitesse de propagation des ondes de flexion de longueur d'onde λ , E le module d'Young, ρ la densité du matériau, h la largeur, R le rayon du cylindre, $E = 110Gpa$ et $\rho = 8830kg/m^3$ (voir annexe théorique).

- Vous devez tester cette relation de proportionnalité en frappant le cylindre pour mesurer la fréquence de vibration.
- Répétez l'exercice pour des cylindres avec géométries différentes.

La mesure de l'oscillation du cylindre se fera par enregistrement - à l'aide d'un microphone (comme pour le règlet) - des ondes sonores produites dans l'air par la vibration du cylindre.

2. Verres chantants

Avez-vous déjà essayé de faire chanter vos verres à vin en frottant délicatement le bord du verre de vos doigts ? Et avez été capable de produire des sons différents selon que votre verre soit plus ou moins rempli ?

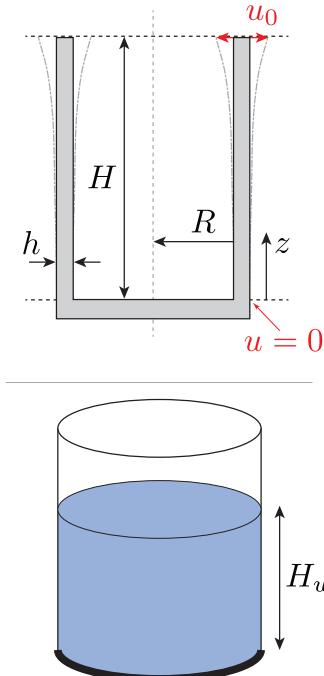
Bien que ce phénomène soit utilisé depuis des siècles, le premier papier qui en discute la physique n'a été publié qu'en 1982 (A. P. French, (1982) *In Vino Veritas: A study of winglass acoustics*, Am. J. Phys 51(8)). Dans ce TP, vous tenterez de comprendre comment la fréquence de vibration du verre dépend de son taux de remplissage.



Verrillon par percussion, (illustration par Franchino Gafori dans *Theorica musicae*, Milan (1492)) et par frottement (source Du merveilleux caché dans le quotidien).

2.1. La vibration d'un verre

Nous considérerons d'abord un verre vide, les paramètres sont spécifiés dans l'illustration (voir l'annexe théorique pour la dérivation de la loi d'échelle).



où ρ_v et ρ_w sont les densités du verre et de l'eau respectivement.

La fréquence de résonance ω_0 du verre vide est:

$$\omega_0 \sim \sqrt{\frac{E_v}{\rho_v} \frac{h}{R^2}}.$$

- Vous devez tester cette relation de proportionnalité après percussion du verre vide pour mesurer la fréquence de vibration (comme avant, utilisez Audacity).
- Répétez l'exercice pour les trois verres cylindriques.

Si le verre est rempli d'eau, l'énergie cinétique doit être corrigée et l'expression de la fréquence devient (voir l'annexe théorique):

$$\omega_0 \sim \sqrt{\frac{E_v H \frac{h^3}{R^3}}{\rho_v R H h + \rho_w R^2 H_w^3 / H^2}},$$

- Mesurer la fréquence du son émis par le verre après percussion ou par friction en fonction de son remplissage et du liquide utilisé. Répétez l'exercice pour les trois verres.
- Essayez aussi de mesurer le temps d'atténuation du son après une percussion.
- Remplacer l'eau par de la glycérine et des granulés (deux tailles de billes). Comment cela change-t-il vos résultats ?

Annexe théorique

Déformée d'une poutre encastrée, chargée à son extrémité

Dans une section d'abscisse x , le moment fléchissant résultant de la force F est:

$$\mathcal{M}(x) = -F(L - x)$$

Ce moment est aussi donné par la loi de Hooke $\mathcal{M} = EI/R \simeq EI d^2y/dx^2$ (dans la limite des faibles pentes), avec $I = bh^3/12$ pour une poutre de section rectangulaire.

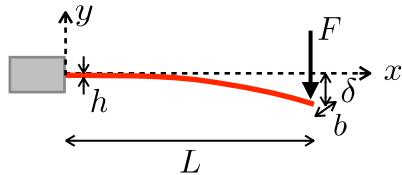


Figure 1. Flexion d'une poutre encastrée, chargée à son extrémité.

Reste à résoudre l'équation différentielle:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -F(L - x)$$

avec comme conditions au limites, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ (pente nulle à l'origine). On obtient ainsi:

$$y(x) = -\frac{\delta}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \left(3 - \frac{x}{L} \right) \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{FL^3}{3EI} = 4 \frac{FL^3}{Eh^3b}$$

Modes propres de vibration de flexion d'une poutre

Comment trouver l'équation de propagation d'une onde flexion le long d'une poutre ? C'est un peu calculatoire, mais pas de panique, il s'agit juste d'un bilan des forces et des moments autour d'une tranche dx de la poutre (Fig. 2).

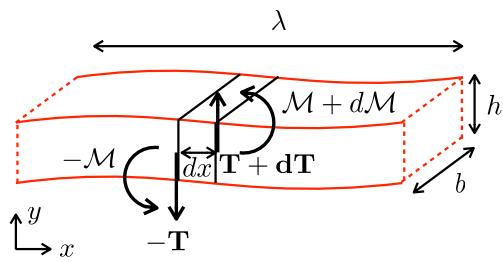


Figure 2. Bilan des forces et des moments autour d'une tranche dx de la poutre vibrante.

L'équilibre des forces se traduit par:

$$\rho hb dx \mathbf{a} = d\mathbf{T}$$

En toute rigueur l'accélération \mathbf{a} n'est pas nécessairement verticale et la force \mathbf{T} ne correspond pas exactement à un effort tranchant. Nous supposerons néanmoins que les déflexions de la poutre (et

donc la pente locale) sont faibles si bien que le déplacement du centre de masse de l'élément dx est essentiellement vertical ainsi que T . L'équilibre des forces se traduit alors par:

$$\rho hb \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

écrivons l'équilibre des moments autour du centre de masse:

$$-\mathcal{M} + \mathcal{M} + d\mathcal{M} + T dx/2 + (T + dT)dx/2 = dJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

où $dJ = \rho b h^3 dx / 12$ est le moment d'inertie de l'élément dx autour de son centre de masse et θ la pente de la tangente à la poutre. Dans la limite des faibles pentes, on a $\theta = \partial y / \partial x$. L'équilibre des moments se traduit ainsi par:

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} + T = \frac{1}{12} \rho b h^3 \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x}.$$

Pour se débarrasser de la force T , nous pouvons combiner les deux expressions après avoir dérivé la dernière pour faire apparaître $\partial T / \partial x$:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial x^2} + \rho b h \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{12} \rho b h^3 \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2}.$$

Si la longueur caractéristique selon x vaut $\lambda \gg h$, l'ordre de grandeur du dernier terme est $\rho b h (h/\lambda)^2 \partial^2 y / \partial t^2$. Nous avons donc un facteur d'ordre $(h/\lambda)^2$ avec le terme d'accélération. L'accélération angulaire est donc négligeable, ce qui conduit à:

$$\rho b h \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial x^2} = 0.$$

Reste à prendre en compte l'équation de la flexion d'une poutre (dans la limite de faible pente):

$$\mathcal{M} = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Nous obtenons l'équation d'onde:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho b h}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

dont nous pouvons chercher des solutions de la forme $y(x, t) = Y(x)e^{i\omega t}$.

Cela revient à résoudre:

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - k^4 Y = 0 \quad \text{avec} \quad k = \left(\frac{\rho b h}{EI} \omega^2 \right)^{1/4}.$$

Pour cela, on cherche les racines du polynôme caractéristique $r^4 = k^4$ qui sont $\pm k, \pm ik$. Les solutions sont donc de la forme $Y(x) = a_1 e^{kx} + a_2 e^{-kx} + a_3 e^{ikx} + a_4 e^{-ikx}$. Toutes les combinaisons linéaires de ces solutions sont également solution et il est plus commode de les écrire de la manière suivante:

$$Y(x) = a \sin(kx) + b \cos(kx) + c \sinh(kx) + d \cosh(kx)$$

Les constantes a, b, c, d sont à déterminer à partir des conditions aux limites. Dans le cas d'une poutre encastrée à son extrémité, ces conditions s'écrivent:

- $Y(0) = b + d = 0$
(pas de déplacement au niveau de l'encastrement)
- $Y'(0) = k(a + c) = 0$
(angle nul à l'encastrement)
- $\mathcal{M}(L) \sim Y''(L) = k^2(-a \sin(kL) - b \cos(kL) + c \sinh(kL) + d \cosh(kL)) = 0$
(moment nul à l'extrémité libre)
- $T(L) \sim \mathcal{M}'(L) \sim Y'''(L) = k^3(-a \cos(kL) + b \sin(kL) + c \cosh(kL) + d \sinh(kL)) = 0$
(pas d'effort tranchant à l'extrémité libre)

Nous cherchons donc les solutions du système linéaire suivant:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(kL) & -\cos(kL) & \sinh(kL) & \cosh(kL) \\ -\cos(kL) & \sin(kL) & \cosh(kL) & \sinh(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On cherche les modes propres de vibration qui sont indépendants de l'amplitude des oscillations, c'est-à-dire des solutions où les constantes a, b, c et d sont proportionnelles à une constante arbitraire. Ceci n'est possible que si le déterminant de la matrice est nul. Passons les calculs, le déterminant vaut $2 \cosh(kL) \cos(kL) + 2$. La nombre d'onde propre k doit donc vérifier:

$$\cosh(kL) \cos(kL) = -1$$

Une manière simple de visualiser les solutions consiste à tracer $\cos(x)$ et $-1/\cosh(x)$ et de regarder quand les deux courbent s'intersectent (Fig. 3).

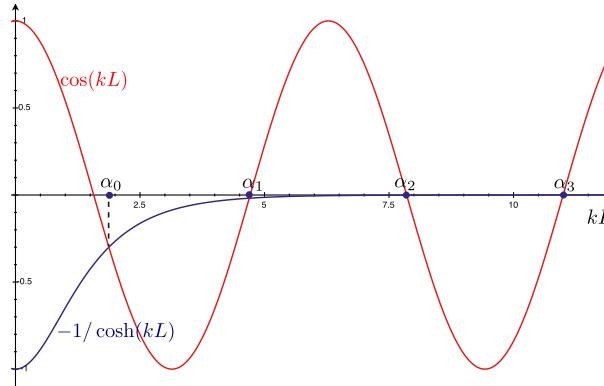


Figure 3. Détermination graphique des solutions de $\cosh(kL) \cos(kL) = -1$.

Le mode fondamental correspond à $k_0L = 1.875$, le mode suivant à $k_1L = 4.695$ et les modes d'ordre supérieur sont donnés par $k_iL \simeq (2i + 1)\pi/2$. Nous pouvons en déduire l'expression des fréquences propres de vibrations:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{EI}{\rho hb} \right)^{1/2} k_i^2.$$

Au final, si on prend $I = h^3b/12$, nous obtenons pour le mode fondamental:

$$f_0 = \frac{1.875^2}{2\pi\sqrt{12}} \frac{h}{L^2} \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} \simeq 0.161 \frac{h}{L^2} \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}.$$

Les fréquences propres suivantes sont données par $f_1 = 6.27f_0$, $f_2 = 17.55f_0$, $f_3 = 34.39f_0$, $f_4 = 56.85f_0$...

En réinjectant les valeurs de k_i dans les solutions, on peut retrouver les formes des différents modes. Le mode fondamental et les 3 premiers modes suivants sont représentés figure 4. Le fait que les différents modes ne soient pas des multiples rationnels du mode fondamental est à l'origine du son particulier des boîtes à musiques ou des carillons.

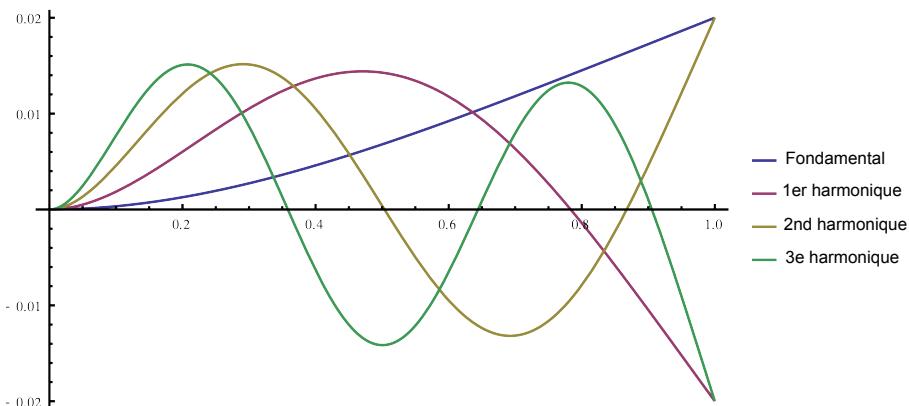
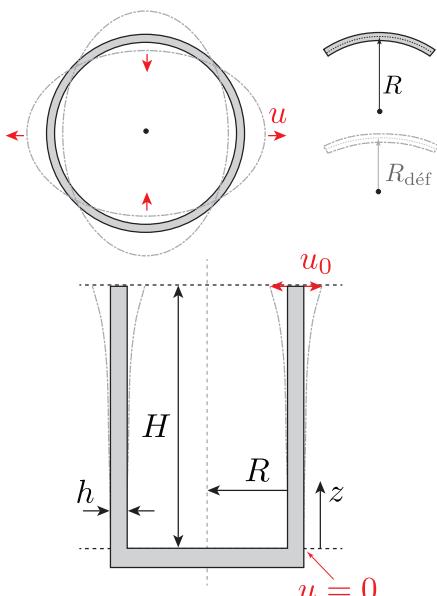


Figure 4. Premiers modes de vibration d'une poutre encastrée.

La vibration d'un verre



En imposant l'équivalence entre l'énergie élastique totale et l'énergie cinétique totale, nous pouvons déterminer la fréquence de vibration ω_0 du système.

Nous considérerons d'abord un verre vide (les paramètres sont spécifiés dans l'illustration). Le champ de déplacement est à tout point perpendiculaire à l'épaisseur du verre, comme c'est le cas pour une poutre. Comme les variations caractéristiques se font sur des distances d'ordre $R \gg h$, on est bien dans le cas des poutres élancées, où le mouvement transverse est associé à de la flexion plutôt qu'à du cisaillement. En outre comme l'amplitude des déplacements u est faible par rapport à l'épaisseur, on peut négliger l'extension et considérer uniquement l'énergie de flexion. La déformation de circonference d'un cercle à une ellipse se fera donc à périmètre constant.

La déformation dans la coque est:

$$\varepsilon \sim h \Delta \frac{1}{R}, \quad \Delta \frac{1}{R} = \left(\frac{1}{R_{\text{déf}}} - \frac{1}{R} \right).$$

Comme nous travaillons dans la limite $u/R \ll 1$, nous estimons le rayon de courbure (passant de R à $R_{\text{déf}}$:

$$R_{\text{déf}} \sim R \pm u \implies \frac{1}{R_{\text{déf}}} \sim \frac{1}{R} (1 \pm \frac{u}{R}) \implies \Delta \frac{1}{R} \sim \frac{u}{R^2}.$$

Nous notons que le déplacement d'un point sur le bord du verre à tout instant (une oscillation sinusoïdale) est:

$$u(t) = u_0 \frac{z}{H} \cos(\omega t).$$

L'énergie élastique du verre est $U_{el}^v \sim E_v \varepsilon^2 \Omega$ (Ω est le volume):

$$U_{el}^v \sim \int_0^{2\pi} \int_0^H E_v \left(\frac{h}{R^2} u_0 \frac{z}{H} \right)^2 h R d\theta dz \sim \int_0^H E_v \frac{h^3}{R^3} u_0^2 \left(\frac{z}{H} \right)^2 dz \sim E_v \frac{H h^3}{R^3} u_0^2,$$

où l'on considère une période d'oscillation. L'énergie cinétique stockée du verre est $U_{cin}^v \sim v^2 m_v$, où $v \sim du/dt \sim u_0 \omega \frac{z}{H}$ et $m_v \sim \rho_v \Omega$, c'est-à-dire:

$$U_{cin}^v \sim \int_0^H \left(\omega u_0 \frac{z}{H} \right)^2 \rho_v R h dz \sim \rho_v \omega^2 u_0^2 R h H.$$

La fréquence de résonance ω_0 du verre vide (le premier mode) est donc:

$$U_{el}^v \sim U_{cin}^v \implies \omega_0 \sim \sqrt{\frac{E_v}{\rho_v}} \frac{h}{R^2}.$$

Si le verre est rempli d'eau jusqu'à H_w , l'énergie cinétique doit être corrigée pour tenir compte du mouvement du contenant:

$$U_{cin}^{\text{total}} = U_{cin}^v + U_{cin}^w$$

$$U_{cin}^w \sim \int_0^{H_w} \left(\omega u_0 \frac{z}{H} \right)^2 \rho_w R^2 dz \sim \rho_w \omega^2 u_0^2 R^2 H_w^3 / H^2,$$

où ρ_w est la densité de l'eau. La fréquence de résonance ω_0 du verre+eau est donc:

$$U_{el}^v \sim U_{cin}^v + U_{cin}^w \implies \omega_0 \sim \sqrt{\frac{E_v H \frac{h^3}{R^3}}{\rho_v R H h + \rho_w R^2 H_w^3 / H^2}}.$$