

Viscosité

Notes de cours: Chapitre 6.

À retenir:

Équation de Navier & Stokes (équation de la dynamique pour les milieux continus):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}$$

Conservation de la masse (fluide incompressible):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Contrainte de cisaillement visqueux: $\sigma = \eta \frac{\partial u_x}{\partial z}$ ($x //$ à la paroi, $z \perp$)

Conditions au limites:

- continuité des vitesses, non glissement sur une paroi solide
- continuité des contraintes

Nombre de Reynolds:

$$Re = \frac{\text{inertie}}{\text{viscosite}} = \frac{\|\rho \partial \mathbf{u} / \partial t + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}\|}{\|\eta \Delta \mathbf{u}\|}$$

Si une seule taille caractéristique L et écoulement permanent:

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta}$$

Trainée visqueuse sur un corps de taille caractéristique L pour $Re \ll 1$:

$$T \sim \eta U L$$

Trainée visqueuse sur une tige de rayon a et de longueur $L \gg a$:

$$F_{\parallel} = \xi_{\parallel} \eta U_{\parallel} L \quad \text{et} \quad F_{\perp} = \xi_{\perp} \eta U_{\perp} L \quad \text{avec} \quad \xi_{\perp} \simeq 2 \xi_{\parallel}$$

Pas de propulsion à bas Re si cinématique réversible.

Regarder le film de G.I. Taylor (1967): <https://youtu.be/51-6QCJTAjU>

Viscosité dynamique η (en Pa.s), Viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ (en m^2/s)

Eau à 20°: $\eta = 10^{-3}$ Pa.s, $\nu = 10^{-6}$ m^2/s

Miel: $\eta \sim 1$ Pa.s

Air à 20°: $\eta \simeq 1,8 \cdot 10^{-5}$ Pa.s, $\nu \simeq 1,6 \cdot 10^{-5}$ m^2/s

Rappel sur les contraintes visqueuses, analogie avec l'élasticité.

La notion de viscosité est classiquement introduite comme le lien entre contrainte tangentielle et taux de déformation en cisaillement simple (Fig. 1a): $\sigma_{xz} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial z}$. Dans le cas général, c'est un tenseur qu'il faut définir pour tenir compte des contraintes dans les différentes directions de l'espace. Si le fluide est Newtonien, la relation entre le tenseur de taux de déformation $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ et le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ est linéaire:

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\eta\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - p\underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

On remarquera que cette relation est très proche de l'équation de Lamé développée dans le cours de MSM1.

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} + \lambda\text{Tr}(\underline{\underline{\epsilon}})\underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

Le second terme tend vers $-p$ lorsque le coefficient de Poisson ν tend vers $1/2$.

Le tenseur des taux de déformation est la partie symétrique du gradient de vitesse :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

ce qui en coordonnées cartésiennes se traduit par:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -p + 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} & \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & -p + 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} & \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \eta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & -p + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dans le cas ultra simple d'un écoulement u_x cisailé selon z , on retrouve bien $\sigma_{xz} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial z}$.

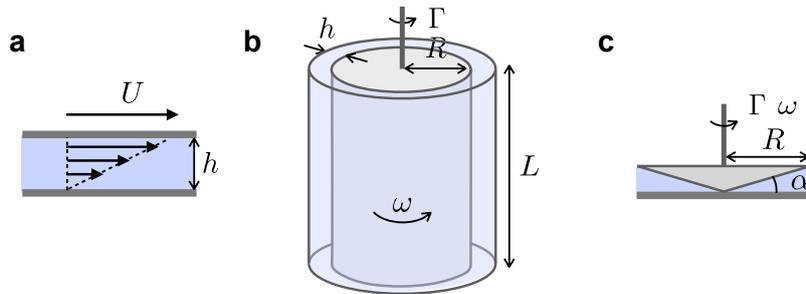


Figure 1: **a.** Écoulement en cisaillement simple entre 2 plaques parallèles. **b.** Écoulement de Couette cylindrique. **c.** Configuration cône-plan.

1 Mesurer la viscosité d'un liquide

Nous savons intuitivement que le miel est plus visqueux que l'eau qui elle-même est plus visqueuse que l'air (pour la viscosité dynamique). En pratique, comment mesure-t-on la viscosité d'un fluide? Nous proposons de décrire différentes méthodes qui vont nous permettre d'appréhender des écoulements de base.

1.1 Rhéomètres de Couette

Considérons un fluide cisailé entre deux plaques parallèles (Fig. 1a). Dans ce cas, le profil de l'écoulement est trivial:

$$u_x(z) = \frac{U}{h}z$$

La contrainte de cisaillement que l'opérateur doit appliquer à la plaque supérieure vaut ainsi:

$$\sigma_{xz} = \eta \left. \frac{\partial u_x}{\partial z} \right|_{z=h} = \eta \frac{U}{h}$$

Mesurer cette contrainte nous permet donc de déterminer la viscosité dynamique. En pratique, assurer le déplacement de deux plaques maintenues à un espacement constant en minimisant les frottements parasites est compliqué. Les rhéomètres commerciaux sont ainsi basés sur des géométries cylindrique ou cône-plan (leur axe de rotation est lubrifié par des films d'air).

1.1.1 Couette cylindrique

On considère deux cylindres concentriques insérés l'un dans l'autre (Fig. 1b). Le cylindre central de rayon R et de hauteur L est monté sur un axe et mis en rotation grâce à un moteur dont on peut contrôler la vitesse de rotation et mesurer précisément le couple correspondant. Le cylindre extérieur de rayon interne $R + h$ est maintenu fixé sur un bâti. Le fluide dont on veut mesurer la viscosité est introduit dans l'espacement entre les deux cylindres.

Dans la limite $h \ll R$, quel couple Γ le moteur doit-il développer pour assurer la rotation du rotor à une vitesse angulaire ω ?

Application numérique pour de l'eau avec des valeurs typiques, $R = 2 \text{ cm}$, $h = 1 \text{ mm}$, $L = 10 \text{ cm}$, $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$. Un rhéomètre récent (HR-1 de TA Instruments) est capable de mesurer des couples entre 20 nN.m et 150 mN.m . Cette mesure est-elle dans ses cordes?

1.1.2 Cône-plan

La méthode Couette cylindrique fonctionne bien, mais nécessite un assez grand volume de fluide (typiquement 20 cm^3). Une autre géométrie classique est la géométrie cône-plan (Fig. 1c). Un cône d'angle très large est fixé sur le rotor du rhéomètre au dessus du plan du bâti. Le fluide dont on veut mesurer la viscosité est inséré dans l'espace entre cône et plan. À nouveau, on mesure le couple nécessaire à assurer la rotation du rotor.

Si α est l'angle entre le cône et le plan (très faible), quel est le taux de cisaillement appliqué au fluide lorsque le rotor tourne à la vitesse angulaire ω ? En quoi la géométrie cône-plan est-elle plus avantageuse que plan-plan? Quel couple le rotor doit-il fournir pour faire tourner le cône?

Application numérique pour de l'eau cisailée dans un cône de rayon $R = 3 \text{ cm}$ avec un angle $\alpha = 1^\circ$ en rotation à une vitesse angulaire $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$.

2 Écoulement de Poiseuille

Dans les années 1840, le français Poiseuille qui s'intéressait à la circulation du sang dans les veines et l'ingénieur prussien Hagen ont établi indépendamment la loi d'écoulement d'un liquide visqueux dans une conduite cylindrique (loi de Hagen-Poiseuille). Cette loi relie le débit de fluide à la "perte de charge" (différence de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite). Pour illustrer cette loi, imaginons que nous cherchions à injecter de l'eau dans un tube de rayon $R = 0.5 \text{ mm}$, de longueur $L = 1 \text{ m}$, à l'aide d'une seringue dont le piston a un rayon $R_p = 1 \text{ cm}$ (Fig. 2).

Quel est le profil d'écoulement dans la section du tube?

Quel est le débit Q dans le tube que l'on obtient si on applique une charge $F = 10 \text{ N}$ sur le piston avec notre pouce?

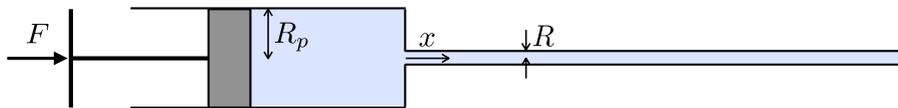


Figure 2: Injection d'un fluide dans un tube à l'aide d'une seringue.

3 Film en écoulement

Fabriquer des films photographiques relève d'un défi d'ingénierie: déposer plusieurs couches épaisses de quelques microns sur un support polymérique en une seule étape. Même si la photographie argentique n'est plus trop à la mode, l'enduisage multicouches est également utilisé dans de nombreuses autres applications. Dans ce dispositif, les liquides sont injectés à partir de longues fentes et s'écoulent le long de plans inclinés (Fig. 3). L'interface est un peu chahutée au niveau de l'injection, mais l'expérience montre que les profils des films deviennent rapidement stationnaires. De quoi dépendent leurs épaisseurs respectives?

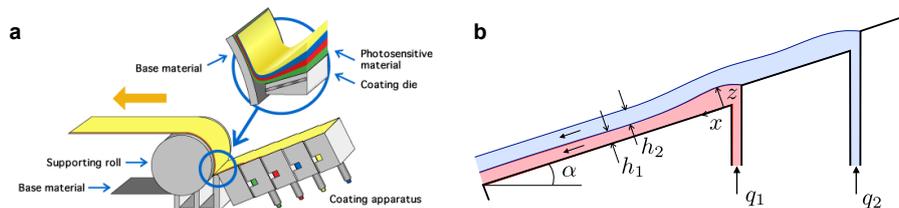


Figure 3: **a.** Procédé d'enduisage multicouches (www.konicaminolta.com). **b.** Version idéalisée.

Commençons par une couche unique de liquide 1 qui s'écoule sur un plan incliné de pente α (on supposera que l'air est très peu visqueux par rapport au liquide). Quel est le profil de l'écoulement dans un régime stationnaire?

Si le liquide est injecté avec un débit q_1 par unité de largeur, quelle est l'épaisseur h_1 de la couche?

Comment opérera-t-on pour résoudre le problème multicouches? Quelles seront les différentes conditions aux limites à prendre en compte? On décrira la procédure de résolution sans faire le calcul complet.

4 Sédimentation (à bas Re)

4.1 Chute d'une bille

Laissons tomber une bille de rayon R et de densité ρ_S dans un bain de densité ρ_L et de viscosité η (Fig. 4).

Quelle hypothèse doit-on vérifier pour que l'écoulement autour de la bille soit dominé par la viscosité du fluide?

Quelle est en loi d'échelle la contrainte visqueuse autour de la bille?

Quelle est alors la force de traînée?

Si l'inertie du fluide est négligeable, en est-il nécessairement autant pour l'inertie du solide?

À quelle vitesse la bille sédimente-t-elle?

À quelle condition l'hypothèse de départ est-elle vérifiée?

Peut-on conclure sur la vitesse d'un grain de sable (assimilé à une bille de 0.5 mm de rayon et de densité 2.3) dans l'eau? dans du miel? en dessous de quelle taille la sédimentation du grain dans l'eau correspond à un écoulement de type visqueux?

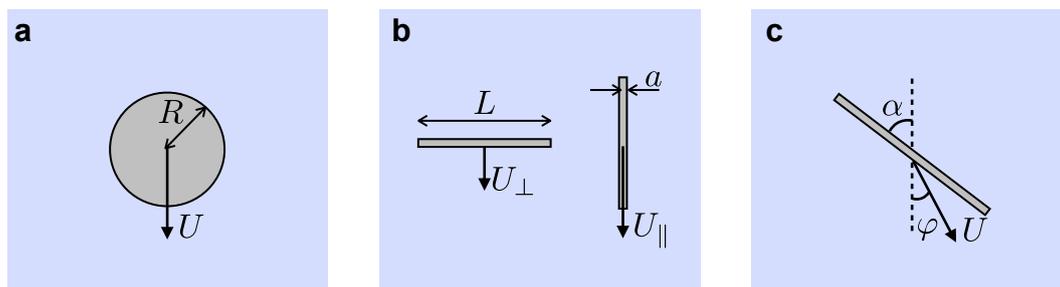


Figure 4: **a.** Sédimentation d'une bille. **b.** Chute d'une tige: à bas Re on observe qu'une tige verticale tombe deux fois plus rapidement qu'une tige horizontale. **c.** Chute d'une tige inclinée d'un angle α par rapport à la verticale. Le vecteur vitesse adopte un angle ϕ avec la verticale.

4.2 Chute d'une tige

Laissons tomber une tige de longueur L et de rayon a ($a \ll L$) dans un liquide visqueux. Expérimentalement, nous observons qu'une tige verticale tombe pratiquement 2 fois plus vite qu'une tige horizontale. Du point de vue théorique, on peut montrer que les forces de traînée s'écrivent de la manière suivante (voir les notes de cours pour les expressions exactes):

$$T_{\parallel} = c_{\parallel} \eta U_{\parallel} L \quad \text{et} \quad T_{\perp} = c_{\perp} \eta U_{\perp} L$$

avec $c_{\perp} \simeq 2c_{\parallel}$. En toute rigueur, ces coefficients de friction dépendent du rapport L/a . En pratique, cette dépendance est faible (logarithmique) et nous considérerons $c_{\parallel} \sim 2\pi$ pour les estimations d'ordre de grandeur.

À présent, que se passe-t-il si la tige est inclinée d'un angle α par rapport à la verticale? L'expérience montre que la tige dérive d'un angle φ avec la verticale qu'on se propose de déterminer.

Justifier que si la vitesse a une direction quelconque, on peut additionner les deux composantes de la force de friction correspondant aux deux composantes de la vitesse.

Trouver à partir d'un simple bilan de forces le lien entre φ et α .

Pour quel angle d'inclinaison α la dérive est-elle la plus forte?

L'angle d'inclinaison α se maintient-il au cours du temps?