# Examen de mécanique des fluides

**Promotion 142, 17 juin 2025**

## Partie A (8 points)

**Durée 45 min. Document autorisé : 1 feuille A4 recto-verso manuscrite. Calculatrice non autorisée.**

### 1. Un parachute pour Big Jim (1 pt)

Vos parents ont probablement joué avec Big Jim, figurine très populaire dans les années 70. De nombreux accessoires étaient proposés pour cet aventurier, entre-autres, un parachute (Fig. 1). La figurine pèse 200 g pour un hauteur d'environ 20 cm et le parachute déployé présente une surface projetée de 1 $m^2$.

*a. Quel est l'ordre de grandeur du coefficient de traînée d'un parachute ?*

*b. Quelle est la vitesse terminale de chute de la figurine équipée de son parachute. Donner l'expression littérale et un ordre de grandeur numérique.*

FIGURE 1 – L'aventurier Big Jim et son accessoire parachute retrouvés sur eBay.

**Solution:** a. $C_x \simeq 1$ **(0.25pt)**
b. Calcul classique, $mg = \frac{1}{2}\rho_{air} U^2 C_x S$, **(0.5pt)** ce qui conduit à $U = 2\,\mathrm{m/s}$ **(0.25pt)**.

## 2. Hélice volante ou Taketombo (2.5 pts)

Le taketombo est un jouet traditionnel japonais constitué d'un rotor en bambou monté sur une tige (Fig. 2). Le rotor possède deux pales symétriques inclinées par rapport à l'horizontale. On assimile chaque pale à une aile mince symétrique de coefficient de portance $C_p$ d'ordre 1. On cherche la condition sur la vitesse de rotation $\omega$ pour maintenir le taketombo en vol stationnaire. Rayon des pales $R = 7\,\text{cm}$ pour une largeur $\ell = 1,5\,\text{cm}$ et une masse totale du taketombo, $m = 6\,\text{g}$.

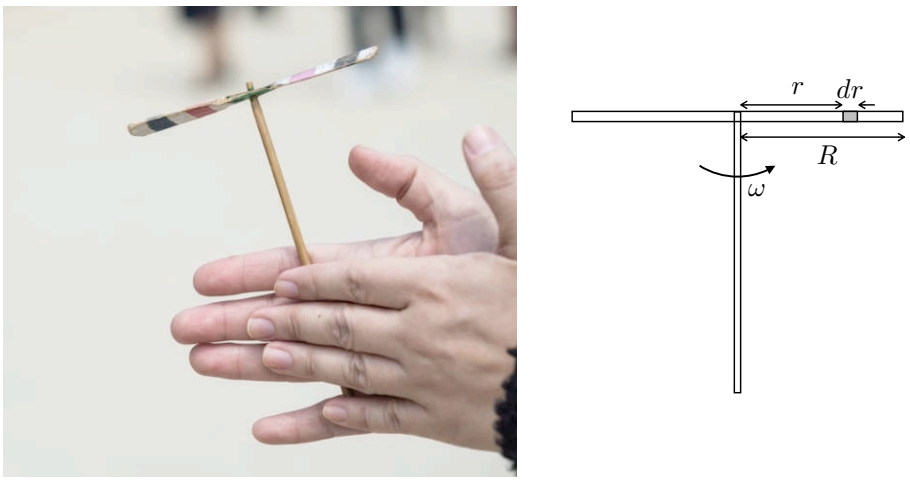


FIGURE 2 – Mise en rotation d'un *Taketombo*

*a. Estimer le nombre de Reynolds de l'écoulement d'air en bout de pale pour une vitesse de rotation de quelques tours/s. Que peut-on en déduire sur l'expression des forces exercées par l'air sur les pales ?*

*b. Si on considère un élément d'aile de longueur dr située à la distance r de l'axe, quelle est la force de portance locale $dF_p$ générée par la rotation de l'aile ?*

*c. En déduire la vitesse de rotation minimale pour que le taketombo puisse décoller. Donner l'expression littérale et un ordre de grandeur numérique.*

**Solution:** a. Pour un rayon des pales de l'ordre de 7 cm, et une vitesse angulaire de l'ordre de 30 rad/s, la vitesse linéaire en bout de pale est de l'ordre de 2 m/s. La largeur des pales est de l'ordre du cm et le nombre de Reynolds associé est de l'ordre de $10^3$ **(0.25pt)**. Les forces de portance sur les pales s'écrivent $1/2\rho_{air}U^2SC_p$ **(0.5pt)**.
b. La vitesse locale de l'aile est $U(r) = r\omega$. La force de portance par tranche $dr$ de chaque pale est $1/2\rho_{air}U(r)^2C_p\ell dr = 1/2\rho_{air}\omega^2\ell C_p r^2 dr$. **(0.25pt)**
c. La force portante totale est donc $F_p = 2 * \int_0^R 1/2\rho_{air}\omega^2\ell C_p r^2 dr = 2\frac{1}{6}\rho_{air}\omega^2\ell C_p R^3$ **(0.5pt)**. Cette force portante doit équilibrer le poids $mg = 6 \cdot 10^{-2}\,\text{N}$ du taketombo. La

vitesse minimale de rotation pour décoller est :

$$\omega = \left(\frac{3\,mg}{\rho_{air} C_p \ell R^3}\right)^{1/2} \textbf{(0.5pt)} \approx 200 \text{ rad/s} \approx 30 \text{ tours/s} \textbf{(0.5pt)}$$

### 3. Fusée hydraulique (2.5 pts)

On s'intéresse à présent à un jouet de jardin, une "fusée" en forme de cloche propulsée par un jet d'eau vertical (Fig. 3). Le jet est émis à partir d'une buse de rayon $R_0$ connectée à un tuyau d'arrosage. La vitesse du jet est uniforme sur sa section et vaut initialement $U_0$.

Considérons d'abord un jet sans fusée.

*a. Si on néglige les effets de la tension de surface, quelle est la pression à l'intérieur du jet ?*

*b. Comment sa vitesse $U$ évolue-t-elle avec l'altitude $z$ si on ne tient compte que de l'énergie cinétique de l'eau et de la gravité ?*

*c. Déterminer la hauteur maximale $h_{max}$ atteinte par le jet.*

*d. Déterminer l'évolution du rayon $R(z)$.*

On pose à présent la fusée sur le jet et on la laisse se stabiliser à une hauteur d'équilibre $h$. Une question est de savoir quelle force le jet exerce sur la cloche. L'écoulement au point d'impact est assez complexe. Néanmoins peu avant l'impact, la vitesse vaut $U(h)$ et au centre du point d'impact, la vitesse s'annule (point de stagnation).

*e. Que vaut, en loi d'échelle, la force que le jet exerce sur la cloche ?*

*f. À quelle hauteur $h$ la fusée de masse $m$ se stabilise-t-elle ?*

**Solution:** a. la pression à l'extérieur du jet vaut $P_{atm}$. Si on néglige la tension de surface, cette pression reste inchangée lorsqu'on traverse l'interface. **(0.25pt)**
b.Il suffit d'appliquer Bernoulli qui nous donne : $\frac{1}{2}\rho U_0^2 = \frac{1}{2}\rho U^2(z) + \rho g z$. On obtient alors $U(z) = U_0(1 - 2gz/U_0^2)^{1/2}$ (c'est comme pour une bille lancée en l'air). **(0.5pt)**
c. La hauteur max vaut $h_{max} = U_0^2/2g$. **(0.25pt)**
d. Par conservation du débit on a : $R_0^2 U_0 = R^2(z)U(z)$, soit $R(z) = \frac{R_0}{(1-2gz/U_0^2)^{1/4}}$ **(0.5pt)**. En pratique $R$ ne diverge pas en $h_{max}$, mais le liquide à tendance à éclater en gouttes.

e.Pour trouver la force, on peut utiliser un argument de type Bernoulli. Au niveau du point de stagnation, la pression d'arrêt est donnée par $P_{atm} + \frac{1}{2}\rho U^2(h)$. Si on retranche $P_{atm}$ qui s'applique sur l'autre face de la cloche et qu'on intègre sur la section du jet, on obtient $F = \frac{1}{2}\rho_{eau} U^2(h)\pi R^2(h)$. **(0.5pt)**

Une formulation plus rigoureuse consiste à prendre un volume de contrôle qui englobe la section du jet et la paroi interne de la cloche. Le flux de quantité de mouvement qui entre

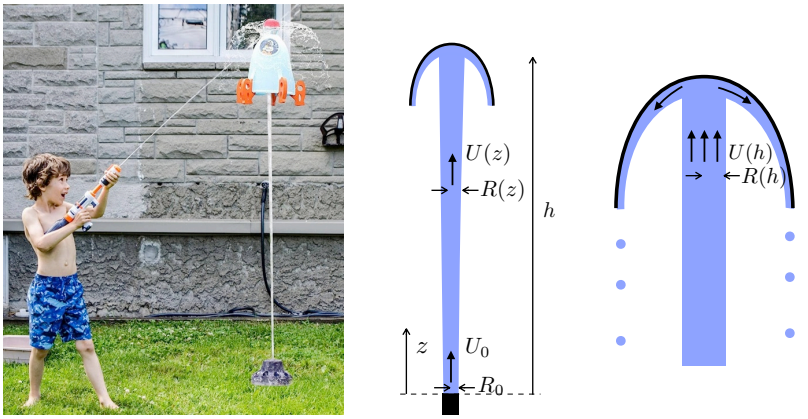


FIGURE 3 – "Fusée" propulsée par un jet d'eau. Le jet vertical est émis à partir d'une buse de rayon $R_0$ avec une vitesse initiale $U_0$ uniforme sur sa section. La vitesse $U(z)$ et le rayon du jet $R(z)$ évoluent avec l'altitude $z$. En première approximation, la fusée a une forme de cloche de masse $m$ impactée à une hauteur $h$ par un jet de rayon $R(h)$ animé d'une vitesse $U(h)$, ce qui produit une force de sustentation.

vaut $\rho U \times U \times \pi R^2(h)$. Pour le flux qui sort, ce n'est pas complètement évident. On pourrait dire qu'il y a de la quantité de mouvement qui est éjectée vers le bas et contribuerait à une force de propulsion (comme une fusée). Si on néglige la dissipation sur la surface de la cloche, on peut utiliser Bernoulli qui nous dit que la vitesse sur une ligne de courant qui suit l'interface entre l'eau et l'air reste inchangée (avec une pression qui reste égale à $P_{atm}$. Le débit étant conservé, la surface de sortie du volume de contrôle et la même qui celle d'entrée, ce qui double la force propulsive. Cette force serait donc $2\pi R^2(h)\rho U^2(h)$ si on néglige la dissipation le long de la paroi et le poids du liquide dans le volume de contrôle.

f. Si on ne prend pas en compte le préfacteur 2, l'équilibre des forces conduit à $mg \sim \pi\rho_{eau}U_0^2(1-2gh/U_0^2)R_0^2\frac{1}{(1-2gh/U_0^2)^{1/2}}$, soit $\frac{mg}{\pi\rho_{eau}U_0^2R_0^2} \sim (1-2gh/U_0^2)^{1/2}$

$h = h_{max}\left(1-\left(\frac{mg}{\pi\rho_{eau}U_0^2R_0^2}\right)^2\right)$ **(0.5pt)**.

Pour être plus rigoureux, on peut remplacer $\pi$ par $2\pi$.

## 4. Sablier liquide (2 pts)

Un sablier à liquides est rempli de deux liquides non miscibles de densité différentes (typiquement de l'eau et de l'huile de masses volumiques respectives $\rho_1 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ et $\rho_2 = 900\,\mathrm{kg/m^3}$ et de tension interfaciale $\gamma = 20\,\mathrm{mN/m}$). Les deux parties sont séparées par une paroi percée d'un ou de plusieurs trous. Nous nous intéressons ici au modèle à 2 trous (Fig. 4). À l'équilibre, le liquide le plus dense est dans la partie inférieure du sablier et le moins dense dans la partie supérieure. On retourne le sablier. Si le rayon des trous $R$ est assez grand, les liquides s'écoulent goutte à goutte de part et d'autre de la paroi.
Afin d'estimer une taille de trou minimale, comparons l'état de départ où les deux interfaces

sont planes à un état perturbé où les interfaces forment des bosses d'amplitude $A$.

*a. En ordre de grandeur, le volume d'une bosse s'écrit comme $R^2A$. Quelle est la variation d'énergie potentielle de gravité entre la configuration de départ et la configuration perturbée ?*

*b. L'aire des bosses est de l'ordre de $\pi(R^2 + A^2)$ (aire d'une calotte sphérique). Quelle est, en loi d'échelle, la différence d'énergie de surface entre la configuration de départ et la configuration perturbée ?*

*c. À quelle condition les liquides vont-ils s'écouler ?*

*d. Estimer la taille minimale des trous et en donner une application numérique.*

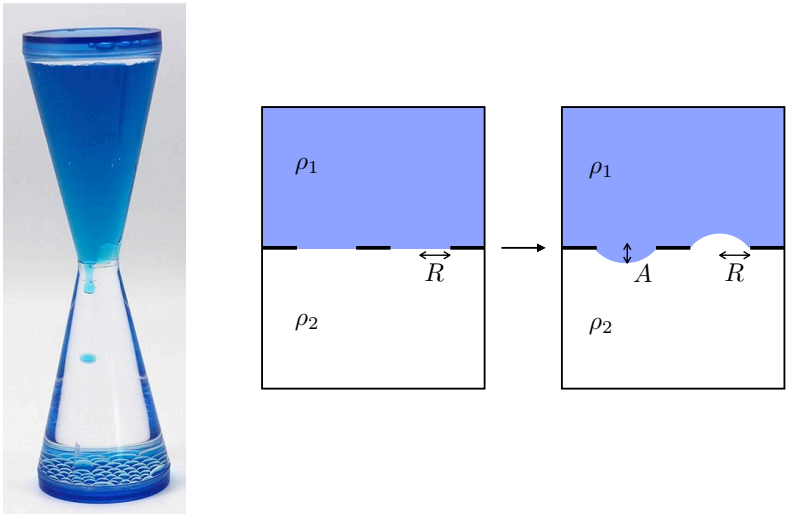


FIGURE 4 – Sablier liquide à double orifice, l'eau colorée en bleu plus dense que l'huile s'écoule par l'orifice de gauche et l'huile transparente par celui de droite. Schéma de principe : les trous ont un rayon $R$ et les liquides des densités respectives $\rho_1$ et $\rho_2$. On perturbe une configuration de référence où les interfaces sont planes en les déformant d'une amplitude $A$.

**Solution:** a. Le gain en énergie potentielle est $mgh$, soit $(\rho_1 - \rho_2)R^2AgA$ (**(0.5 pt)**.
b. Le coût en énergie de surface est donné par $\gamma A^2$ (**(0.5 pt)**.
c. Le gain l'emporte sur le coût pour $\Delta\rho g R^2 > \gamma$, soit $R > (\gamma/\Delta\rho g)^{1/2}$, longueur capillaire du système (en toute rigueur, il y a un préfacteur numérique) (**(0.5 pt)**.
d. L'application numérique donne 4.5 mm (**(0.5 pt)**.

# Partie B (12 points)

**Durée 1h45, document autorisé : 1 feuille A4 recto verso manuscrite.**
**Calculatrice non autorisée.**

## 1. Boîte à meuh (6 pts)

Une "boîte à meuh" est composée d'un piston cylindrique de rayon $R$ et de longueur $L$ qui s'enfonce sous l'effet de son poids à l'intérieur d'une boîte de rayon interne légèrement plus élevé $R+h$ (Fig. 5). Un mécanisme de lame vibrante fixée sur le piston produit le son "meuh" lors de la chute du piston. Nous ne décrirons pas ici ce mécanisme et nous concentrerons sur la vitesse de chute $V$ du piston. La condition $h \ll R$ permet de ramener le problème à une configuration 1D dans la laquelle une paroi mobile se déplace parallèlement à une paroi fixe.

*Rappel :*

Viscosité dynamique de l'air : $1.8 \cdot 10^{-5}$ Pa.s
Masse volumique de l'air : 1 kg/m$^3$

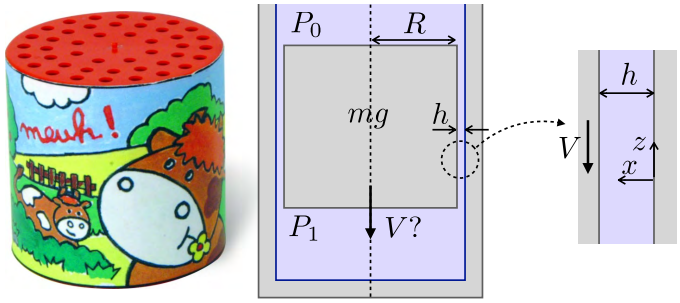


FIGURE 5 – "Boîte à meuh" et version schématisée. Un cylindre de rayon $R$ s'enfonce dans une boîte de rayon $R+h$. Configuration 1D dans la limite $h \ll R$.

### 1.1 Boîte ouverte (3 pts)

Si la boîte est ouverte, la pression $P_1$ en bas du piston est a priori la même que la pression $P_0$ en haut (on néglige la perte de charge liée à l'écoulement de l'air en amont et en aval du piston). On supposera l'écoulement à bas nombre de Reynolds. Enfin, nous ne prenons pas en compte la variation de pression hydrostatique dans l'air qui ne se traduirait par une très légère poussée d'Archimède sur le piston.

*a. Quel est alors le profil de l'écoulement dans l'espacement entre le piston et la boîte ? Tracer schématiquement ce profil.*

*b. En déduire la contrainte visqueuse qui s'applique sur le piston.*

*c. Décrire les forces qui s'exercent sur le piston. En déduire la vitesse $V_0$ à laquelle le piston se déplace.*
*Application numérique avec $R = 3$ cm, $h = 0.1$ mm, $L = 5$ cm et $m = 150$ g.*

*d. Le résultat est-il réaliste ? L'hypothèse d'un petit nombre de Reynolds est-elle vérifiée ? Justifier l'expression du Nombre de Reynolds choisie.*

**Solution:** a. Profil de Couette **(0.5 pt)**.
b. $\sigma = \eta V/h$ **(0.5 pt)**
c. $mg = 2\pi R\sigma L = 2\pi\eta VLR/h$, ce qui conduit à $V_0 = \frac{mg}{2\pi\eta}\frac{h}{RL}$ **(0.5 pt)**
AN $V_0 \sim 900\,\mathrm{m/s}$ ! (en ordre de grandeur sans calculatrice $10^3$ : ok !) **(0.5 pt)**
d. La vitesse est selon $z$ du coup dans $(u.\nabla)u$, on doit estimer le terme $u.\frac{\partial u}{\partial z} \sim V^2/L$. Pour le laplacien c'est plus simple $\Delta u \sim V/h^2$. On se retrouve donc avec

$$Re \sim \frac{\rho V^2/L}{\eta V/h^2} \sim \frac{\rho V h^2}{\eta L}$$ **(0.5 pt)**

(je compterais juste, la réponse $\rho Vh/\eta$)
AN : $Re \sim 10$ (mais $\sim 5000$ si on prend $Re \sim \rho Vh/\eta$. De toutes façons c'est beaucoup trop !**(0.5 pt)**

## 1.2 Boîte fermée (3 pts)

Dans la configuration usuelle, le fond de la "boîte à meuh" est fermé. La partie supérieure est ainsi soumise à la pression atmosphérique $P_0$ grâce aux petits trous pratiqués dans le couvercle. La pression $P_1$ au bas du piston peut ici être différente.

*a. En comparant le flux d'air poussé par le piston qui se déplace à la vitesse $V$ au flux d'air remontant par l'interstice à la vitesse moyenne $\overline{U}$, déterminer la relation qui relie $V$ à $\overline{U}$. On supposera que l'air n'est pas compressible et on utilisera la condition $h \ll R$ pour simplifier les calculs.*

*b. Compte-tenu de l'écart sur les ordres de grandeur de $\overline{U}$ et de $V$, justifier que l'on peut négliger la vitesse de déplacement du piston dans le calcul de l'écoulement (et donc prendre une vitesse nulle comme condition aux limites sur la paroi du cylindre mobile). On supposera que l'écoulement est à bas nombre de Reynolds et on négligera les effets de la gravité dans l'écoulement du fluide.*
*Représenter schématiquement le profil de l'écoulement du fluide dans l'espace confiné entre le piston et la paroi.*

*c. Calculer en loi d'échelle la valeur moyenne de la vitesse $\overline{U}$ en fonction de $h$, $\nabla P$ et $\eta$. En déduire la valeur de la pression $P_1$ sous le piston en fonction de $P_0$, $\eta$, $R$, $V$ et $h$.*

Reste à déterminer la force que le fluide exerce sur le piston.

*d. Quelle est en loi d'échelle la contribution des forces de pression ?*

*e. Quelle est en loi d'échelle la contrainte visqueuse de cisaillement que le fluide exerce sur la paroi du piston ? En déduire la force globale sur la paroi du cylindre intérieur mobile.*

*f. Ces deux contributions sont elles comparables ?*

*g. Quelle est finalement la vitesse d'enfoncement $V_1$ du piston (toujours en loi d'échelle) ? Application numérique.*

*h. L'hypothèse sur le nombre de Reynolds est-elle valable ?*

**Solution:** a. Le mouvement du piston engendre un débit $Q = \pi R^2 V$ qui se répercute dans l'entrefer $Q = 2\pi R h \overline{U}$. Soit $\overline{U} = V \frac{R}{2h} \gg V$ **(0.25 pt)**
b. $U \gg V$ du coup on peut considérer que le piston ne bouge pas. **(0.25 pt)**
Écoulement de Poiseuille. **(0.25 pt)**
c. Stokes dans l'interstice :

$$\eta \frac{\overline{U}}{h^2} \sim \frac{\Delta P}{L}$$

Soit

$$\overline{U} \sim \frac{\Delta P}{L} \frac{h^2}{\eta} \textbf{ (0.25 pt)}$$

Débit :

$$Q \sim 2\pi R U h \sim \frac{\Delta P}{L} \frac{R h^3}{\eta} \sim \pi R^2 V$$

on déduit :

$$\frac{\Delta P}{L} \sim \frac{\eta R V}{h^3}$$

Ce qui conduit à

$$P_1 = P_0 + \frac{6\eta R V L}{h^3} \textbf{ (0.25 pt)}$$

En loi d'échelle, on n'a pas le facteur 6.
d. Pour la pression c'est plus simple :

$$F_p = \pi R^2 \Delta P \sim \eta L V \frac{R^3}{h^3} \textbf{ (0.25 pt)}$$

e. Contrainte de cisaillement :

$$\sigma = \eta \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=h} \sim \frac{\eta U}{h} \sim \frac{\eta R V}{h^2} \textbf{ (0.25 pt)}$$

Soit pour la force :

$$F_v = 2\pi R L \sigma \sim \eta L V \frac{R^2}{h^2} \textbf{ (0.25 pt)}$$

f. La contribution de la pression est ainsi R/h fois plus élevée que celle de la friction **(0.25 pt)**.
g. Pour la vitesse, on fait $mg = F_p$, soit

$$V_1 \sim \frac{mg}{\eta L} \frac{h^3}{R^3} \textbf{(0.25 pt)}$$

On trouve donc :

$$V_1 \sim \frac{h^2}{R^2} V_0$$

Ça va beaucoup plus lentement.
AN : $V_1 \sim 1\,\mathrm{cm/s}$ **(0.25 pt)**.
h. Pour le nombre de Reynolds, on remplace $V$ par $U$ dans l'expression précédente :

$$Re \sim \frac{\rho V^2/L}{\eta V/h^2} \sim \frac{\rho U h^2}{\eta L} \sim \frac{\rho V h R}{\eta L} \sim 10^{-2} \textbf{ (0.25 pt)}$$

Cette fois-ci, c'est bon !

## 2. Le ludion (6 pts)

Le *ludion* est une expérience de "salon" très populaire au XIXe siècle généralement présentée comme un tour de magie. Le secret de ce tour repose essentiellement sur la forte compressibilité de l'air par rapport à l'eau et la poussée d'Archimède. Le ludion est composé d'une masselotte (par exemple une figurine en plomb) que l'on plonge dans une grande éprouvette remplie d'eau (Fig. 6). Une bulle de verre partiellement remplie d'air et d'eau est attachée à la masselotte et tend à faire remonter le ludion. Une ouverture à la base de la bulle de verre permet d'équilibrer la pression à l'intérieur et à l'extérieur de la bulle. L'air initialement présent dans la bulle ne peut s'échapper et va donc se comprimer si la pression extérieure augmente ou au contraire se dilater si la pression extérieure diminue.

Lorsque l'expérience est présentée, le volume d'air initial de la bulle est ajusté de telle sorte à ce que l'ensemble flotte. Le tube rempli à ras bord est scellé par une membrane élastique. Le présentateur appuie alors sur la membrane qui comprime l'eau du tube, comprimant à son tour l'air contenu dans la bulle. Si le système est bien réglé, la flottaison n'est plus assurée et le ludion coule. L'effet inverse se produit en relâchant la pression. Au-delà du caractère ludique de l'expérience, l'effet ludion est très important pour les plongeurs de toutes sortes des humains aux cachalots. Nous proposons de décrire la stabilité du ludion et la dynamique de sa chute (ou de sa remontée).

La masselotte a un poids relatif $M^*g$ une fois immergée (c'est-à-dire son poids réel auquel on a soustrait la poussée d'Archimède). Nous négligerons la masse de la bulle de verre et ne considérerons que la poussée Archimède exercée par le volume d'air emprisonné. On notera $\rho_\ell$ la densité de l'eau. Pour les applications numériques, nous prendrons $R = 2\,\mathrm{cm}$ et $M^* = 10\,\mathrm{g}$ Nous introduisons un volume d'air $V_0$ à la pression atmosphérique $P_0$ (évidemment le volume de la bulle de verre impose $V_0 < \frac{4}{3}\pi R^3$).

En appuyant sur la membrane élastique qui scelle l'éprouvette, l'opérateur fait augmenter la pression à la surface de l'eau jusqu'à une valeur $P_1$ (en pratique $P_1$ est très proche de la pression atmosphérique $P_0$). Le volume de l'air emprisonné est alors $V_1$.

*a. Quelle doit être la valeur de $V_1$ pour que le ludion soit à la limite de flottabilité ?*

L'opérateur impose toujours une pression $P_1$ à la surface de l'eau.

*b. Quelle est la pression dans l'eau à une profondeur $h$ (mesuréee par rapport à la surface) ?*

*c. Si on suppose que l'air piégé suit la loi de Boyle-Mariotte, $PV = cte$, comment varie le volume d'air en fonction de la profondeur $h$ si on enfonce la bulle de verre dans l'eau ?*

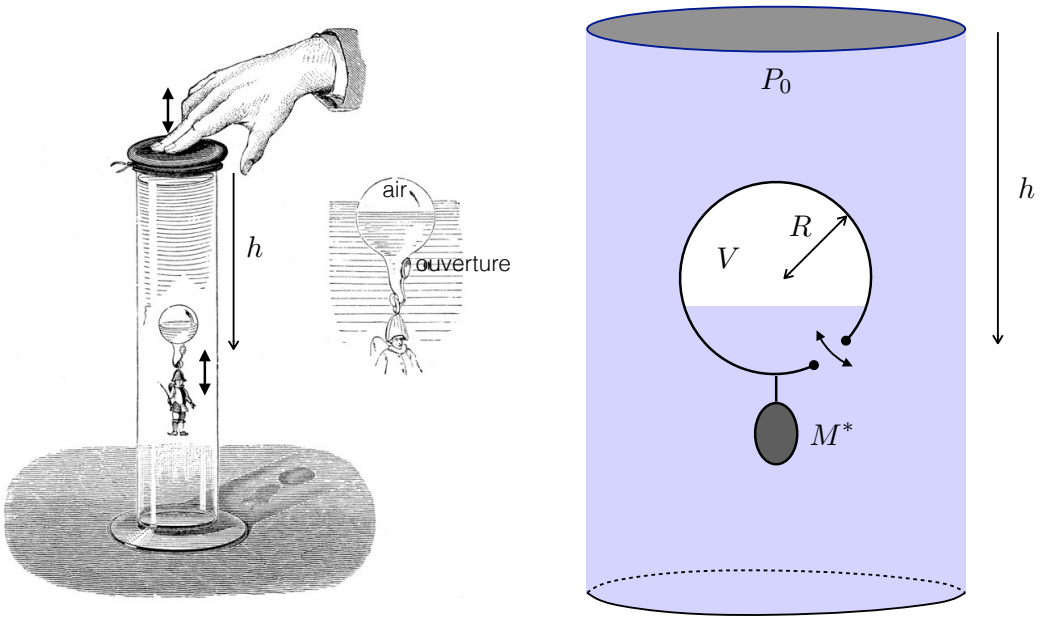


FIGURE 6 – Expérience du *ludion* : une masselotte (par exemple une figurine en plomb est attachée à une bulle de verre percée à sa base qui emprisonne une quantité d'air fixe. L'ensemble est placé dans une grande éprouvette remplie à ras bord est scellée par une membrane élastique. Lorsque l'opérateur appuie sur la membrane, le ludion coule et remonte lorsque la pression est relachée. D'après A. Privat Deschanel, Elementary Treatise on Natural Philosophy Part I. Mechanics, Hydrostatics, and Pneumatics (D. Appleton and Company, 1884).

*d. En pratique, $h$ étant limité à quelques dizaines de centimètres dans l'expérience, la variation du volume est-elle importante ? (on prendra $P_1 \simeq 1$ atm pour l'estimation numérique).*
*En déduire un développement limité de l'expression de $V(h)$ au 1er ordre en $h$, que nous utiliserons pour la suite des calculs.*

*e. La position d'équilibre du ludion à la limite de flottabilité est-elle stable ? En d'autres termes, si par accident le ludion est légèrement dévié de sa position d'équilibre, les différentes forces en jeu vont-elles le ramener vers sa position d'équilibre ?*

Supposons maintenant, que suite à une petite perturbation, le ludion s'enfonce d'une profondeur $\delta = 1\,\text{mm}$ et essayons d'estimer la dynamique du ludion $h(t)$. Afin de simplifier les calculs, nous ferons l'hypothèse de quasi-stationnarité c'est à dire qu'à chaque instant la force de traînée hydrodynamique équilibre le poids et la poussée d'Archimède (autrement dit, on considère que le ludion adopte à chaque instant sa vitesse stationnaire qui varie suffisamment lentement pour négliger les forces d'inertie). Pour simplifier davantage les calculs, nous ne considérerons que la force de traînée sur la bulle, et négligerons donc celle sur la masselotte. Il est naturel de penser que le nombre de Reynolds initial est petit.

*f. Dans ces conditions, établir l'équation différentielle qui dicte alors la dynamique du ludion. Intégrer cette équation. Estimer numériquement la vitesse initiale et en déduire le nombre de Reynolds correspondant. L'hypothèse de départ $Re \ll 1$ est-elle vérifiée ?*

*g. Reprendre le calcul précédent avec la bonne expression de la traînée hydrodynamique et montrer que la dynamique suit une loi en $h \propto t^2$ pour $h \gg \delta$.*

Une fois que le ludion atteint le fond de l'éprouvette, l'opérateur relâche la pression sur la membrane et la pression en haut de l'éprouvette reprend sa valeur initiale $P_0$. L'opérateur espère que le ludion va remonter afin d'impressionner son public. Mais est-il garanti de son succès ?

*h. Le ludion peut-il rester au fond de l'éprouvette malgré le relâchement de la pression ? Discuter la condition de remontée du ludion en fonction de la hauteur de l'éprouvette et de $P_1 - P_0$. Pour cela on pourra déterminer ce que devient le volume d'air emprisonné dans la bulle de verre lorsqu'on relâche la pression.*

**Solution:** a. L'air étant 1000 fois moins dense que l'eau, la poussé d'Archimède exercée par la bulle d'air vaut $\rho_\ell V_1 g$ et s'équilibre avec le poids apparent de la masselotte, ce qui conduit à :

$$V_1 = \frac{M^*}{\rho_\ell} \textbf{(0.5 pt)}$$

b. La loi de l'hydrostatique nous indique $P = P_1 + \rho_\ell g h$ **(0.5 pt)**
c. $PV = cte$, ce qui donne : $V(h) = V_1 \frac{1}{1+\frac{\rho_\ell g h}{P_1}}$ **(0.25 pt)**
d. Si on prend $h \sim 10\,\text{cm}$, on trouve $\frac{\rho_\ell g h}{P_1} \sim 10^{-2}$. La variation du volume est donc de l'ordre de 1%. **(0.25 pt)**

On peut ainsi faire le développement limité suivant :

$$V(h) \simeq V_1 \left(1 - \frac{\rho_\ell g h}{P_1}\right) \textbf{ (0.5 pt)}$$

e. Si pour une raison quelconque le ludion descend en dessous de sa position d'équilibre, la pression ambiante augmente et l'air piégé dans la bulle diminue de volume ce qui diminue la poussée d'Archimède. Le ludion se met à couler. L'effet réciproque se produirait si le ludion monte au-dessus de sa position d'équilibre (ici comme le ludion est déjà en haut de l'éprouvette, il sera bloqué par la membrane). L'équilibre est donc instable. **(0.5 pt)**

f. À petit $Re$, la force de traînée s'écrit $6\pi\eta RU$ **(0.25 pt)**. Si nous faisons l'hypothèse de quasi-stationnarité, la force de traînée compense le poids et la poussée d'Archimède :

$$-\rho_\ell V_1 g \left(1 - \frac{\rho_\ell g h}{P_1}\right) + M^* g = 6\pi\eta RU$$

soit

$$M^* g \frac{\rho_\ell g h}{P_1} = 6\pi\eta R \frac{dh}{dt} \textbf{ (0.25 pt)}$$

$$h(t) = \delta \exp\left(\frac{M^* g^2 \rho_\ell}{6\pi\eta R P_1}\, t\right) \textbf{ (0.25 pt)}$$

Cependant si on calcule la vitesse initiale, on obtient :

$$U = \frac{M^* g^2 \rho_\ell \delta}{6\pi\eta R P_1} \sim 0.025\,\mathrm{m/s} \textbf{ (0.5 pt)}$$

Le nombre de Reynolds correspondant $\rho_\ell U R/\eta \sim 500$ c'est pas petit, ce qui invalide l'hypothèse de départ. **(0.25 pt)**

g. Il nous faut donc considérer une force de traînée à grand Reynolds ce qui conduit à :

$$M^* g \frac{\rho_l g h}{P_1} = C_x \frac{1}{2} \rho_\ell U^2 \pi R^2 \quad \text{avec} \quad Cx \simeq 0.5 \textbf{ (0.25 pt)}$$

On en déduit la vitesse terminale :

$$U = \frac{dh}{dt} = \left(\frac{2M^* g^2}{\pi R^2 Cx\, P_1}\right)^{1/2} h^{1/2}$$

$$\frac{dh}{h^{1/2}} = \left(\frac{2M^* g^2}{\pi R^2 Cx\, P_1}\right)^{1/2} dt$$

$$2(h^{1/2}(t) - h^{1/2}(t=0)) = \left(\frac{2M^* g^2}{\pi R^2 Cx\, P_1}\right)^{1/2} t \textbf{ (0.5 pt)}$$

avec $h(t=0) = \delta$. Pour $h \gg \delta$, on se retrouve avec :

$$h(t) \simeq \frac{M^* g^2}{2\pi R^2 Cx\, P_1}\, t^2 \textbf{ (0.25 pt)}$$

(Si on fait l'application numérique, on trouve $h(t) \sim 10^{-3} g t^2$ soit une accélération de l'ordre de $10^{-3} g$. On peut alors se demander si l'hypothèse quasi-stationnaire tient la route. On a négligé un terme en $M\frac{dU}{dt}$ (dans $M$ il y a la masse du ludion, mais aussi la masse ajoutée de fluide qui est en $R^3$). Il faut se demander si ce terme est bien négligeable par rapport à $M^* g \frac{\rho_l g h}{p_\ell}$. Au début c'est certainement faux ($\frac{\rho_l g h}{p_\ell} \sim 10^{-3}$ pour $h \sim 1\,\text{cm}$. mais au-delà de 10 cm cela devient raisonnable.)

h. Une fois qu'on relâche la pression, le volume d'air devient $V_0 \left(1 - \frac{\rho_\ell g h}{P_0}\right)$ **(0.25 pt)**. Si la masse d'eau correspondant à ce volume (poussée d'Archimède) dépasse $M^*$, alors le ludion remonte **(0.5 pt)**. On a vu que $M^* = \rho_\ell V_1$. La condition de remontée est donc :

$$V_0 \left(1 - \frac{\rho_\ell g h}{P_0}\right) > V_1 = V_0 \frac{P_0}{P_1}$$

La condition de remontée s'écrit donc :

$$h < \frac{P_0}{\rho_\ell g} \left(1 - \frac{P_0}{P_1}\right)$$

$$h < \frac{P_1 - P_0}{\rho_\ell g} \frac{P_0}{P_1} \textbf{ (0.25 pt)}$$

(si on ne part pas du développement limité, on a directement $h < \frac{P_1 - P_0}{\rho_\ell g}$, mais le message c'est que si l'éprouvette est trop profonde, le ludion restera au fond.