Écoulements visqueux (option)

À retenir:
Équation de Navier & Stokes (équation de la dynamique pour les milieux continus):

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{u} + \rho\mathbf{f}$$

Conservation de la masse (fluide incompressible):

$$\nabla.\mathbf{u} = 0$$

Contrainte de cisaillement visqueux: $\sigma = \eta\frac{\partial u_x}{\partial z}$ (x // à la paroi, z $\perp$)

Conditions au limites:
- continuité des vitesses, non glissement sur une paroi solide
- continuité des contraintes

Nombre de Reynolds:

$$Re = \frac{\text{inertie}}{\text{viscosite}} = \frac{||\rho\partial\mathbf{u}/\partial t + \rho(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}||}{||\eta\Delta\mathbf{u}||}$$

Si une seule taille caractéristique L et écoulement permanent:

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta}$$

Viscosité dynamique η (en Pa.s), Viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ (en m^2/s)
Eau à 20°: $\eta = 10^{-3}$ Pa.s, $\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$
Miel: $\eta \sim 1$ Pa.s
Air à 20°: $\eta \simeq 1,8.10^{-5}$ Pa.s, $\nu \simeq 1,6.10^{-5}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

Trainée visqueuse sur un corps de taille caractéristique L pour $Re \ll 1$:

$$T \sim \eta U L$$

Pas de propulsion à bas Re si cinématique réversible.

Regarder le film de G.I. Taylor (1967): `https://youtu.be/51-6QCJTAjU`

Rappel sur les contraintes visqueuses.

Dans le premier TD sur les écoulements visqueux, nous avons abordé quelques configurations classiques dans lesquelles le fluide Newtonien était essentiellement cisaillé. Cependant les contraintes visqueuses peuvent également être axiales (en analogie avec les contraintes dans un solide). L'expression générique du tenseur des contraintes en coordonnées cartésiennes est

donné par:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{pmatrix} -p + 2\eta\frac{\partial u_x}{\partial x} & \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & -p + 2\eta\frac{\partial u_y}{\partial y} & \eta\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \eta\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \eta\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) & -p + 2\eta\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dans le cas ultra simple d'un écoulement u_x cisaillé selon z, on retrouve bien $\sigma_{xz} = \eta\frac{\partial u_x}{\partial z}$ (c'est vraiment une des choses à retenir, car les écoulements en cisaillement sont extrêmement courants).

1 Écoulement élongationnel : le filet de miel

Si de nombreuses configurations mettent en jeu du cisaillement, un liquide peut aussi être étiré, tout comme un solide. C'est par exemple le cas pour un filet de miel qui s'écoule sous l'effet de la gravité.
Considérons dans un premier temps une longue colonne cylindrique uniforme de rayon R étirée entre 2 plaques selon son axe z, le tout soumis à la pression atmosphérique ambiante p_{atm} (Fig. 1a).

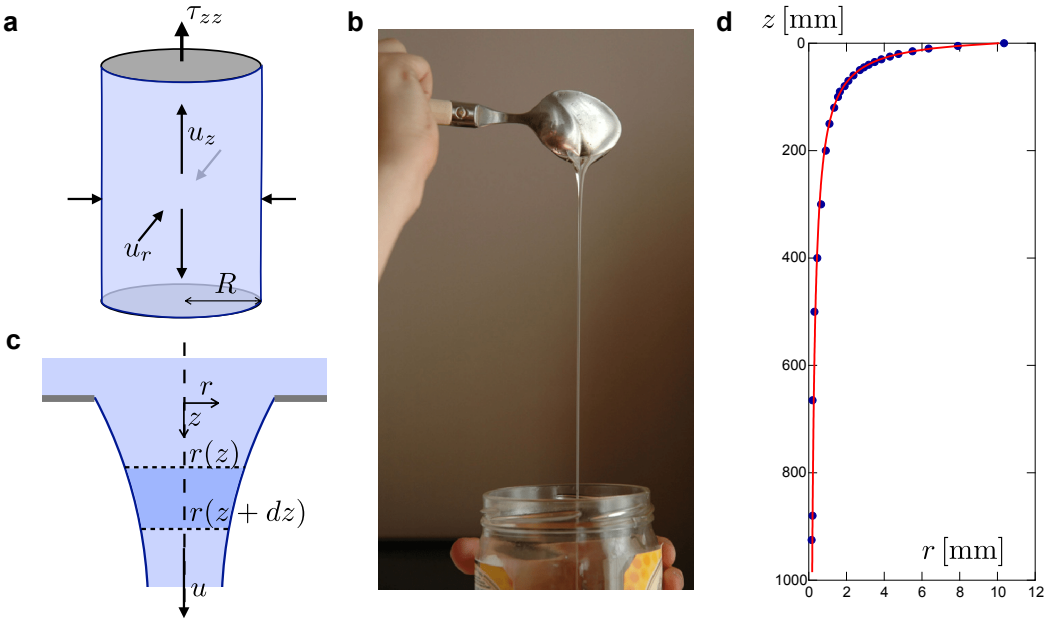

Figure 1: **a.** Élongation d'une colonne de liquide. **b.** Écoulement d'un filet de miel sous son poids (cliché Céleste Villermaux). **c.** Bilan des forces sur une tranche de liquide. **d.** Mesures historiques de Trouton sur du goudron (1906) et ajustement par une hyperbole.

On rappelle l'expression du tenseur des contraintes en coordonnées cylindriques:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{pmatrix} -p + 2\eta\frac{\partial u_r}{\partial r} & \eta\left(r\frac{\partial(u_\theta/r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & \eta\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \\ \eta\left(r\frac{\partial(u_\theta/r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) & -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\right) & \eta\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) \\ \eta\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) & \eta\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) & -p + 2\eta\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ainsi que l'expression de la divergence:

$$\nabla.\mathbf{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

En faisant l'hypothèse que u_r ne dépend que de r et u_z ne dépend que de z, établir à partir de la conservation du volume que:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = A(t)$$

Déterminer la distribution de la vitesse $u_r(r)$
Que vaut la pression à l'intérieur du liquide étiré?
Que risque-t-il de se passer si on tire trop fort?
Quelle contrainte axiale effective $\tau_{zz} = (\sigma_{zz} + p_{atm})$ faut-il appliquer pour induire un taux d'élongation $\partial u_z/\partial z$ donné?

En élasticité linéaire, le module de cisaillement de Lamé est lié au module de Young par la relation: $\mu = E/2(1+\nu)$, où ν est le coefficient de Poisson. Que devient cette relation dans le cas incompressible?
On s'intéresse à présent à la forme d'un filet de miel (Fig. 1b) axisymétrique. On suppose que le filet est continûment alimenté par un débit q, ce qui conduit à un écoulement stationnaire (on néglige l'inertie du fluide ainsi que sa tension de surface). Considérons une tranche d'épaisseur dz. À quelles forces est-elle soumise?
Comment se traduit la conservation du débit?
En déduire l'équation différentielle qui décrit la forme du filet.

La solution de cette équation a été déterminée analytiquement par Trouton en 1906:

$$r(z) = \frac{b}{\sinh\left(\sqrt{\frac{\pi\rho g}{6\eta q}}\, bz\right)}$$

En pratique la constante d'intégration b est petite, si bien que cette solution est très proche d'une hyperbole:

$$r(z) \simeq \sqrt{\frac{6\eta q}{\pi\rho g}}\frac{1}{z}$$

La figure 1d reprend les mesures historiques de Trouton sur un échantillon de goudron ajustées par une hyperbole. Malheureusement l'unité de mesure du débit n'est pas précisée dans l'article original et il est délicat d'extraire la valeur exacte de la viscosité: n'oubliez pas de préciser les unités de mesures en TP!

2 Pincement capillaire

Dans le problème du filet de miel, nous avons négligé les effets de la tension de surface. Cependant l'expérience nous montre que le filet de liquide finit par casser en petites gouttes. Cette instabilité a été décrite par Joseph Plateau et Lord Rayleigh (John William Strutt) au XIXe siècle. Elle résulte du fait qu'une série de gouttes présentent moins de surface qu'un long cylindre.

On se propose d'étudier le pincement capillaire d'un filament liquide maintenu entre deux plaques. Le suivi de ce pincement constitue le principe du "Capillary Breakup Extensional Rheometer" (CaBER) développé au MIT par Gareth McKinley:

`https://en.wikipedia.org/wiki/Capillary_breakup_rheometry`

Du point de vue pratique, un pont capillaire de diamètre typique 6 mm et de hauteur 3 mm est brusquement étiré de manière à obtenir un filament de longueur 10 mm. L'évolution du rayon minimal du filament est suivi au cours du temps à l'aide d'une caméra (Fig. 2).
Pour simplifier le problème, nous négligerons la gravité. Nous supposerons également que la partie étranglée du filament possède une section uniforme et est connectée en haut et en bas à des réservoirs de liquide qui ne subissent que la pression atmosphérique. En particulier nous ne prendrons pas en compte la pression de Laplace engendrée par la courbure des interfaces des réservoirs (ce qui sous-entend que le rayon de la partie pincée est très petit devant celui des réservoirs).

Reprenons les résultats sur le filament étiré décrit dans l'exercice précédent, où nous avons montré que:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = A(t) \quad \text{et} \quad u_r(r) = -\frac{A}{2}r$$

Que vaut à présent la contrainte normale dans la direction radiale σ_{rr} ?
En déduire la valeur de la pression dans le liquide.
À partir de la contrainte longitudinale σ_{zz}, déterminer l'expression de A en fonction des paramètres du problème.
Estimer enfin la dynamique de pincement.
Cette dynamique ne pose-t-elle pas problème lorsqu'on s'approche du point de rupture?
L'évolution observée expérimentalement est-elle conforme au résultat prédit (Fig. 2c)?

3 Se déplacer à bas nombre de Reynolds

Comment se déplacer dans un fluide visqueux?
Une manière évidente consiste à laisser faire la gravité. Dans le premier TD sur les écoulements visqueux nous avons vu que la force de traînée visqueuse sur un objet de taille caractéristique L se déplaçant à une vitesse U variait comme $T \sim \eta LU$ (attention ici on parle de $Re \ll 1$, pour un écoulement à grand nombre de Reynolds n'oubliez pas l'expression de la traînée de forme en ρU^2).
Nous avions en particulier abordé la sédimentation d'une sphère et celle d'une tige. Dans le cas la tige, la force de traînée dépend de la direction de la tige. Si on laisse tomber une tige de longueur L et de rayon a ($a \ll L$) dans un liquide visqueux, nous observons qu'une

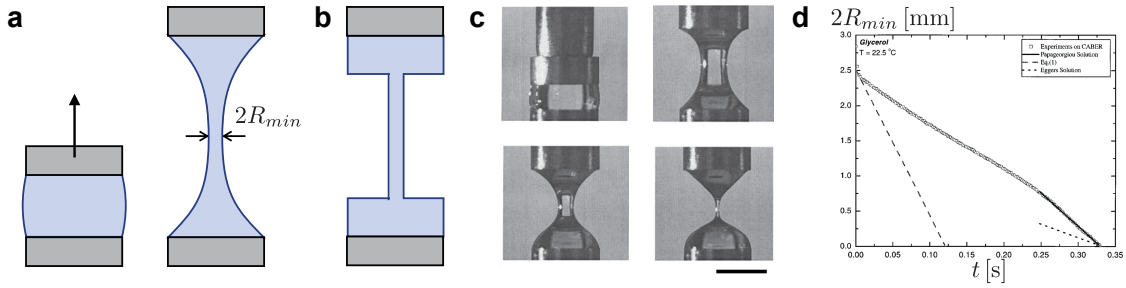

Figure 2: Pincement capillaire. **a.** Un pont capillaire est étiré de manière à réaliser un filament liquide qui est pincé sous l'effet de la tension de surface. **b.** Modèle simplifié d'un filament connecté à 2 réservoirs uniquement soumis à la pression ambiante. **c.** Réalisation expérimentale avec du glycérol ($\eta = 1\,\text{Pa.s}$, $\gamma = 65\,\text{mN/m}$, barre d'échelle 5 mm). **d.** Évolution du rayon minimal du filament au cours du temps (G.H. McKinley & A. Tripathi, *J. Rheol.*, 44, 663 (2000)).

tige verticale tombe pratiquement 2 fois plus vite qu'une tige horizontale (Fig. 3). On peut montrer théoriquement que les forces de traînée s'écrivent de la manière suivante (voir les notes de cours pour les expressions exactes):

$$T_\parallel = c_\parallel \eta U_\parallel L \quad \text{et} \quad T_\perp = c_\perp \eta U_\perp L$$

avec $c_\perp \simeq 2c_\parallel$. En toute rigueur, ces coefficients de friction dépendent du rapport L/a. En pratique, cette dépendance est faible (logarithmique) et nous considèrerons $c_\parallel \sim 2\pi$ pour les estimations d'ordre de grandeur.

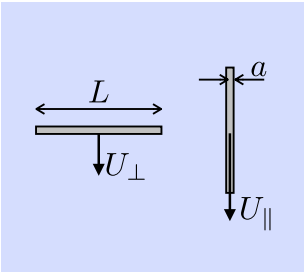

Figure 3: Chute d'une tige: à bas *Re* on observe qu'une tige verticale tombe deux fois plus rapidement qu'une tige horizontale.

Chute d'une hélice

Saviez-vous que de nombreux micro-organismes on développé un mode de nage en tire-bouchon? C'est par exemple le cas d'*Escherichia coli* que l'on retrouve dans notre microbiote intestinal.

Afin de se rapprocher de la nage en tire-bouchon des bactéries, considérons la sédimentation d'une hélice de rayon b et de pas λ. Son axe est orienté verticalement (Fig. 5). La tangente à l'hélice fait un angle α avec la verticale donné par:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{4\pi b^2/\lambda^2 + 1}}$$

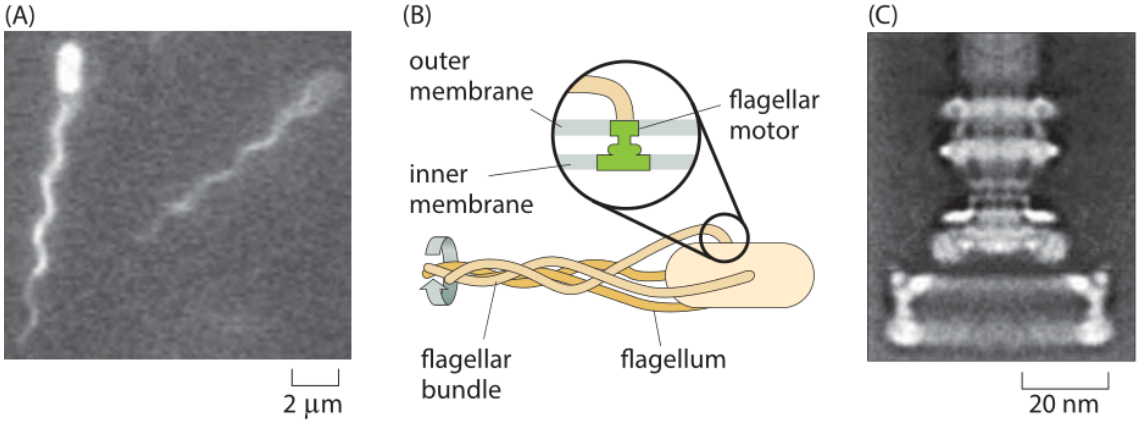

Figure 4: **a.** Exemples de bactéries *Escherichia coli* nageant dans l'eau. **b.** Ce qui ressemble à un filament unique est en réalité un mèche de filaments. **c.** Détail d'un moteur rotatif. Visualisez les films (en particulier celui au ralenti, filmé à 500 Hz) sur: `http://www.rowland.harvard.edu/labs/bacteria/projects/filament.php`.
Source: `http://book.bionumbers.org/what-is-the-frequency-of-rotary-molecular-motors/`

Si on se focalise sur un petit élément dL de l'hélice, sa vitesse va se décomposer en une vitesse verticale U et une vitesse angulaire ω. Afin de résoudre plus simplement le problème, nous décrirons indépendamment ces deux contributions et additionnerons les forces de traînée correspondantes.

Si l'hélice se translate verticalement sans tourner sur elle-même (Fig. 5b), quelles sont les composantes de la force de traînée dT_z et dT_θ qui s'appliquent à l'élément dL?
Considérons à présent le rôle de la rotation (Fig. 5c). Quelles sont les composantes dT_z et dT_θ dues à la vitesse $b\omega$?
Si l'hélice ne tombe que sous son propre poids, que vaut la traînée globale dT_θ?
En déduire la relation entre U et ω.
Quelle est alors l'expression de la force de traînée globale agissant sur l'hélice?
À quelle vitesse l'hélice sédimente-t-elle?

4 Propulsion (à bas nombre de Reynolds)

À notre échelle, nager à nombre de Reynolds modéré reviendrait à nager dans un liquide 10 000 fois plus visqueux que l'eau. Difficile à imaginer! En absence d'inertie, l'écoulement a une propriété de réversibilité cinématique, ce qui conduit au fameux "scallop theorem" de Purcell (Fig. 6a). Si nous supposons que le bivalve se déplace d'une certaine quantité en fermant sa coquille, à bas Reynolds il se déplacera exactement de la même quantité opposée en la rouvrant. En résumé, une cinématique symétrique (par renversement du temps) ne peut conduire à un déplacement.

Les micro-organismes ont ainsi développé d'autres stratégies pour nager. Certains font propager une vague le long d'un flagelle, comme dans le cas des spermatozoïdes. La bactérie

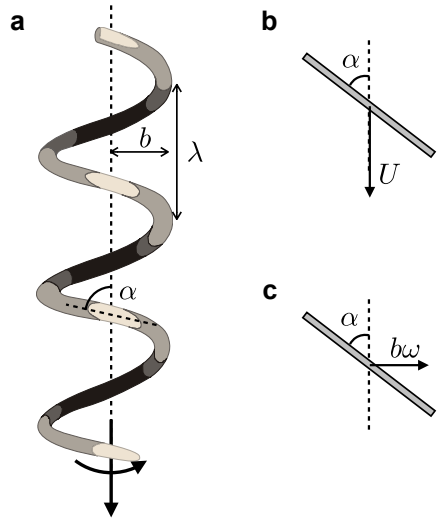

Figure 5: **a.** Sédimentation d'une hélice de rayon b et de pas λ. Sa tangente fait un angle α avec la verticale. **b.** Contribution de la vitesse verticale. **c.** Contribution de la vitesse angulaire.

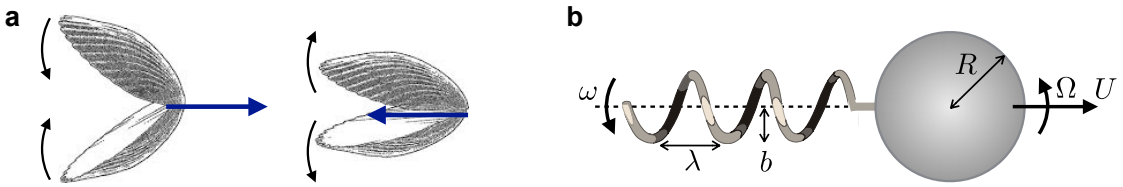

Figure 6: **a.** Théorème de la coquille Saint Jacques: en régime visqueux une cinématique symétrique ne peut conduire à un déplacement (dessin repris de Qui *et al.*, *Nat. Comm.*, **5** 5119 (2014)). **b.** Nage en tire bouchon adoptée par E. coli (en réalité c'est un peu plus compliqué car plusieurs filaments sont associés dans l'hélice).

E. coli est championne en nage “tire-bouchon”. Le principe est simple: si la chute d’une hélice entraîne sa rotation, sa rotation ne devrait-elle pas entraîner un déplacement?

Que se passerait-il si on était capable d’appliquer une vitesse angulaire ω au filament (avec un champ magnétique par exemple) en oubliant l’effet de la gravité?
Dans le cas de la bactérie, supposons que la vitesse de rotation de l’hélice ω soit fixée et que cette hélice pousse un boulet de rayon R qui tourne à contre sens à la vitesse angulaire Ω. Quels équilibres doit-on écrire afin de déterminer la vitesse U de la bactérie?

Pour les plus courageux (facultatif).

Le moment de friction visqueuse agissant sur une sphère qui tourne autour de son axe à la vitesse angulaire Ω est donné par $\Gamma = 8\pi\eta R^3\Omega$. Estimer en ordre de grandeur Ω et U avec les données biologiques suivantes: $b \sim 0.5\,\mu m$, $\alpha \sim 30°$, $\omega \sim 100\,Hz$, $R \sim 1\,\mu m$, $L \sim 10\,\mu m$. Expérimentalement, on observe que les bactéries se déplacent avec une vitesse typique $U \sim 30\,\mu m$. L’ordre de grandeur calculé est-il le bon? Quel est l’ordre de grandeur du couple que doit fournir le moteur de la bactérie?
Peut-on estimer la puissance fournie par le micro-organisme?
Sachant que la transformation ATP $\rightarrow$ ADP fournit typiquement 5.10^{-20} J, estimer le nombre de molécules d’ATP consommées par unité de temps.