Examen de mécanique des fluides

Promotion 140, 15 juin 2023

Partie A (8 points)

Durée 1h. Sans document, ni calculatrice.

Eau à 20°: $\eta_{eau} = 10^{-3}\,\text{Pa.s}$, $\rho_{eau} = 10^3\,\text{kg/m}^3$ Air à 20°: $\eta_{air} \simeq 1.8 \times 10^{-5}\,\text{Pa.s}$, $\rho_{air} \simeq 1.2\,\text{kg/m}^3$

Note: les calculs analytiques seront ici développés en lois d'échelle et les calculs numériques en ordre de grandeur.

1. Un enfant marche à la vitesse U en tenant un ballon gonflé d'hélium par une ficelle (Fig. 1). On note R le rayon du ballon que l'on assimilera à une sphère. Que vaut l'angle d'inclinaison θ que fait la ficelle du ballon avec la verticale?
   Application numérique : R = 10 cm, $\rho_{helium} \simeq 0.2$ kg/m^3, U =1 m/s.

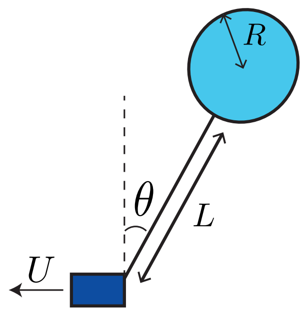

Figure 1: Un ballon est maintenu par une ficelle de longueur L par un enfant se déplaçant à la vitesse U. Le ballon s'incline d'un angle θ par rapport à la verticale.

Solution: Projection des forces sur la perpendiculaire à la ficelle :
$4/3\pi R^3(\rho_{air} - \rho_{helium})g\sin\theta = 1/2\rho_{air}U^2\pi R^2 C_x\cos\theta$, soit $\tan\theta = \frac{3\rho_{air}U^2C_x}{8gR\Delta\rho}$
$\tan\theta \simeq 1/2$ soit $\theta \simeq 26°$ si on prend $C_x = 1$, ou $\tan\theta \simeq 1/4$ soit $\theta \simeq 14°$ si on prend $C_x = 0.5$

2. Le dispositif microfluidique suivant (Fig. 2) permet de centrifuger une goutte de sang à bas coût. Ce dispositif est constitué de deux canaux très fins (d'épaisseur typique 50 μm et de longueur 5 cm), appelés tubes capillaires, disposés de manière radiale sur un disque. Une goutte de sang est introduite à l'extrémité centrale d'un des tubes capillaires. Un jeu d'élastique permet de faire tourner très rapidement les disques par rapport à un axe

horizontal (Fig. 2). On s'intéresse au mouvement d'un globule rouge que l'on assimilera à une bille de rayon a, de masse volumique ρ_g en suspension dans le sang, dans un tube capillaire, soumis à la vitesse angulaire ω. On suppose que l'écoulement s'effectue à bas nombre de Reynolds, ce que l'on vérifiera par la suite.

(a) A quelle accélération le globule rouge est-il soumis?

(b) Compte-tenu des hypothèses, quelle équation régit le déplacement du globule dans le tube?

(c) Que peut-on dire de l'inertie du globule?

(d) Résoudre l'équation de la trajectoire du globule.

(e) Quel est le temps caractéristique de déplacement du globule rouge?
Application numérique : $\omega = 1\,000$ rad/s, $a = 4$ μm, $\rho_g = 1\,100\ kg/m^3$, $\eta_{sang} = 3\ mPa.s.$

(f) Donner une évaluation de ce temps typique. Ce temps vous semble-t-il raisonnable?

(g) Vérifier l'hypothèse faite sur le nombre de Reynolds.

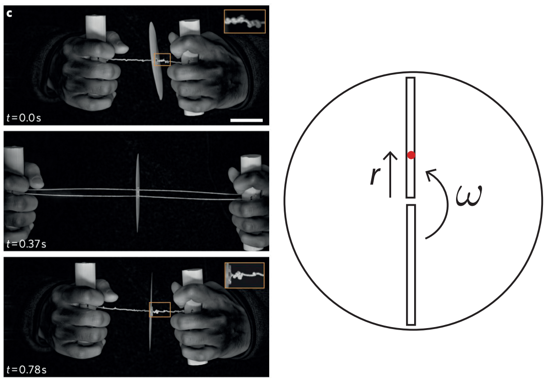

Figure 2: Schéma de principe de l'expérience : un disque pourvu de deux canaux radiaux est entrainé en rotation rapide par un simple système mécanique, ce qui permet de centrifuger du sang avec un équipement modeste.

Solution: accélération centrifuge : $g^* = r\omega^2$
Petit Re
$mdU/dt = -6\pi\eta aU + 4/3\pi a^3\Delta\rho r\omega^2$
inertie du globule négligeable:
$0 = -6\pi\eta aU + 4/3\pi a^3\Delta\rho r\omega^2$
$U = 2/9\Delta\rho a^2 r\omega^2/\eta = dr/dt$
$r = r_0 \exp(t/\tau)$
$\tau = \frac{9\eta}{2\Delta\rho a^2\omega^2}$
10s
Re? $U \simeq 1$ cm/s, $Re \sim 10^3.4.10^{-6}.10^{-2}/3.10^{-3} \sim 10^{-2}$ hypothèse ok!

3. Afin d'étaler une couche fine uniforme de liquide visqueux sur une surface, on peut procéder de la manière suivante : on dépose tout d'abord une couche épaisse sans soin

particulier puis on utilise une raclette qui se déplace à une distance fixée h_0 par rapport à la surface (Fig. 3). On se demande quelle est l'épaisseur du fluide déposé h_∞ connaissant h_0. On négligera les effets de tension de surface ainsi que la pression hydrostatique.

(a) En se plaçant dans le référentiel de la raclette, déterminer le profil de vitesse du fluide sous la raclette.

(b) Quel est le profil de vitesse du fluide dans la zone déposée derrière la raclette? On précisera les conditions aux limites.

(c) En réalisant un bilan de matière entre le fluide sous la raclette et le fluide déposé, déterminer l'épaisseur de fluide déposée h_∞ en fonction de h_0.

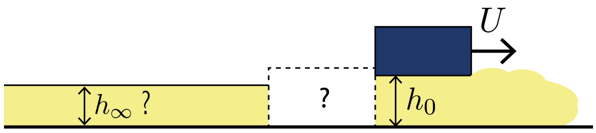

Figure 3: Une raclette située à la distance h_0 d'une surface, se déplace à vitesse U en laissant derrière elle un film d'épaisseur h_∞ que l'on cherche à déterminer.

Solution: Ecoulement de couette. Vitesse nulle en haut de la raclette en z=h, V=U en h=0. V=U(h-z)/h. $V_{moy} = U/2$
Dans le film hors raclette, écoulement bouchon, V=U partout.
Conservation du débit $V_{moy} * h_0 = U * h_\infty$ donc $h_\infty = h_0/2$

Partie B (12 points)

Durée 2h. Documents autorisés: poly du cours.

1. Drone martien (6.5pt)

Dans le cadre de la mission Mars 2020, la NASA a développé un drone d'observation, Ingenuity, qui a dû être optimisé pour les conditions locales (Fig. 4A). En particulier, la constante de gravité est plus faible que sur Terre, $g = 3.7\,\mathrm{m/s}^2$, et l'air local est beaucoup moins dense, $\rho = 0.02\,\mathrm{kg/m}^3$ en moyenne au niveau du sol. Nous supposerons que la viscosité dynamique de l'air sur Mars est de $10\,\mu$Pa.s.

L'engin de masse $M = 1.8\,\mathrm{kg}$ (dont $0.27\,\mathrm{kg}$ de batteries) est actionné par deux hélices contrarotatives (afin d'équilibrer le moment cinétique). Le rayon des pales des hélices est $R = 0.6\,\mathrm{m}$ et nous supposerons que leur largeur est uniforme $\ell = 0.05\,\mathrm{m}$ sur tout le rayon.
Nous cherchons à déterminer la vitesse de rotation des hélices permettant d'assurer un vol stationnaire.

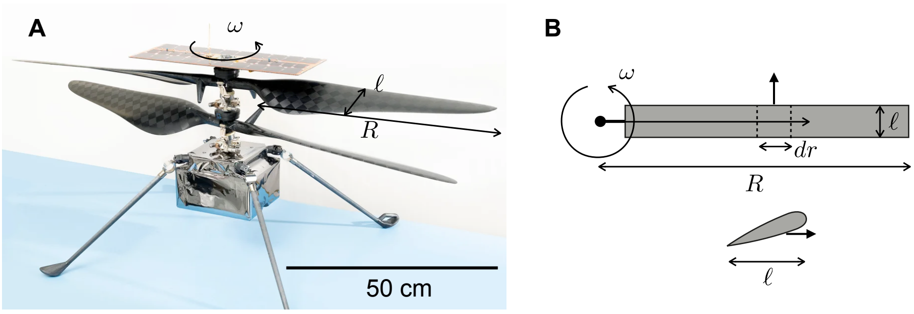

Figure 4: A. Schéma du drone Ingenuity (image NASA). B. Version simplifiée d'un pale d'hélice, vue du dessus et en coupe.

.

1. Compte-tenu des caractéristiques du problème, l'écoulement autour de l'hélice est-il à haut ou faible nombre de Reynolds? (avec un peu de bon sens pour la vitesse de rotation des hélices!)

2. Nous assimilerons une tranche d'hélice de longueur dr situé à une distance r du centre de rotation à un morceau d'aile (Fig. 4B). Quelle est la vitesse locale du vent apparent si l'hélice tourne à une vitesse angulaire ω (en vol stationnaire)?

3. Quelle est la force de portance dF_P correspondante? Pour les applications numériques, on considèrera un coefficient de portance $C_p = 1$.

4. En déduire la force de portance globale pour les 4 pales.

5. Quelle est la vitesse de rotation qui permet d'assurer un vol stationnaire? En donner une estimation numérique.

Solution:

(a) On se doute que la vitesse de rotation sera largement supérieure à 1 tour/s soit une vitesse linéaire de l'ordre de qq m/s, $Re = \rho UL/\eta$ $0.02*1*0.5/10^{-5} \sim 10^3$. Aucun doute, on est à grand Re.

(b) $U_{local} = r\omega$

(c) $dF_P = \frac{1}{2}\rho_{air}C_p(r\omega)^2\ell\,dr$

(d) Pour une pale, on a: $F_1 = \int_0^R dF_P = \frac{1}{6}\rho_{air}C_pR^3\omega^2\ell$. Donc pour les 4 pales $F_P = \frac{2}{3}\rho_{air}C_pR^3\omega^2\ell$.

(e) On cherche à équilibrer $Mg = F_p$, d'où:

$$\omega = \left(\frac{3}{2}\frac{Mg}{\rho_{air}C_pR^3\ell}\right)^{1/2}$$

Application numérique $\omega \sim 215\,\text{rad/s} \sim 34\,\text{tour/s} \sim 2000\,\text{tour/min}$ (pour info, on trouve sur Wikipedia 2500 tour/min, mais c'est peut-être la vitesse max). On est bien au delà de 1 tour/s utilisé pour déterminer Re.

Nous cherchons à présent à estimer la puissance requise pour le moteur.

6. Considérons notre tranche d'hélice comme un morceau d'aile 2D se déplaçant dans un fluide au repos. Quelle est l'expression de la force de traînée dT correspondante?
7. En déduire la puissance dissipée $d\mathcal{P}$ correspondante. Pour les applications numériques, nous considèrerons un coefficient de traînée $C_x = 0.02$.
8. Quelle est l'expression de la puissance dissipée par la rotation des 4 pales? En donner une estimation numérique.

Solution:

(a) Même expression que pour la portance, mais avec C_x

$$dT = \frac{1}{2}\rho_{air}C_x(r\omega)^2\ell\,dr$$

(b) Pour la puissance:

$$d\mathcal{P} = r\omega\,dT = \frac{1}{2}\rho_{air}C_x(r\omega)^3\ell\,dr$$

(c) Pour les 4 pales:

$$\mathcal{P}_4 = 4\int_0^R d\mathcal{P} = \frac{1}{2}\rho_{air}C_x\omega^3R^4\ell \sim 13\,\text{W}$$

En réalité, l'émission de tourbillons en bout d'hélice conduit à une traînée induite. Nous supposerons que le coefficient de traînée induite suit la même expression classique que pour une aile: $C_i = C_P^2/\pi(R/\ell) = 0.026$.

9. Si on applique l'expression de la traînée induite pour une aile au cas de l'hélice avec comme vitesse de vent, la vitesse au bout de l'hélice, quelle est la traînée induite pour chaque pale d'hélice?
10. En déduire la puissance dissipée par traînée induite par les 4 pales. En donner une estimation numérique. Quel est l'effet prépondérant sur la puissance dissipée?

Solution:

1. Pour une pale, on se retrouve avec:

$$T_{i_1} = \frac{1}{2}\rho_{air} R\ell (R\omega)^2 C_i = 0.13\,\mathrm{N}$$

En fait l'utilisation directe de l'expression obtenue pour une aile n'est pas évidente car la vitesse relative n'est pas uniforme le long de l'hélice, contrairement au cas d'une aile d'avion.

2. Pour les 4 pales:

$$\mathcal{P}_{i_4} = 4T_{i_1} R\omega = 70\,\mathrm{W}$$

L'effet de la traînée induite est ainsi prépondérant.

2. Écoulement entre les piles d'un pont (5.5pt)

On considère l'écoulement d'eau (supposée non-visqueuse) entre les piles d'un pont, représenté sur la figure ci-dessous et on s'intéresse à la surface libre de l'eau au niveau des piles du pont. En amont du pont, l'écoulement est supposé uniforme et de vitesse V_1. Entre les piles du pont, le niveau de l'eau baisse d'une hauteur h que l'on cherche à déterminer. Cette déflexion reste petite devant la hauteur d'eau ($h \ll H$). Le fluide au niveau de cette déflexion a alors une vitesse V_2. On considèrera une taille de pont L de 20 m.

1. Sachant que les déformations de l'interface sont de l'ordre de la dizaine de centimètres, justifier que l'on peut négliger les effets de tension de surface. Que vaut alors la pression à la surface de l'eau?

Solution: Si la déflexion de la surface $h \sim 10$ cm se fait sur une largeur typique $L \sim 20$ m, la saut de pression dû à la tension de surface est alors de l'ordre de : $\Delta p \sim \gamma h/L^2 \sim 0.07 \times 0.1/400 \sim 2.10^{-5}$ Pa $\ll P_0 = 10^5$ Pa. On peut donc négliger ce saut de pression par rapport à la pression atmosphérique, et supposer que la pression à la surface libre vaut P_0.

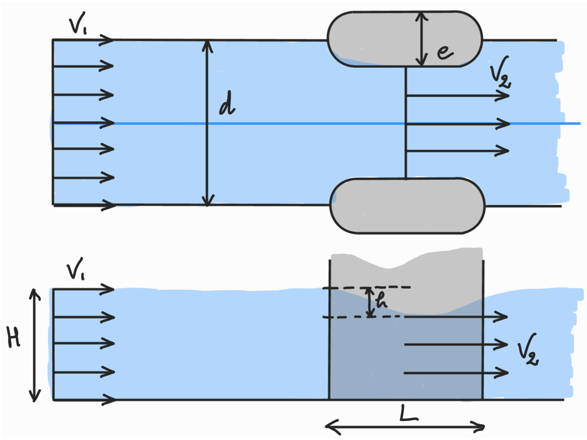

Figure 5: Écoulement entre les piles d'un pont. **En haut:** vue de dessus, **En bas:** vue de côté.

2. En utilisant la conservation du débit volumique, calculer la vitesse V_2 en fonction de V_1, e, d, H et h.

Solution: $Q = V_1 H d = V_2 (H-h)(d-e)$

$$V_2 = V_1 \frac{H}{H-h} \frac{d}{d-e} > V_1$$

3. Trouver une relation entre V_1, V_2, h et g l'accélération de la gravité.

Solution: Sur la surface libre, $P = C^{ste} = P_0$. En prenant comme référence verticale ($z = 0$) la hauteur d'eau à l'infini, on a donc $P + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = C^{ste}$.

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 - \rho g h$$

$$V_2^2 - V_1^2 = 2gh$$

4. Déduire des résultats précédents une relation entre h, H, d, e et V_1.

Solution:

$$V_1^2 \left[\frac{H^2}{(H-h)^2} \frac{d^2}{(d-e)^2} - 1 \right] = 2gh$$

5. Application numérique : Calculer h connaissant $d = 10\,\mathrm{m}$, $e = 1\,\mathrm{m}$, $H = 2\,\mathrm{m}$ et $V_1 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. On fera l'approximation $H - h \approx H$, que l'on vérifiera a posteriori.

Solution: Hypothèse : $H - h \approx H$

$$h \simeq \frac{V_1^2}{2g}\left[\frac{d^2}{(d-e)^2} - 1\right] = \frac{4}{2 \times 9.81}\left[\frac{100}{81} - 1\right] \simeq 5 \text{ cm}$$

On a bien $h \ll H$. L'hypothèse est donc justifiée.

6. En fait, l'eau a une viscosité finie. Les piles du pont font une largeur $L = 20$ m dans le sens de l'écoulement.
Décrire le champ de vitesse de l'eau proche de la surface d'une pile.
Justifier le fait que l'on puisse considérer, en première approximation, le profil de vitesse V_2 comme uniforme dans la section du cours d'eau.

Solution: L'épaisseur de la couche limite à la sortie des piles est de l'ordre de $\sqrt{\nu t} = \sqrt{\nu L/V_1} \simeq \sqrt{10^{-6} \times 20/2} \simeq 3\text{mm}$. On peut donc supposer que le profil de vitesse V_2 reste uniforme dans la direction transverse.