

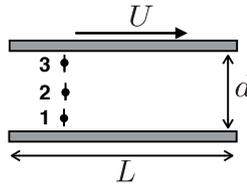
Examen de mécanique des fluides

Promotion 141, 21 juin 2024

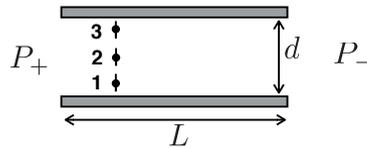
Partie A (8 points)

Durée 45 min. Sans document, ni calculatrice.

1. Deux plaques parallèles de longueur L sont séparées par un liquide très visqueux d'épaisseur d (on suppose $d \ll L$). La plaque du dessus est animée d'une vitesse de translation horizontale U , celle du dessous est immobile. On considère 3 particules dont l'orientation est marquée par une petite aiguille et qui permettent de tracer l'écoulement.
Tracer l'évolution de ces particules au cours du temps (position et orientation). 1pt
Quelle contrainte doit-on appliquer à la plaque du dessus ? 1pt



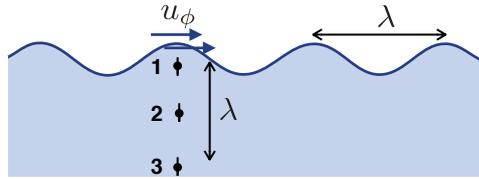
2. Les deux plaques parallèles sont à présent immobiles mais on applique une différence de pression $P_+ - P_-$ entre les deux extrémités des plaques (toujours dans l'hypothèse $d \ll L$).
Tracer l'évolution des trois particules au cours du temps (position et orientation). 1pt
Quelle est en loi d'échelle la vitesse moyenne du liquide visqueux ? 1pt



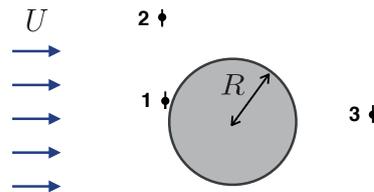
3. On considère un écoulement axisymétrique caractérisé par une vitesse orthoradiale $u_\theta = \Gamma/2\pi r$.
Tracer l'évolution de la particule au cours du temps (position et orientation). 1pt

$$\begin{array}{c} \uparrow u_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \\ \bullet \xrightarrow{r} \downarrow 1 \end{array}$$

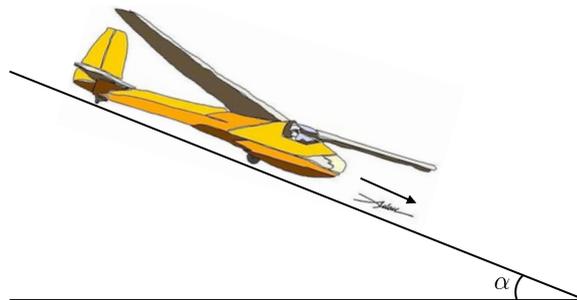
4. On considère une onde de surface de longueur d'onde λ dont la vitesse de phase se déplace vers la droite. Le fluide est supposé parfait (comme dans le calcul présenté en cours).
Tracer l'évolution des trois particules au cours du temps (position et orientation). 1pt



5. Une sphère est placée dans un écoulement uniforme à grand nombre de Reynolds.
Tracer l'évolution des trois particules au cours du temps (position et orientation). 1pt

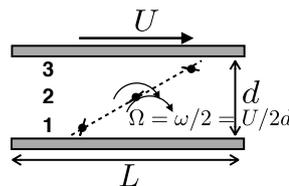


6. On laisse rouler un planeur sur une route inclinée. On suppose que le planeur pèse 500 kg, que la surface totale des ailes est de 11 m^2 (chaque aile a une longueur d'environ 7 m pour une largeur de 0.8 m). Les ailes ont un coefficient de traînée $C_x = 0.015$ et un coefficient de portance $C_p = 0.6$.
Quelle doit-être la pente α de la route pour que le planeur décolle si on néglige l'effet des forces aérodynamiques sur la cabine et la friction des roues ? 1pt



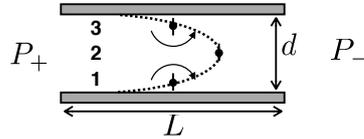
Solution:

1. Écoulement de Couette. Les particules tournent sur elles-mêmes (écoulement avec vorticité).



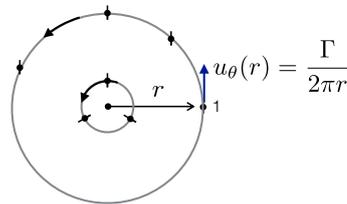
$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial y} = \eta \frac{U}{d}$$

2. Écoulement de Poiseuille > Les particules tournent sur elles-mêmes sauf sur l'axe de symétrie.

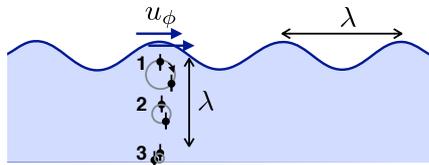


$$U \sim \frac{\Delta P}{L} \frac{d^2}{\eta}$$

3. Vortex irrotationnel (sauf en son cœur). Les particules ont une trajectoire circulaire mais ne tournent pas sur elles-mêmes.

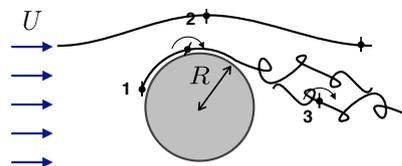


4. Ondes de surface. Calcul fait en cours avec un écoulement potentiel (donc sans vorticité). Les particules font des ronds sans tourner sur elles-mêmes. L'amplitude des ronds décroit exponentiellement avec la profondeur sur une profondeur caractéristique λ



5.  coulement autour d'un obstacle à grand Re . Loin de l'obstacle écoulement laminaire (donc irrotationnel). Les particules 2 se déplacent sans tourner sur elles-mêmes.

Près de la paroi, on a une couche limite visqueuse (donc avec de la vorticité). Les particules 1 tournent sur elle-mêmes. Cette couche limite se déstabilise derrière l'obstacle pour donner lieu à un sillage turbulent. Dans ce sillage turbulent les position et orientation des particules fluctuent au cours du temps.



6. Pour que le planeur décolle, il faut que la force de portance dépasse $mg \cos \alpha$, soit $\frac{1}{2} \rho_{air} U^2 S_{aile} C_p > mg \cos \alpha$. En même temps il roule grâce à son poids qui compense la force de traînée : $mg \sin \alpha = \frac{1}{2} \rho_{air} U^2 S_{aile} C_x$. Pour que le planeur décolle il faut donc assurer $\tan \alpha > C_x / C_p = 1/40$ soit une pente de 2.5%.

Partie B (12 points)

Durée 1h30, document autorisé : 1 feuille A4 recto verso manuscrite.
Calculatrice autorisée.

1. Train à pédales (3pts)

Sachant qu'une personne en forme peut développer une puissance $P_1 \sim 150 \text{ W}$, on se demande quelle serait la vitesse d'un train caréné transportant N passagers.

Commençons par un "train" à une place, le *vélo torpille* construit dans les années 1910 par Bunau-Varilla. Ce véhicule est constitué d'un vélo normal entouré d'un carénage permettant de réduire la traînée aérodynamique (Fig. 1). On suppose que la section frontale du carénage est un cercle de rayon $R \simeq 0.4 \text{ m}$, conduisant à une section $S \simeq 0.5 \text{ m}^2$. On supposera également que le carénage a un coefficient de traînée $C_x \simeq 0.25$.

- 1. Quelle est la force de traînée exercée sur le véhicule (qui se déplace à plusieurs km/h) ? Quelle est la puissance correspondante ? En déduire la vitesse atteinte par une personne standard sur une piste horizontale si elle n'est limitée que par sa traînée aérodynamique. **1pt**



FIGURE 1 – *Vélo torpille* mis au point dans les années 1910 par Bunau-Varilla qui battit les records de vitesse de l'époque.

Considérons à présent un train à pédales de N cyclistes construit sur le même format (cyclistes alignés les uns derrière les autres).

- 2. Si on ne prend pas en compte la friction dans la couche limite le long de la carrosserie, comment évolue la vitesse avec le nombre N de cyclistes ? En particulier, quelle serait la vitesse avec $N = 8$? **1pt**

- 3. L'estimation précédente est en réalité optimiste. La longueur du train augmentant avec le nombre de passagers, la traînée de couche limite contribue également à limiter la vitesse. On supposera que cette longueur vaut NL_0 avec $L_0 \sim 1 \text{ m}$. Si on décrit la couche limite par le modèle de Blasius (comme dans le cours) et que l'on néglige à présent la traînée de forme liée à

la section frontale du train, comment s'écrit la force de traînée exercée sur le train en fonction de sa longueur? En déduire l'évolution de la vitesse du train avec le nombre de passagers (en réalité la couche limite devient rapidement turbulente conduisant à une traînée de couche limite bien plus élevée). **1pt**

Solution:

1. $P_1 = \frac{1}{2} C_x S \rho_{air} U^2 \times U$

D'où $U_1 \simeq 50 \text{ km/h}$.

2. Même calcul, mais avec $P_N = NP_1$.

$U_N = U_1 N^{1/3}$, soit $U_N = 13.4 N^{1/3} \text{ m/s}$. Avec 8 passagers, on devrait donc arriver à 100 km/h

3. La force de traînée est à présent de la forme : $T \sim 2\pi R (\eta \rho N L_0)^{1/2} U^{3/2}$

On en déduit : $U^{5/2} \sim \frac{NP_1}{2\pi R (\eta \rho N L_0)^{1/2}}$, soit $U \sim \left(\frac{P_1}{2\pi R}\right)^{2/5} \frac{N^{1/5}}{(\eta \rho L_0)^{1/5}}$, $U \sim 46 N^{1/5} \text{ m/s}$

Les deux modes de dissipation seraient du même ordre pour $13.4 N^{1/3} \sim 46 N^{1/5}$, soit $N \sim (46/13.4)^{15/2} = 10000$. D'où la remarque sur la couche limite qui devient turbulente.

2. Spin-coating (5pt)

Vous avez peut-être découvert lors d'un projet en microfluidique la technique de *spin-coating* qui permet de déposer un film mince d'épaisseur contrôlée sur une surface plane. Au cours de ce processus, l'opérateur dépose une flaque du fluide à étaler sur un substrat qui est animé d'un mouvement de rotation. La flaque s'étale rapidement et forme un film dont l'épaisseur diminue progressivement au cours du temps, l'excès de liquide étant éjecté sous forme de gouttelettes. Une fois que l'épaisseur obtenue a atteint la valeur désirée, le film est généralement séché ou réticulé sous UV afin de le figer.

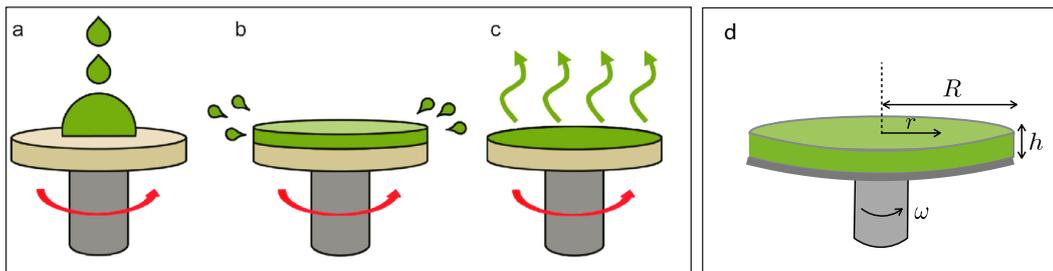


FIGURE 2 – Processus de *spin-coating* : une flaque est déposée sur un disque plan animé d'un mouvement de rotation. a : étalement de la flaque par centrifugation. b : amincissement progressif du film mince. c : séchage/réticulation. d. Grandeurs caractéristiques du problème : on considère un film d'épaisseur h (qui *a priori* peut dépendre de r et de t) posé sur un disque de rayon R et centrifugé à une vitesse de rotation ω .

La première phase d'étalement de la goutte conduit rapidement à un film d'épaisseur uniforme h_0 . On se focalise sur la phase d'amincissement progressif qui conduit à un film mince d'épais-

seur locale $h(r, t)$.

- 4. Donner l'expression de l'accélération centrifuge à une position r donnée. Dans l'hypothèse d'un écoulement à bas nombre de Reynolds, quel est en loi d'échelle le lien entre la vitesse radiale $u_r(r)$ moyennée dans l'épaisseur du film et la vitesse angulaire de rotation ω ? **1pt**

- 5. Toujours en loi d'échelle, quel est le débit $q(r)$ à travers un ruban de rayon r et d'épaisseur $h(r)$?

Appliquer la conservation du débit pendant un temps dt sur un anneau de largeur dr pour en déduire une relation entre $\partial q/\partial r$ et $\partial h/\partial t$. **2pts**

- 6. En déduire une équation différentielle qui régit l'évolution de $h(r, t)$. Montrer qu'il existe une solution où h est uniforme. Donner son évolution en fonction du temps.

L'expérience montre qu'aux temps longs, l'évolution de l'épaisseur du film varie comme $1/t^{1/2}$. Est-ce compatible avec votre calcul? **2pt**

Solution:

- 4. On a une accélération centrifuge $r\omega^2$ qui induit un écoulement centrifuge. Dans la direction e_r , on a donc $\eta\Delta u_r \sim \rho r\omega^2$, ce qui conduit à

$$\eta \frac{u_r}{h^2} \sim \rho r\omega^2$$

- 5. Pour avoir le débit total, on intègre u_r sur $r dz$:

$$q(r) \sim 2\pi r u_r h \sim \frac{\rho h^3 r^2 \omega^2}{\eta}$$

- On fait un bilan de flux sur un anneau de largeur dr et pendant dt :

$$(q(r + dr) - q(r)) dt = -2\pi r dr dh$$

Ce qui conduit à :

$$\frac{\partial q}{\partial r} = -2\pi r \frac{\partial h}{\partial t}$$

- 6. On remplace $q(r)$ par son expression, ce qui conduit à :

$$\frac{\rho\omega^2}{\eta} h^3 \sim -\frac{\partial h}{\partial t}$$

On a une solution à h uniforme de la forme :

$$\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2} \sim \frac{\rho\omega^2}{\eta} t$$

On peut intégrer :

$$h \sim \frac{h_0}{\left(1 + \frac{\rho\omega^2 h_0^2}{\eta} t\right)^{1/2}}$$

Donc pour $t \gg \frac{\eta}{\rho\omega^2 h_0^2}$,

$$h \rightarrow \frac{1}{\omega} \left(\frac{\eta}{\rho t}\right)^{1/2}$$

3. Nappes liquides (4 pts)

Vous avez certainement observé en faisant la vaisselle que l'impact d'un jet d'eau sur une petite surface plane conduit à la formation d'une nappe liquide (Fig. 3). Ce phénomène a été étudié par Félix Savart en 1833, puis repris plus récemment.

On considère un jet laminaire de rayon $R_i = 1.5$ mm impactant un disque de 3 mm de rayon. La vitesse du jet U_i , uniforme sur une section, est de l'ordre du mètre par seconde. On observe alors une nappe dont le rayon R stationnaire augmente avec U_i .

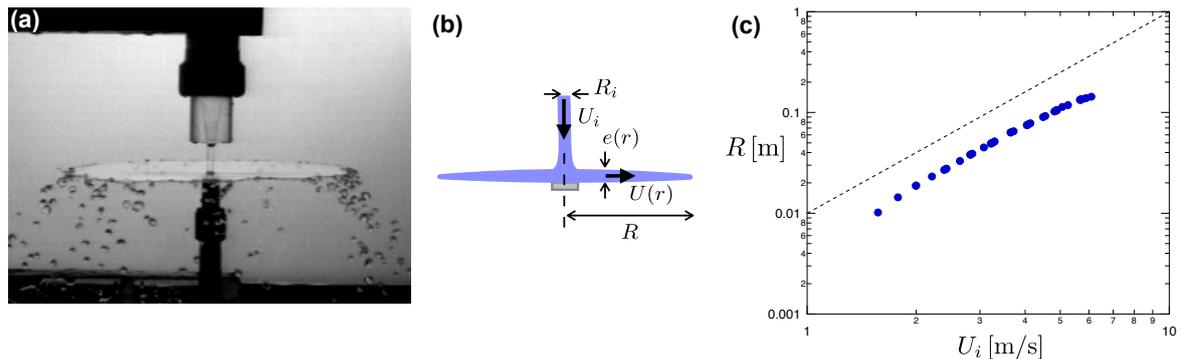


FIGURE 3 – **a.** Jet d'eau de 1.5 mm de rayon impactant un disque d'environ 3 mm de rayon à une vitesse de 4 m/s. **b.** Schéma de l'expérience. **c.** Évolution du rayon de la nappe R avec la vitesse U_i (échelle log-log).

- 7. Quel est l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds basé sur le rayon du jet ? Quelle relation classique peut-on utiliser (en supposant que l'écoulement ne devienne pas turbulent) ?

0.5pt

- 8. Si on néglige les effets de la tension de surface au niveau du jet, quelle est la pression dans le jet ?

De même, quelle est la pression dans la nappe liquide ?

En utilisant la "relation classique" déterminer la vitesse $U(r)$ dans la nappe. **1pt**

- 9. Comment varie l'épaisseur de la nappe $e(r)$ en fonction du rayon ? **1pt**

- 10. Au bord de la nappe, un bourrelet se forme et des gouttes s'en détachent ce qui permet d'assurer une conservation du débit (car le rayon est stationnaire). Si on suppose que le rayon de courbure au bord de la nappe est égal à $e(R)/2 \ll R$, quelle est la pression dans la nappe au voisinage de ce bord ?

On suppose également que la vitesse du liquide s'annule au bord de la nappe. En déduire l'expression attendue pour la dépendance du rayon de la nappe R avec la vitesse d'impact.

Cette relation est-elle compatible avec les données expérimentales ? **1.5pt**

Solution: - 7. $Re = \rho U_i R_i / \eta \sim 10^3 \gg 1$. On peut utiliser le théorème de Bernoulli.

- 8. La pression à la surface du jet vaut P_{atm} et on néglige les effets de tension de surface.

La pression dans le jet vaut donc également P_{atm} . De même pour la pression dans la nappe.

Selon Bernoulli la vitesse est la même dans le jet et dans la nappe donc quelque soit r , $U(r) = U_i$.

- 9. Par conservation du débit, on a $\pi R_i^2 U_i = 2\pi r e(r) U_i$, soit $e(r) = R_i^2 / 2r$.

- 10. La pression à l'intérieur du bourrelet est vaut $P_{atm} + 2\gamma / e(R)$. On en déduit $\frac{1}{2}\rho U_i^2 = 2\gamma / e(R) = 2\gamma 2R / R_i^2$, soit $R = \frac{\rho U_i^2}{8\gamma} R_i^2$. Ce qui est bien compatible avec la pente 2 en log-log.

Groupe option

Durée 45min, document autorisé : 1 feuille A4 recto verso manuscrite.
Calculatrice autorisée.

En complément de la partie A (2 pts)

1. Vous avez déjà répondu à la question suivante :
On considère un écoulement axisymétrique caractérisé par une vitesse orthoradiale $u_\theta = \Gamma/2\pi r$.
Tracer l'évolution de la particule au cours du temps (position et orientation).

$$\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{r} \uparrow u_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \\ \downarrow 1 \end{array}$$

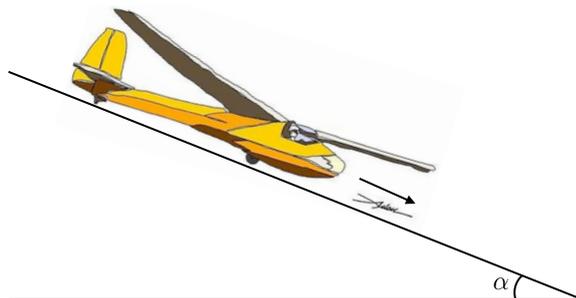
Nouvelle question :

Comment évolue l'écoulement au voisinage de $r = 0$ au cours du temps? Quelle est la trajectoire d'une particule près du centre (position et orientation)? **1pt**

2. De même, vous avez déjà répondu à la question suivante :
On laisse rouler un planeur sur une route inclinée. On suppose que le planeur pèse 500 kg, que la surface totale des ailes est de 11 m^2 (chaque aile a une longueur d'environ 7 m pour une largeur de 0.8 m). Les ailes ont un coefficient de traînée $C_x = 0.015$ et un coefficient de portance $C_p = 0.6$.
Quelle doit-être la pente α de la route pour que le planeur décolle si on néglige l'effet des forces aérodynamiques sur la cabine et la friction des roues?

Nouvelle question :

Quel effet faudrait-il ajouter? Pourquoi les ailes des planeurs sont-elles particulièrement élancées? **1pt**



Solution:

1. La ligne singulière va s'épaissir au cours du temps selon une loi de type diffusion qui conduit à un cœur de taille $\sim (\nu t)^{1/2}$ qui tourne en bloc (diffusion de la vorticité).

2. On a vu en cours d'option que des tourbillons étaient émis au bout des ailes, ce qui contribue à une dissipation supplémentaire, la traînée induite. Le coefficient de traînée induite est de l'ordre de $C_i \sim \frac{C_p^2}{\pi L/\ell} \sim 0.01$ qui est loin d'être négligeable par rapport à C_x . C'est pourquoi on a tout intérêt à avoir L/ℓ le plus élevé possible.

Vitraux (8 pts)

Vous avez peut-être entendu cette légende sur les vitraux qui s'écoulent au cours du temps. Cette hypothèse est-elle réaliste ?

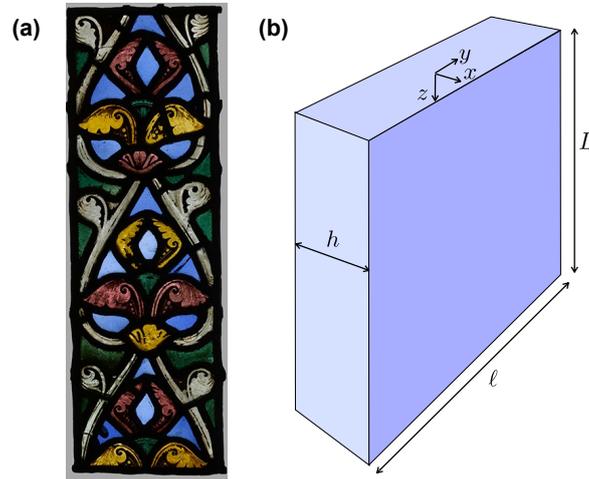


FIGURE 4 – **a.** Détail de vitrail du XIIe siècle (musée de Cluny). **b.** Schéma de la configuration considérée.

Afin de donner un ordre de grandeur des vitesses d'écoulement, on se propose de modéliser un verre de vitrail comme une plaque de liquide visqueux, de longueur L et d'épaisseur et de largeur initiales h_0 et ℓ_0 uniformes, suspendue par son bord supérieur (Fig. 4). On suppose que la plaque peut glisser latéralement sur son bord d'attache (c'est à dire que $u_z(z=0) = 0$ alors que les directions selon x et y sont libres).

On rappelle l'expression du tenseur des contraintes visqueuses en coordonnées cartésiennes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p + 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} & \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & -p + 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} & \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & -p + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

3. Oublions l'effet de la gravité et supposons que la plaque liquide est étirée vers le bas par une force F appliquée à son bord inférieur. Quelle composante de la contrainte faut-il considérer dans cette configuration ? Quelle doit être en loi d'échelle l'intensité de la force pour animer le bord inférieur d'une vitesse U ? **0.5 pt**

4. On peut faire mieux qu'une loi d'échelle et trouver le préfacteur (si vous n'y arrivez pas, passez directement à la question 7 et continuez en oubliant le préfacteur). Pour cela on va supposer que $u_x(x)$ ne dépend que de x , $u_y(y)$ que de y et $u_z(z)$ que de z . Les directions x et y jouent le même rôle, de sorte que $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$. Que vaut la contrainte $\sigma_{xx}(x = \pm h/2)$? En déduire la valeur de la pression p dans la

plaque liquide. **0.5 pt**

5. Quel est le lien entre $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ et $\frac{\partial u_x}{\partial x}$? **0.5 pt**
6. Quelle est la contrainte σ_{zz} appliquée au fluide soumis à un étirement $\frac{\partial u_z}{\partial z}$?
Si on retranche l'effet de la pression atmosphérique qui s'applique de l'autre côté de la main de l'opérateur, quelle est la force avec le bon préfacteur nécessaire pour imposer un taux d'extension $\frac{\partial u_z}{\partial z}$? **1 pt**
7. À présent, nous n'avons plus d'opérateur, mais la plaque est étirée par son propre poids. Dans ce cas, le taux de déformation dépend de z . À quelle charge la section supérieure de la plaque $S_0 = S(z = 0, t = 0)$ est-elle soumise? on exprimera cette charge en fonction de la section initiale du film S_0 . **0.5 pt**
8. En déduire l'expression de $\frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=0}$ et de $\frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{z=0}$ à $t > 0$. **1 pt**
9. Que valent les vitesses $u_x \left(x = \frac{h}{2}, z = 0 \right) = \frac{1}{2} \frac{dh}{dt}$ et $u_y \left(y = \frac{\ell}{2}, z = 0 \right) = \frac{1}{2} \frac{d\ell}{dt}$? **1 pt**
10. En déduire l'évolution de la surface supérieure $S(t) = h\ell$. **1 pt**
11. En constatant que les variations relatives de h et ℓ sont identiques ($(1/h)dh/dt = (1/\ell)d\ell/dt$), on en déduit que $S = h\ell = h^2\ell_0/h_0$ (résultat que l'on pourra admettre). Déduire de la question précédente l'évolution de $h(t)$. **1 pt**
12. Combien de temps faut-il attendre pour observer un amincissement relatif de 1% en haut de la plaque?
La viscosité effective du verre est extrêmement élevée à température ambiante, $\eta \sim 10^{19}$ Pa.s. Quelle serait l'application numérique pour une plaque de 10 cm de long et une densité de l'ordre de 2.10^3 kg/m³? Les vitraux coulent-ils à des échelles de temps humaines? **1 pt**

Solution:

3. D'après l'expression du tenseur de contraintes, on a $F/h\ell \sim \eta \frac{\partial u_z}{\partial z} \sim \eta \frac{U}{L}$.
4. On se retrouve avec $\sigma_{xx} = -p_{atm} = -p + 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x}$.
5. On utilise $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ et le fait que $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$ pour en déduire $\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial z}$.
6. $\sigma_{zz} = -p + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} = -p_{atm} - 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} = -p_{atm} + 3\eta \frac{\partial u_z}{\partial z}$.
On retrouve la loi de Trouton, $\sigma_{zz} + p_{atm} = F/h\ell = 3\eta \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

7. La charge est simplement la masse de liquide entre 0 et L : $\rho g S_0 L_0$.

$$8. \left. \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{z=0} = -2 \left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_{z=0} = \frac{1}{3\eta} \frac{\rho g S_0 L_0}{h\ell}.$$

$$9. u_x(x = h/2, z = 0) = -\frac{1}{12\eta} \frac{\rho g S_0 L_0}{\ell} = \frac{1}{2} \frac{dh}{dt}$$
$$u_y(x = \ell/2, z = 0) = -\frac{1}{12\eta} \frac{\rho g S_0 L_0}{h} = \frac{1}{2} \frac{d\ell}{dt}$$

$$10. \frac{dS}{dt} = h \frac{d\ell}{dt} + \ell \frac{dh}{dt} = -\frac{\rho g S_0 L_0}{3\eta} \Rightarrow S(t) = S_0 - \frac{\rho g S_0 L_0}{3\eta} t$$

$$11. S(t) = h^2 \frac{\ell_0}{h_0} = h_0 \ell_0 - \frac{\rho g h_0 \ell_0 L_0}{3\eta} t \Rightarrow h(t) = h_0 \sqrt{1 - \frac{\rho g L_0}{3\eta} t}$$

$$12. \text{ Pour un amincissement relatif de 1\%, on a } 0.01 = \frac{h_0 - h(t)}{h_0} \simeq \frac{\rho g L_0}{6\eta} t, \text{ soit}$$

$$t \simeq 0.01 \frac{6\eta}{\rho g L_0}$$

AN : $t \sim 3 \times 10^{14} \text{ s} = 10^7 \text{ ans}$. On ne risque pas d'observer les vitraux couler à température ambiante...