

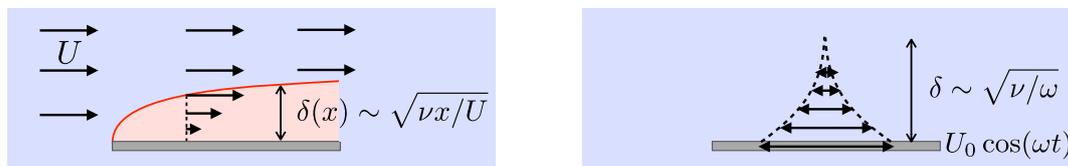
Couches limites (option)

À retenir:

La viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ est le coefficient de diffusion de la quantité de mouvement (et de la vorticité).

Dans un écoulement oscillant à la pulsation ω , l'épaisseur de couche limite est, en ordre de grandeur $\sqrt{\nu/\omega}$.

L'épaisseur d'une couche limite en écoulement stationnaire sur une plaque plane varie comme $\sqrt{\nu x/U}$.



Rappel sur les couches limites

Nous avons vu qu'un écoulement laminaire (c'est-à-dire non turbulent) pouvait être décrit à grand nombre Reynolds comme un fluide parfait. Cependant un fluide réel possède une viscosité finie et cette hypothèse n'est plus valable au voisinage d'une paroi. Dans le TD sur les couches limites, nous avons décrit la transition, la couche limite, entre un écoulement visqueux près d'une paroi et un écoulement potentiel loin de la paroi. L'épaisseur de cette couche suit une loi de diffusion avec comme coefficient la viscosité cinématique ν du fluide.

Couche limite sur un plan oscillant.

Mesure de la viscosité de l'hélium liquide.

Reprenons le problème de Stokes (plaque tirée au fond d'un bassin), mais avec un mouvement oscillant de la plaque qui impose $u_x(0) = U \cos(\omega t)$. On cherche alors des solutions périodiques en temps de la forme $u = U \operatorname{Re}[\exp(i\omega t)F(y)]$.

Quelle est l'expression de F ?

Sur quelle distance les oscillations de la vitesse se font-elles sentir?

Quelle est la contrainte de cisaillement sur la paroi?

Nous avons étudié dans le TD sur les écoulements visqueux les viscosimètres de type Couette, cône-plan et Poiseuille. Ces appareils ne sont pas les plus commodes pour mesurer des petites viscosités comme celles des gaz ou des liquides cryogéniques comme l'hélium. Une méthode plus adaptée consiste à mesurer l'amortissement du mouvement oscillant d'un pendule de torsion muni de disques pour augmenter la surface de friction du fluide environnant (Maxwell 1866 pour mesurer la viscosité de l'air, Keesom et McWood en 1938 pour l'hélium liquide). Considérons la dynamique d'un disque oscillant de rayon R , d'épaisseur e et de masse volumique ρ_s . Sa position angulaire $\theta(t)$ obéit à l'équation de la dynamique $J\ddot{\theta} = \Gamma$ où Γ est le

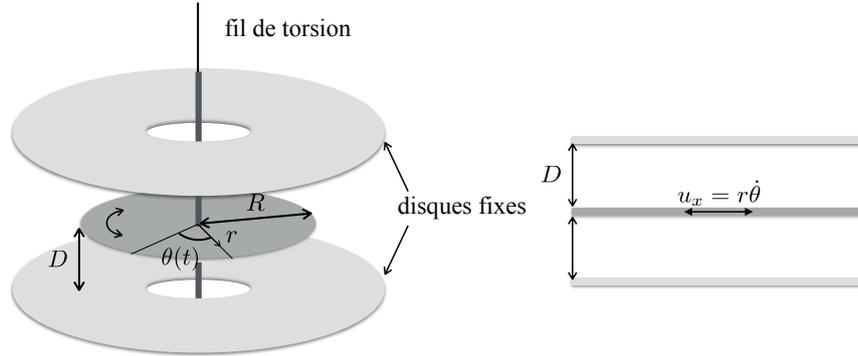


Figure 1: Schéma du viscosimètre à disques oscillants. Un ensemble de disques (rayon R) est suspendu à un fil de torsion. Des disques fixes sont intercalés entre les disques fixes, la distance entre disques étant égale à D . À droite, approximation bidimensionnelle du système: une plaque oscille dans son plan avec une plaque fixe située à une distance D .

couple appliqué sur le disque et $J = \pi R^4 \rho_s / 2$ est le moment d'inertie. Le couple a une partie de rappel élastique $-k\theta$ et une partie due au couple résultant des contraintes visqueuses sur le disque. En l'absence de friction visqueuse, la fréquence d'oscillation du disque est $\sqrt{k/J}$ et on peut écrire la position angulaire sous la forme $\theta = A \sin \omega t$. Avec de la friction visqueuse, l'amplitude d'oscillation va diminuer avec le temps.

La position angulaire du disque est décrite par l'équation:

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -k\theta - \Gamma_v$$

où Γ_v est le couple lié à la friction du fluide sur la plaque.

Quelle est l'expression générale de Γ_v ?

Expliciter cette expression dans les cas où l'épaisseur de couche limite est petite ou grande par rapport à l'espacement entre les plaques fixes. Afin de simplifier les calculs, on effectuera une approximation bidimensionnelle du système (valable si l'épaisseur de couche limite δ ou l'espacement entre disques D est petit devant R).

L'équation de la rotation du disque se ramène à:

$$\ddot{\theta} + \sigma \dot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

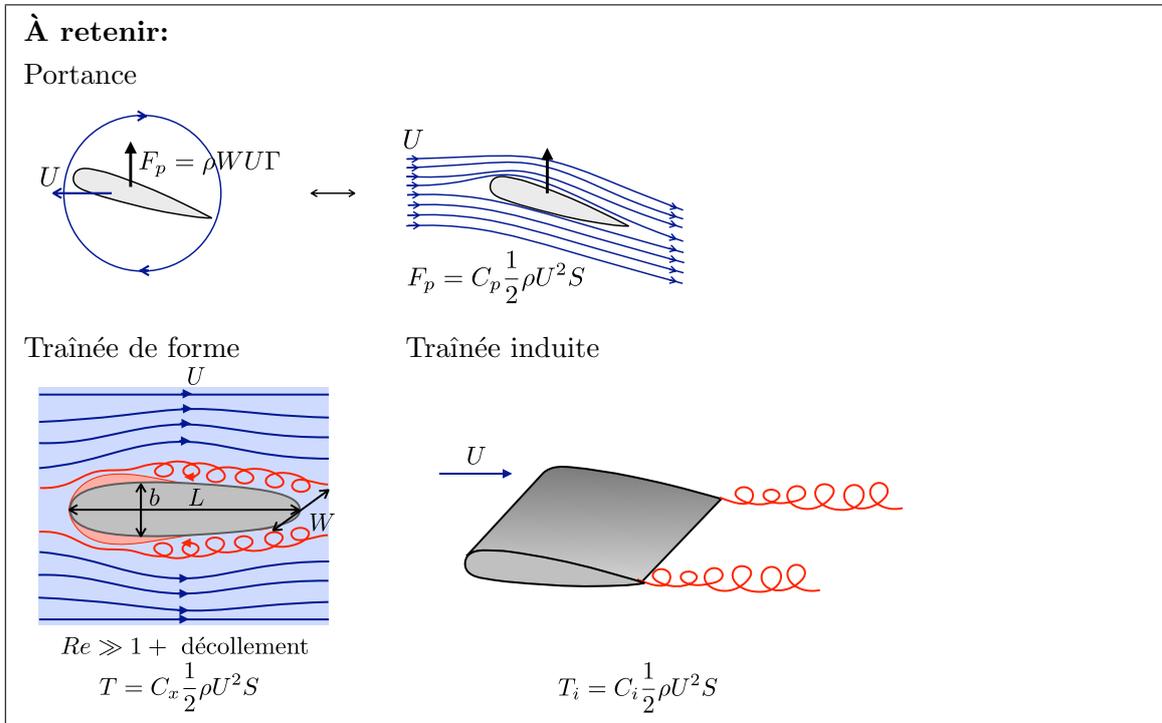
Dans le cas d'un amortissement faible ($\sigma \ll \omega$), les solutions sont de la forme:

$$\theta(t) = A_0 \exp(-t/\tau) \sin(\omega^* t + \phi) \quad \text{avec} \quad \tau = 2/\sigma \quad \text{et} \quad \omega^* = \omega \sqrt{1 - \sigma^2/4\omega^2}$$

Quelles sont les expressions des temps d'amortissement dans les deux cas limites précédemment décrits ?

Dans les expériences de Keesom et McWood sur la viscosité de l'hélium liquide, la période des oscillations est 25 s. Le disque est en cuivre ($\rho_s = 9000 \text{ kg/m}^3$) et son épaisseur est de 0.6 mm. L'espacement entre les disques fixes est de l'ordre de 1 cm. À 2°K, la masse volumique de l'hélium est de 145 kg/m³. Si le temps d'amortissement est de 1300 s, quelle est la viscosité correspondante ?

Ailes et voiles



Rappel: comment faire voler un avion?

Dans le TD sur la portance, nous avons vu comment un vortex de circulation Γ couplé à une vitesse de translation U conduisait à une force de portance. Dans un écoulement à 2D, l'expression de cette force (relation de Kutta-Joukowski) est remarquablement simple:

$$f_p = -\rho \Gamma U$$

f_p étant une force par unité de largeur. En pratique ce vortex est généré par la couche limite autour de l'aile. L'expérience montre que la circulation est proportionnelle à la vitesse et à la "corde" de l'aile ℓ (sa longueur):

$$\Gamma = \frac{1}{2} C_p U \ell$$

où C_p est le coefficient de portance. Ceci conduit ainsi à une **force de portance** de la forme:

$$F_p = \frac{1}{2} C_p \rho U^2 S$$

où S est la surface de l'aile, appelée *surface alaire*.

Déplacer un solide dans un fluide conduit également à une **force de traînée**. À grand nombre de Reynolds, cette force résulte d'une déstabilisation de la couche limite et conduit à une *traînée de forme* qui varie comme U^2 :

$$T = \frac{1}{2} C_x \rho U^2 S$$

Dans la plupart des cas on considère la surface frontale de l'objet, mais pour une aile on utilise comme référence la surface de l'aile, nommée *surface alaire*.

1 Tourbillons marginaux

La morphologie particulièrement élancée des ailes de planeurs ou des albatros est frappante (Fig. 2). Une telle géométrie est elle particulièrement performante?



Figure 2: Planeur et albatros. On remarquera l'élancement remarquable de leurs ailes.

L'écoulement autour d'une aile d'envergure finie est plus complexe que la description 2D que nous avons jusqu'à présent évoquée. En effet, le théorème de Kelvin (voir notes de cours sur les écoulements potentiels) nous indique que la circulation créée par la friction du fluide sur l'aile ne peut pas s'arrêter au bout de l'aile. Cette circulation est ainsi prolongée par deux lignes de tourbillons marginaux émises en bout d'aile. Si ces tourbillons ne se dissipent pas, ils formeraient une boucle fermée en rejoignant le tourbillon opposé à la circulation autour des ailes produit lors de la mise en mouvement de l'aile (voir notes de cours sur la portance et la traînée). La production de ces tourbillons marginaux conduit à une nouvelle forme de traînée, la traînée induite qui est importante dans tous les problèmes d'ailes.

Supposons que la circulation dans les tourbillons induits soit la même qu'autour de l'aile $\Gamma = \frac{1}{2}C_p U \ell$.

Quelle est l'énergie cinétique par unité de longueur contenue dans cette paire de tourbillons? (pour éviter des problèmes de divergence, nous utiliserons des "longueurs de coupure" pour l'intégration à ℓ pour les petites longueurs et L pour les grandes).

En déduire une expression pour la force de traînée induite T_i (qui va s'ajouter à la traînée de forme que nous avons déjà décrite).

Un calcul plus rigoureux qui prend en compte une répartition non uniforme de la circulation autour de l'aile conduit à l'expression classique:

$$T_i = C_i \frac{1}{2} \rho U^2 L \ell \quad \text{avec} \quad C_i = \frac{C_p^2}{\pi e L / \ell}$$

où e est un facteur d'efficacité qui dépend du détail de la forme de l'aile ($e = 1$ pour un profil optimal).

Commenter la pertinence d'une aile élancée pour un planeur (une valeur typique pour un planeur performant est de $L/\ell \sim 25$).

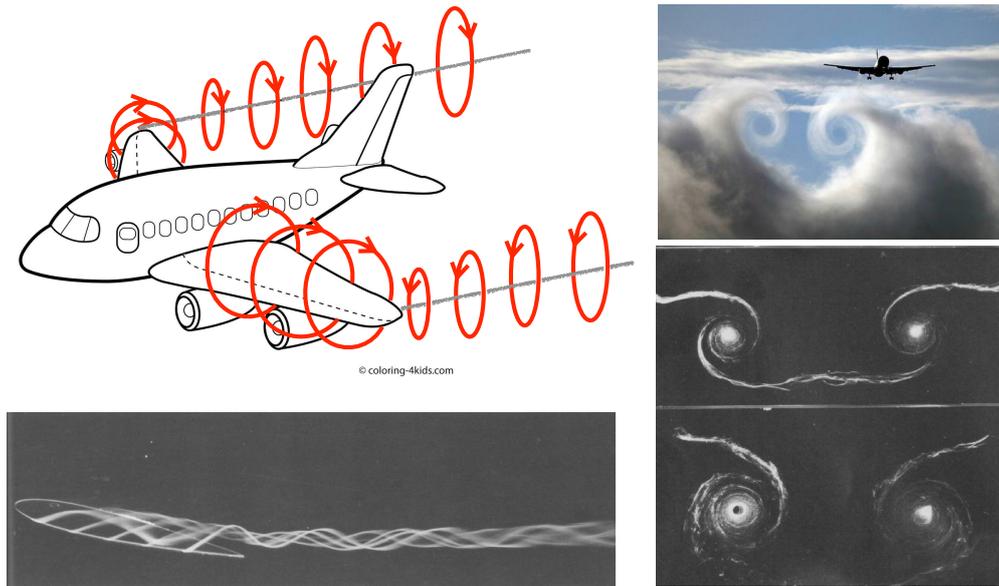


Figure 3: Le vortex créé le long des ailes se poursuit à l'arrière des bouts d'ailes sous la forme de "tourbillons marginaux" qui peuvent être visualisés lorsque l'avion traverse des nuages. On peut également les étudier en laboratoire dans une soufflerie ou comme illustré ici, dans un canal hydraulique (clichés issus de "An album of fluid motion", M. Van Dyke).

2 Comment faire voler une planche à voile ?

Depuis quelques années, on équipe toutes sortes d'engins marins de plans porteurs (foils) afin de remplacer la sustentation archimédienne par une sustentation dynamique. Faire sortir la coque de l'eau permet en effet d'éliminer la traînée de vagues (une autre forme de traînée, spécifique aux corps flottants, liée à la formation de vagues lorsque le corps se déplace à la surface de l'eau). On cherche ici la force de vent minimale pour sustenter une planche à voile équipée de foils. Le plan porteur de ces foils a une envergure de 80 cm, une surface totale de 900 cm², ses caractéristiques de portance et de traînée sont données sur la Fig. 4. Il est monté sur un mât profilé vertical de surface $S_m = 700 \text{ cm}^2$ dont le coefficient de traînée est $C_{dm} = 5 \times 10^{-3}$. La masse totale de la planche est 15 kg. On considèrera un véliplanhiste de 65 kg. La surface de voile S_v est 9 m² et on prend son coefficient de portance égal à $C_p^{\text{voile}} = 1.2$ et de traînée $C_x^{\text{voile}} = 0.2$ lorsqu'elle est bien réglée (à peu près à 20 d'incidence par rapport au vent apparent). On considèrera ici que l'angle de la voile est réglé à 15° de l'axe de la planche, ce qui conduit à un angle d'environ 35° entre le vent apparent et l'axe de la planche. La vitesse U de la planche est typiquement entre 5 et 10 m/s.

Quel est le nombre de Reynolds de l'écoulement autour du foil ?

Estimer la vitesse minimale de la planche pour la faire décoller.

Estimer la vitesse de vent minimale pour décoller si on navigue vent de travers (si la planche se déplace à 90° du vent réel).

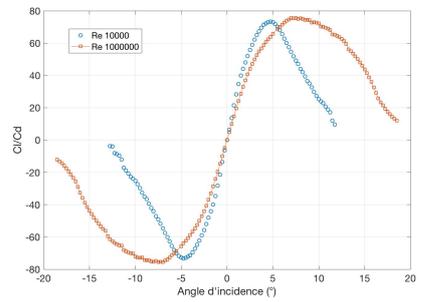
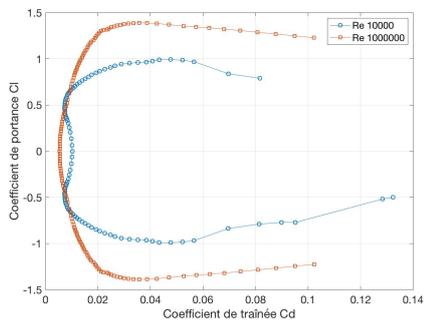
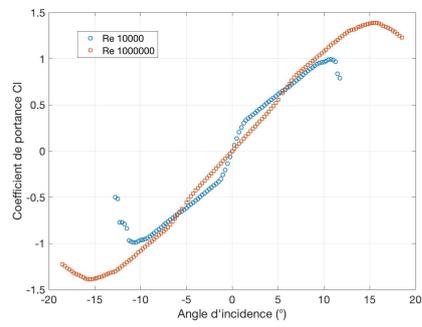


Figure 4: Plans porteurs de planche à voile. Coefficient de portance en fonction de l'angle d'incidence, diagramme portance/trainée et rapport portance sur traînée en fonction de l'angle d'incidence à $Re = 10^4$ et 10^6 .